



ÁREA 1 - FACULDADE DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cursos de Engenharia

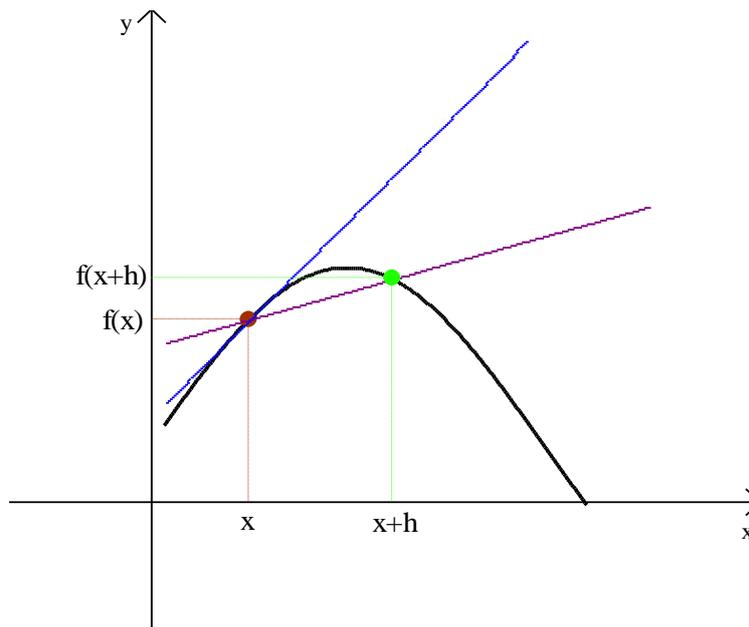
Disciplina: Cálculo Instrumental

Professor(a): \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_\_

Aluno(a): \_\_\_\_\_

2ª Lista de Exercícios

# Derivadas



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo.

Pitágoras

**Problemas envolvendo reta tangente e reta normal.**

**Questão 1.**

Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de  $f$ , nos pontos indicados.

(a)  $f(x) = 3x + 5$  ( $x_o = 2$ )

(b)  $f(x) = x^2 + 3$  ( $x_o = 4$ )

(c)  $f(x) = 2x^3 + 2$  ( $x_o = 2$ )

(d)  $f(x) = \sqrt{x+1}$  ( $x_o = 8$ )

**Questão 2.**

Considerando as funções a seguir, represente no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, o gráfico de  $f$  e os gráficos das retas tangente e normal, no ponto de abscissa  $x_o$  indicado. (**Visualizar no Winplot**)

(a)  $f(x) = x^2 - 4$  ( $x_o = 1$ )

(b)  $f(x) = -2x - 4$  ( $x_o = -1$ )

(c)  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $x_o = 0$ )

(d)  $f(x) = -x^2 - 2x + 3$  ( $x_o = -2$ )

**Questão 3.**

Em que ponto(s) da curva  $f(x) = x^3 - x^2 - 1$  a reta tangente tem ângulo de inclinação igual a  $\pi/4$ ?

**Questão 4.**

Caso exista, determine o(s) ponto(s) da curva  $f(x) = 1/x$ , no qual a reta tangente é paralela à:

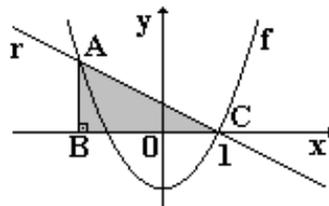
- (a) 1ª bissetriz, isto é,  $y = x$ .      (b) 2ª bissetriz, isto é,  $y = -x$ .

**Questão 5.**

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2 - 3x$  e que seja perpendicular à reta  $2y + x = 3$ .

**Questão 6.**

Calcule a **área** do triângulo retângulo  $ABC$  na figura abaixo, sabendo que a reta  $r$  é **normal** à curva de equação  $f(x) = x^2 - 1$ , no ponto de abscissa  $x_o = 1$ .



