Plano complexo (plano de Gauss)

Plano de Gauss

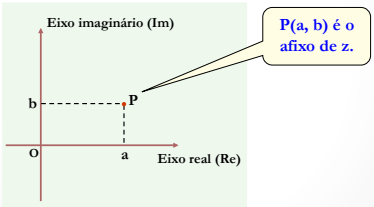
- A cada número complexo **z = a + bi** podemos associar, um e somente um, par ordenado (a, b).

(a, b) ⇒ a = Re(z) e b = Im(z)

- A partir dessa correspondência um a um, podemos representar o conjunto dos números complexos por meio de um sistema de coordenadas cartesianas. A esse sistema damos o nome de **plano complexo ou plano de Gauss**.

Plano de Gauss

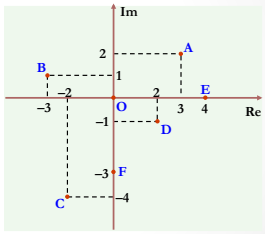
- A cada complexo **z = a + bi** corresponde, no plano complexo, um ponto **P(a, b)**.



Plano de Gauss

- Veja os afixos de alguns complexos no plano complexo.

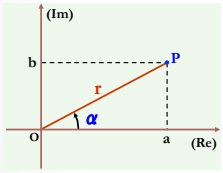
Complexo	Afixo
3 + 2i	A(3, 2)
–3 + i	B(–3, 1)
–2 – 4i	C(–2, –4)
2 – i	D(2, –1)
4 = 4 + 0i	E(4, 0)
–3i = 0 – 3i	F(0, –3)
0 = 0 + 0i	O(0, 0)



Módulo e argumento de um complexo

Módulo e argumento de um complexo

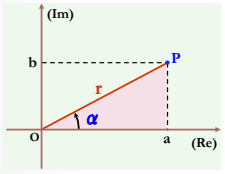
- A figura mostra o afixo P(a, b) de um complexo z = a + bi, sendo a e b reais.



- ✓ r = |z| → módulo de z (OP)
- ✓ α = arg(z) → argumento de z

Módulo e argumento de um complexo

- A figura mostra o afixo P(a, b) de um complexo z = a + bi, sendo a e b reais.



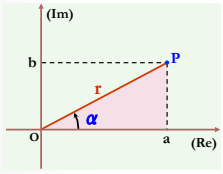
✓ Cálculo de r = |z|:

$r^2 = a^2 + b^2$

$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Módulo e argumento de um complexo

- A figura mostra o afixo P(a, b) de um complexo z = a + bi, sendo a e b reais.



✓ Cálculo do arg(z):

$\boxed{\cos \alpha = \frac{a}{r}}$ =

$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{b}{r}}$ =

Exemplos

- Obter o módulo r e o argumento principal α de cada um dos complexos z = a + bi a seguir. Representar seus afixos P no plano de Gauss.

a) $z = -2i \Rightarrow z = 0 - 2i \Rightarrow a = 0$ e $b = -2$

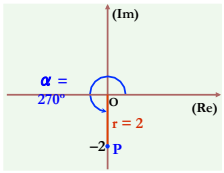
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{0}{2} = 0 \\ \text{sen } \alpha = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \alpha = 270^\circ$$

Exemplos

- Obter o módulo r e o argumento principal α de cada um dos complexos z = a + bi a seguir. Representar seus afixos P no plano de Gauss.

a) $z = -2i$



Exemplos

- Obter o módulo r e o argumento principal α de cada um dos complexos z = a + bi a seguir. Representar seus afixos P no plano de Gauss.

a) $z = -\sqrt{3} + i \Rightarrow a = -\sqrt{3}$ e $b = 1$

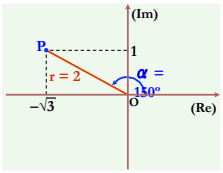
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen } \alpha = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \alpha = 150^\circ$$

Exemplos

- Obter o módulo r e o argumento principal α de cada um dos complexos z = a + bi a seguir. Representar seus afixos P no plano de Gauss.

a) $z = -\sqrt{3} + i$



Exemplos

- Obter o módulo r e o argumento principal α de cada um dos complexos z = a + bi a seguir. Representar seus afixos P no plano de Gauss.

a) $z = 4 \Rightarrow z = 4 + 0i \Rightarrow a = 4$ e $b = 0$

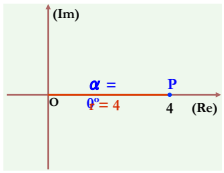
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{4}{4} = 1 \\ \text{sen } \alpha = \frac{b}{r} = \frac{0}{4} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \alpha = 0^o$$

Exemplos

- Obter o módulo r e o argumento principal α de cada um dos complexos z = a + bi a seguir. Representar seus afixos P no plano de Gauss.

a) $z = 4$



Forma trigonométrica de um complexo

Forma trigonométrica

- Todo complexo não nulo $z = a + bi$ pode ser escrito em função de seu módulo **r** e de seu argumento principal α. Veja

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \text{ sen } \alpha \end{array}\right.$$

$z = a + b.i \Rightarrow z = r \cos \alpha + r \text{ sen } \alpha \, . \, i$

$$\boxed{z = r(\cos \alpha + i.\text{sen } \alpha)}$$

Exemplos

- Representar na forma trigonométrica, os números complexos x = 1 + $\sqrt{3}$.i, y = –3 + 3i e z = 2i.

$x = 1 + \sqrt{3}.i \Rightarrow a = 1$ e $b = \sqrt{3}$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ \text{sen } \alpha = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \alpha = 60^o$$

$z = 2(\cos 60^o + i \text{ sen } 60^o)$

Exemplos

- Representar na forma trigonométrica, os números complexos x = 1 + $\sqrt{3}$.i, y = –3 + 3i e z = 2i.

$x = -3 + 3i \Rightarrow a = -3$ e $b = 3$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } \alpha = \frac{b}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \alpha = 135^o$$

$z = 3\sqrt{2}(\cos 135^o + i \text{ sen } 135^o)$

Exemplos

- Representar na forma trigonométrica, os números complexos x = 1 + √3.i, y = –3 + 3i e z = 2i.

$z = 2i \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 2$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(0)^2 + 2^2} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{0}{2} = 0 \\ \text{sen } \alpha = \frac{b}{r} = \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \alpha = 90^\circ$$

$z = 2(\cos 90^\circ + i \text{ sen } 90^\circ)$

Operações na forma trigonométrica

Multiplicação

- Suponhamos dois complexos z e w, escritos na forma trigonométrica:

$z = r(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$ e $w = s(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$

$$z.w = rs[\cos(\alpha + \beta) + i.\text{sen}(\alpha + \beta)]$$

Observe que:

- ✓ $|z.w| = rs = |z|.|w|$
- ✓ $\arg(z.w) = \alpha + \beta = \arg(z) + \arg(w)$

Exemplos

- O produto de z = 2(cos 112° + i sen 112°) por w = 3(cos 68° + i sen 68°) é

$z.w = 2.3 [\cos(112^\circ + 68^\circ) + i \text{ sen } (112^\circ + 68^\circ)]$

$= 6(\cos 180^\circ + i \text{ sen } 180^\circ)$

$= 6(-1 + 0i) = -6$

Exemplos

- O produto de x = 4(cos 80° + i sen 80°) por y = cos 40° + i sen 40° é

$x.y = 4.1 [\cos(80^\circ + 40^\circ) + i \text{ sen } (80^\circ + 40^\circ)]$

$= 4(\cos 120^\circ + i \text{ sen } 120^\circ)$

$= 4\left(\frac{-1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

Divisão

- Suponhamos, novamente, dois complexos z e w, com w ≠ 0, escritos na forma trigonométrica:

$z = r(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$ e $w = s(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$

$$z/w = r/s[\cos(\alpha - \beta) + i.\text{sen}(\alpha - \beta)]$$

Observe que:

- ✓ $|z/w| = r/s = |z|/|w|$
- ✓ $\arg(z/w) = \alpha - \beta = \arg(z) - \arg(w)$

Exemplos

- Na divisão de z = 6(cos 20° + i sen 20°) por w = 3(cos 65° + i sen 65°), o quociente é

$z/w = 6/3\ [\cos(20° - 65°) + i \operatorname{sen}(20° - 65°)]$

$= 2\ [(\cos(-45°) + i \operatorname{sen}(-45°)]$

$= 2\ (\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i.\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

Potenciação

- Sendo z = r(cos α + i.sen α), vamos obter o módulo e o argumento da potência z^3.