**Regra da cadeia**

**Questão 7.** Calcule a derivada das funções abaixo:

- (a)  $f(x) = (2x^3 + 5x - 8)^3$       (b)  $f(x) = \left(\frac{3x-3}{2x+5}\right)^4$       (c)  $f(x) = (5x^3 + 2x)^3 \cdot (x - x^2)^2$
- (d)  $f(x) = 5\sqrt{3x^4 + 5x + 1}$       (e)  $f(x) = \frac{(2x-3)^3}{(5-3x)^2}$       (f)  $f(x) = 2e^{(3x^2+6x+7)}$
- (g)  $f(x) = 2^{(5-x^3)}$       (h)  $f(x) = e^{(\sqrt{x})} \cdot (x^3 - 5x)$       (i)  $f(x) = 3e^{\text{sen}(x)}$
- (j)  $f(x) = \cos(e^x + 1)$       (k)  $f(x) = 2 \text{sen}(x^2) \cdot \cos(x + 1)$       (l)  $f(x) = \text{sen}^3(x)$
- (m)  $f(x) = \frac{2^{(2x)} \cdot \cos(3x)}{\text{sen}(5x)}$       (n)  $y = \log_2(1-3x)$       (o)  $y = \frac{\text{sen}(2x)}{\ln(x^2)}$
- (p)  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 \text{sen}(x)}{\sqrt{1+x}}\right)$

**Questão 8.** Encontre a equação da reta *tangente* ao gráfico de  $f(x) = \frac{2 \text{sen}(x^2 + 2x) - 3}{\cos(x^3) + 1}$  no ponto  $x_0 = 0$ .

**Derivadas das funções trigonométricas inversas**

**Questão 9.** Calcule a derivada das funções abaixo:

- (a)  $y = \arccos(2x + 1)$       (b)  $y = \text{arccossec}(e^x)$
- (c)  $y = x^2(\text{arcsen}(x))^3$       (d)  $y = e^x \text{arcsec}(x)$
- (e)  $y = \text{arctg}(2^{7x})$       (f)  $y = \text{arccotg}(\ln x)$

**Questão 10.** Mostre que a reta normal à curva  $y = \text{arcsen}(x) - \ln(x + 1)$ , no ponto  $x_0 = 0$ , faz com o eixo Ox um ângulo de  $90^\circ$ .

**Questão 11.** Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico da função  $y = \text{arctg}^2(x)$ , no ponto de abscissa  $x_0 = \sqrt{3}$ .

**Derivadas sucessivas.**

**Questão 12.** Calcule as derivadas sucessivas até a ordem  $n$  indicada.

- (a)  $y = 3x^4 - 2x - 9, n = 4$       (b)  $y = \text{sen}(-5x), n = 5$   
 (c)  $y = \ln(1 - x^2), n = 2$       (d)  $y = e^{2x+1}, n = 3$

**Questão 13.** Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções deriváveis até a 3ª ordem. Mostre que:

- (a)  $(f \cdot g)'' = gf'' + 2f'g' + fg''$       (b)  $(f \cdot g)''' = gf''' + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

**Questão 14.** Mostre que a função  $x = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ , onde  $A, \omega$  e  $\alpha$  são constantes e  $t$  é variável, é solução da equação diferencial  $x'' + \omega^2 x = 0$ .

**Derivada na forma implícita.**

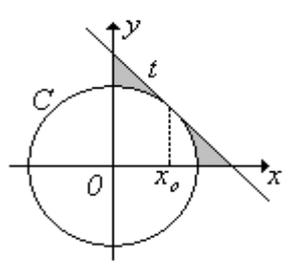
**Questão 15.** Determine a derivada  $y'$  das curvas dadas implicitamente por:

- (a)  $x^2 + y^2 = 4$       (b)  $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$       (c)  $x^2 y^2 + x \text{sen}(y) = 0$   
 (d)  $e^{xy} = x + y - 3$       (e)  $y^3 - \frac{x-y}{x+y} = 0$       (f)  $\text{tg}(y) = xy - 1$

**Questão 16.** Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de cada função abaixo, nos pontos indicados:

- (a)  $6x^2 + 13y^2 = 19$  (elipse), nos pontos onde a normal é paralela à reta  $26x - 12y - 7 = 0$ . (Ver no Winplot)  
 (b)  $\ln(y) = x + y^2$  no ponto  $P(-1, 1)$ .  
 (c)  $x^3 = y \cdot 2^y$ , no ponto em que a normal é vertical.

**Questão 17.** Seja  $C$  a circunferência dada implicitamente por  $x^2 + y^2 = 1$  e  $t$  a reta tangente à  $C$  no ponto de abscissa  $x_0 = \sqrt{2}/2$ , como mostra a figura ao lado. Calcule o valor da área sombreada.



**Questão 18.** Mostre que as retas tangentes às curvas  $4y^3 - x^2 y - x + 5y = 0$  e  $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$  na origem, são perpendiculares.

**Regras de L'Hospital**

**Questão 19.** Calcule os limites abaixo usando as **Regras de L'Hospital** :

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5x + 5\operatorname{sen}x}{2x^3}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x}}{5x^2}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen}x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x \operatorname{sen} \left( \frac{5}{x} \right) \right]$

(f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{5/x^2}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(2x)]^{3/x^2}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + x)^x$

(i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{1/x} - 1)$

**Questão 20.** Para cada função a seguir, determine (se possível): o domínio, os intervalos de crescimento e decréscimo, além dos máximos e mínimos relativos.

(a)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

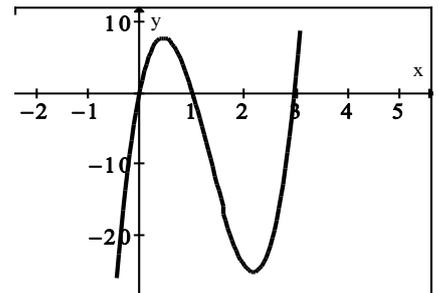
(b)  $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

(c)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ; Sabendo que:  $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$ .

(d)  $f(x) = e^{-x^2/2}$ ; Sabendo que:  $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$ .

(e)  $f(x) = \frac{-2x^2 + 8}{(x^2 - 16)}$ ; Sabendo que:  $f'(x) = \frac{48x}{(x^2 - 16)^2}$ .

**Questão 21.** Sabe-se que:  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ , o gráfico da derivada  $f'$  é representado ao lado e  $f$  tem um máximo no ponto  $(1,5)$ . Determine as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .



**Otimização**

**Questão 22.** Resolva cada problema a seguir:

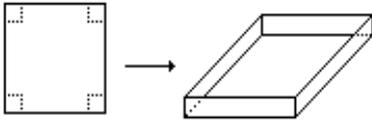
(a) Deseja-se cercar um jardim de forma retangular com  $L$  metros de cerca. Encontre as dimensões do maior jardim que pode ser cercado se usado todo o material.

(b) A potência  $P$  de uma bateria de um automóvel é dada por  $P = VI - I^2 R$ , sendo  $I$  a corrente para uma voltagem  $V$  e resistência interna da bateria  $R$ . São constantes  $V$  e  $R$ . Que corrente corresponde à potência máxima?

(c) Uma área retangular com  $288m^2$  deve ser cercada. Em dois lados opostos será usada uma cerca que custa 1 real o metro e nos lados restantes, uma cerca que custa 2 reais o metro. Encontre as dimensões do retângulo com o menor custo.

(d) Uma fábrica produz  $x$  milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por  $C(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 6$  e a receita obtida na venda é dada por  $R(x) = 60x - 12x^2$ , determinar o número ótimo de unidades que maximiza o lucro  $L$ . (Lucro = Receita - Custo, isto é,  $L(x) = R(x) - C(x)$ ).

(e) Usando uma folha de cartolina, de lado igual a  $60\text{ cm}$ , deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando seus cantos em quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível.



(f) Uma reta passando por  $P(1,2)$  corta o eixo  $Ox$  em  $A(a,0)$  e o eixo  $Oy$  em  $B(0,b)$ . Determine o triângulo  $OAB$  de área mínima, para  $a$  e  $b$  positivos.