$z^3 = z.z.z$

$|z^3| = |z.z.z| = |z|.|z|.|z| = r.r.r = r^3$

$\arg(z^3) = \arg(z.z.z) = \arg(z) + \arg(z) + \arg(z)$

$= \alpha + \alpha + \alpha =$

$3\alpha = 3\arg(z)$

$z^3 = r^3(\cos 3\alpha + i.\operatorname{sen} 3\alpha)$

Potenciação – Fórmula geral

- Se z = r(cos α + i.sen α) e k é inteiro, temos

$z^k = r^k(\cos k\alpha + i.\operatorname{sen} k\alpha)$

(1ª fórmula de De Moivre)

Observe que:

- ✓ $|z^k| = r^k = |z|^k$
- ✓ $\arg(z^k) = k.\alpha = k\ .\ \arg(z)$

Exemplos

- Se z = 2(cos 15° + i sen 15°), calcular z^6.

$z^6 = 2^6\ [\cos(6.15°) + i \operatorname{sen}(6.15°)]$

$= 64\ (\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

$= 64\ (0 + i)$

$= 64i$

$z^6 = 64i$

Exemplos

- Pela fórmula de De Moivre, calcular $(1 - i)^{-9}$.

Vamos escrever z = 1 – i na forma trigonométrica.

$z = 1 - i \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -1$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\ \alpha\ \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\ \alpha\ \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \alpha = 315°$

$z = \sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

Exemplos

- Pela fórmula de De Moivre, calcular $(1 - i)^{-9}$.

Pela fórmula de De Moivre,

$z^{-9} = (\sqrt{2})^{-9}[\cos(-9.315°) + i \operatorname{sen}(-9.315°)]$

$= \sqrt{2}.2^{-5}[\cos(-2\,835°) + i \operatorname{sen}(-2\,835°)]$

$z^{-9} = \frac{\sqrt{2}}{32}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

$= \frac{\sqrt{2}}{32}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32}i$

Raízes de um complexo

Raízes de um complexo

- Considere os seguintes complexos, escritos na forma algébrica

$w_1 = 3 \quad w_2 = -3 \quad w_3 = 3i \quad w_4 = -3i$

Vamos calcular a quarta potência de todos eles.

$(w_1)^4 = 3^4 = 81$
$(w_2)^4 = (-3)^4 = 81$
$(w_3)^4 = (3i)^4 = 81 \cdot i^4 = 81$
$(w_3)^4 = (-3i)^4 = 81 \cdot i^4 = 81$

Dizemos que cada um desses quatro números é uma raiz quarta de 81.

Raízes de um complexo

- Generalizando, se z e w são dois complexos e n ≥ 2, n natural,

$w^n = z \Rightarrow$ w é uma raiz enésima de z

Exemplo

- Utilizando a forma trigonométrica, obter as raízes cúbicas de z = 8.

Vamos escrever z = 8 na forma trigonométrica.

$z = 8(\cos 0^o + i \operatorname{sen} 0^o)$

Devemos encontrar todos os complexos w; $w^3 = z = 8$.

$w = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \Rightarrow w^3 = s^3(\cos 3\beta + i \operatorname{sen} 3\beta)$

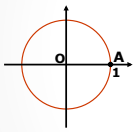
$w^3 = z \Rightarrow s^3(\cos 3\beta + i \operatorname{sen} 3\beta) = 8(\cos 0^o + i \operatorname{sen} 0^o)$

$\begin{cases} s^3 = 8 \Rightarrow s = 2 \\ \cos 3\beta = \cos 0^o \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} 3\beta = \operatorname{sen} 0^o \end{cases}$

Exemplo

- Utilizando a forma trigonométrica, obter as raízes cúbicas de z = 8.

O co-seno é 1 e o seno é 0 na origem A do ciclo.



$\left.\begin{matrix} \cos 3\beta = 1 \\ \operatorname{sen} 3\beta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\beta = k.360^o \Rightarrow \beta = k.120^o$

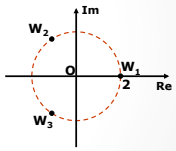
- ✓ k = 0 ⇒ $\beta = 0^o$
- ✓ k = 1 ⇒ $\beta = 120^o$
- ✓ k = 2 ⇒ $\beta = 240^o$

Exemplo

- Utilizando a forma trigonométrica, obter as raízes cúbicas de z = 8.

As três raízes cúbicas de z = 8 são

- ✓ $w_1 = 2(\cos 0^o + i \operatorname{sen} 0^o)$
- ✓ $w_2 = 2(\cos 120^o + i \operatorname{sen} 120^o)$
- ✓ $w_3 = 2(\cos 240^o + i \operatorname{sen} 240^o)$



Raízes de um complexo

- Veja a fórmula geral para o cálculo das rízes-enésimas de um complexo.

Dado o complexo na forma polar $z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$

$$z_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{360^\circ . k + \alpha}{n} + i \operatorname{sen} \frac{360^\circ . k + \alpha}{n}\right)$$