(g) O departamento de trânsito de uma cidade, depois de uma pesquisa, constatou que num dia normal da semana à tarde, entre 2 e 7 horas, a velocidade do tráfego é de aproximadamente  $V(t) = 2t^3 - 27t^2 + 108t - 35$  quilômetros por hora, onde  $t$  é o número de horas transcorridas após o meio dia. A que horas do intervalo de 2 às 7, o tráfego flui mais rapidamente e a que horas flui mais lentamente, e com que velocidade?

(h) Um gerador de corrente elétrica tem uma força eletromotriz de  $\varepsilon$  volts e uma resistência interna de  $r$  ohms.  $\varepsilon$  e  $r$  são constantes. Se  $R$  ohms é uma resistência externa, a resistência total é  $(r + R)$  ohms e se  $P$  watts é a potência então,  $P = (\varepsilon^2 R) / (r + R)^2$ . Qual o valor de  $R$  que consumirá o máximo de potência? Interprete o resultado.

(i) Se  $1200\text{ cm}^2$  de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

**Respostas**

Questão 1.

- (a) tangente :  $y - 3x - 5 = 0$  e normal :  $3y + x - 35 = 0$   
 (b) tangente :  $y - 8x + 13 = 0$  e normal :  $8y + x - 156 = 0$   
 (c) tangente :  $y - 24x + 30 = 0$  e normal :  $24y + x - 434 = 0$   
 (d) tangente :  $6y - x - 10 = 0$  e normal :  $y + 6x - 51 = 0$

Questão 3.  $x = 1$  e  $x = -1/3$

Questão 4.

- (a) não existe (b)  $(1, 1), (-1, -1)$

Questão 5. reta tangente :  $y = 2x - \left(\frac{25}{4}\right)$

Questão 6.  $\frac{25}{16}$  u.a.

Questão 7.

- (a)  $f'(x) = 3(2x^3 + 5x - 8)^2(6x^2 + 5)$  (b)  $f'(x) = \frac{84(3x - 3)^3}{(2x + 5)^5}$   
 (c)  $f'(x) = (5x^3 + 2x)^2(x - x^2)(-65x^4 + 55x^3 - 14x^2 + 10x)$  (d)  $f'(x) = \frac{(60x^3 + 25)}{2\sqrt{3x^4 + 5x + 1}}$   
 (e)  $f'(x) = \frac{(2x - 3)^2(12 - 6x)}{(5 - 3x)^3}$  (f)  $f'(x) = (12x + 12)e^{(3x^2 + 6x + 7)}$   
 (g)  $f'(x) = 2^{(5-x^3)} \ln(2)(-3x^2)$  (h)  $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \left[ \frac{x^3 - 5x}{2\sqrt{x}} + (3x^2 - 5) \right]$   
 (i)  $f'(x) = 3 \cos(x)e^{\sin(x)}$  (j)  $f'(x) = -e^x \operatorname{sen}(e^x + 1)$   
 (k)  $f'(x) = 4x \cos(x^2) \cos(x + 1) - 2 \operatorname{sen}(x^2) \operatorname{sen}(x + 1)$  (l)  $f'(x) = 3 \operatorname{sen}^2(x) \cos(x)$   
 (m)  $f'(x) = \frac{[2^{(2x)} \ln(4) \cos(3x) - 3 \cdot 2^{(2x)} \operatorname{sen}(3x)] \operatorname{sen}(5x) - 5 \cdot 2^{(2x)} \cos(3x) \cos(5x)}{\operatorname{sen}^2(5x)}$   
 (n)  $y' = \frac{3}{(3x - 1) \ln 2}$  (o)  $y' = \frac{2x \cos(2x) \ln(x^2) - 2 \operatorname{sen}(2x)}{x \ln^2(x^2)}$   
 (p)  $f'(x) = \frac{2}{x} + \cot g(x) - \frac{1}{2 + 2x}$

Questão 8.  $2y - 4x + 3 = 0$

Questão 9.

(a)  $y' = \frac{-2}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}}$

(b)  $y' = \frac{-1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$

(c)  $y' = 2x(\operatorname{sen}^{-1}x)^3 + \frac{3x^2(\operatorname{sen}^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(d)  $y' = e^x \operatorname{arc} \operatorname{sec}(x) + \frac{e^x}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

(e)  $y' = \frac{7 \ln(2) 2^{7x}}{1 + 2^{14x}}$

(f)  $y' = \frac{-1}{x \ln^2 x + x}$

Questão 11.

reta tangente:  $y - \left(\frac{\pi^2}{9}\right) = \left(\frac{\pi}{6}\right)(x - \sqrt{3})$     reta normal:  $y - \left(\frac{\pi^2}{9}\right) = \left(\frac{-6}{\pi}\right)(x - \sqrt{3})$

Questão 12.

(a)  $y^{(4)} = 72$

(b)  $y^{(5)} = (-5)^5 \cos(-5x)$

(c)  $y'' = \frac{-2 - 2x^2}{(1 - x^2)^2}$

(d)  $y''' = 8e^{(2x+1)}$

Questão 15.

(a)  $y' = -xy^{-1}$

(b)  $y' = \frac{1 - y^2}{2xy + 6y^2 + 2}$

(c)  $y' = \frac{-2xy^2 - \operatorname{sen}(y)}{2x^2y + x \cos(y)}$

(d)  $y' = \frac{ye^{xy} - 1}{1 - xe^{xy}}$

(e)  $y' = \frac{2y}{3y^2(x+y)^2 + 2x}$

(f)  $y' = \frac{y}{\sec^2(y) - x}$

Questão 16.

(a) R. T:  $\begin{cases} 6x + 13y + 19 = 0 & \text{em } P(-1, -1) \\ 6x + 13y - 19 = 0 & \text{em } Q(1, 1) \end{cases}$     R. N:  $\begin{cases} 6y - 13x - 7 = 0 & \text{em } P(-1, -1) \\ 6y - 13x + 7 = 0 & \text{em } Q(1, 1) \end{cases}$

(b) reta tangente:  $y = -x$     reta normal:  $y = x + 2$

(c) reta tangente:  $y = 0$     reta normal:  $x = 0$

Questão 17. Área =  $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$  u.a.

Questão 19.

(a)  $-5/12$

(b)  $-5/2$

(c)  $+\infty$

(d)  $2$

(e)  $-5$

(f)  $1$

(g)  $e^3$

(h)  $1$

(i)  $+\infty$

**Questão 20.**

- (a)  $D(f) = R$ ; crescente:  $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ ; decrescente:  $[1, 3]$ ; máx.:  $Q(1, 6)$ ; mín.:  $R(3, 2)$ ;
- (b)  $D(f) = R$ ; crescente:  $[-1, 1]$ ; decrescente:  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ; máx.:  $Q(1, 0)$ ; mín.:  $R(-1, -4)$ ;
- (c)  $D(f) = R - \{1\}$ ; decrescente em  $R - \{1\}$ ; não possui máximo nem mínimo relativos;
- (d)  $D(f) = R$ ; crescente:  $(-\infty, 0]$ ; decrescente:  $[0, +\infty)$ ; máx.:  $N(0, 1)$ ; não tem mín;
- (e)  $D(f) = R - \{-4, 4\}$ ; crescente:  $[0, 4) \cup (4, +\infty)$ ; decrescente:  $(-\infty, -4) \cup (-4, 0]$ ; mín.:  $N(0, -1/2)$ ; não tem máx..

**Questão 21.**  $a = 3$ ,  $b = -16$ ,  $c = 18$

**Questão 22.**

- (a) um quadrado de lado  $L/4$ .
- (b)  $l = V/2R$ .
- (c) 24 m (R\$1) e 12 m (R\$2).
- (d)  $x = 1000$  unidades .
- (e) 10 cm.
- (f) triângulo de base = 2 e altura = 4.
- (g) Mais rapidamente às 3 horas com velocidade de 100 km/h e mais lentamente às 6 horas com velocidade de 73 Km/h.
- (h)  $r = R$ .
- (i)  $V = 4000cm^3$ .