EDO LINEARES

Uma **EDO Linear de Primeira Ordem** tem a seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

A solução geral é dada por

$$y = \frac{\int u(x)q(x)dx + C}{u(x)},$$

onde

$$u(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right),$$

Chamada **Fator Integrante (FI)**. Se uma Condição Inicial (CI) for dada, usaremos ela para encontrar a constante C.

Apresentamos alguns passos práticos pra resolvê-la:

1. Se a EDO é dada como

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$$

Reescrevemos ela na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

onde

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{and} \quad q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

2. Encontre o fator Integrante

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

3. Resolva a Integral $\int u(x)q(x)dx$

4. A seguir, escreva a solução geral

$$y = \frac{\int u(x)q(x)dx + C}{u(x)}.$$

Exemplo: Encontre a solução particular do Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y' + \tan(x)y = \cos^2(x), \quad y(0) = 2.$$

Solução: Siga os seguintes passos::

Passo 1: Neste exemplo, não é necessário reescrever a EDO. Assim, temos

$$p(x) = \tan(x) \quad \text{and} \quad q(x) = \cos^2(x).$$

Passo 2: encontrando o Fator Integrante (FI)

$$u(x) = e^{\int \tan(x)dx} = e^{-\ln(\cos(x))} = e^{\ln(\sec(x))} = \sec(x)$$

Passo 3: Nós temos

$$\int \sec(x)\cos^2(x)dx = \int \cos(x)dx = \sin(x)$$

Passo 4: A solução geral é dada

$$y = \frac{\sin(x) + C}{\sec(x)} = \left(\sin(x) + C\right)\cos(x)$$

Passo 5: A fim de encontrar a solução do PVI, devemos usar a condição inicial pasra encontrar a constante C. Desta forma, temos

$$y(0) = C = 2.$$

Portanto, a solução é

$$y = \left(\sin(x) + 2\right)\cos(x).$$

$$2t\frac{dy}{dt} - y = t + 1, \quad y(2) = 4 \,.$$

Solução: Esta é uma EDO Linear. Para resolver a EDO siga os próximos três passos:

1. Divide por $2t$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{2\,t} = \frac{t+1}{2\,t} \,.$$

2. Obtenha o FI (Fator Integrante) $u(t)$ fazendo

$$u(t) = e^{\int -\frac{1}{2t}dt} = e^{-\frac{\ln(t)}{2}} = t^{-\frac{1}{2}}$$

3. A solução geral é dada por

$$y = \frac{\int t^{-\frac{1}{2}}\frac{t+1}{2t}dt + C}{t^{-\frac{1}{2}}} .$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int t^{-\frac{1}{2}}\frac{t+1}{2t}dt &= \int t^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t}\right) dt \\
&= \int t^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t}\right) dt \\
&= \int \left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right) dt \\
&= t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \,.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$y = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} + C}{t^{-\frac{1}{2}}} = t - 1 + Ct^{\frac{1}{2}} \,.$$

4. A solução para o PVI pode ser obtida usando a condição inicial $y(2)$=4. Temos

$$4 = y(2) = 2 - 1 + C\sqrt{2}.$$

Que dá $C = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Portanto, a solução é

$$y(t) = t - 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{t} \,.$$

y' +2xy = 0

Inicialmente, verifique que a EDO é linear.

Na seqüência identifique $p(x) = -2x$ e $q(x) = 0$.

O Fator Integrante é dado por

$$u(x) = e^{\int -2x dx} = e^{x^2}.$$

Desta forma, a solução geral é dada por.

$$y = \frac{c + \int u(x)q(x)dx}{u(x)} = \frac{c + \int e^{x^2}.0.dx}{e^{x^2}} = ce^{-x^2}$$

Portanto, a solução geral da EDO é: $y = ce^{-x^2}$

y' – 3y = 6

Inicialmente, verifique que a EDO é linear.

Na seqüência identifique $p(x) = -3$ e $q(x) = 6$.

O Fator Integrante é dado por

$$u(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x}.$$

Desta forma, a solução geral é dada por.

$$y = \frac{c + \int u(x)q(x)dx}{u(x)} = \frac{c + \int e^{-3x}.6.dx}{e^{-3x}} = ce^{3x} - 2$$

Portanto, a solução geral da EDO é: $y = ce^{3x} - 2$

y' + y = sen(x)

Inicialmente, verifique que a EDO é linear.

Na seqüência identifique $p(x) = 1$ e $q(x) = sen(x)$.

O Fator Integrante é dado por

$$u(x) = e^{\int dx} = e^{x}.$$

Desta forma, a solução geral é dada por.

$$y = \frac{c + \int u(x)q(x)dx}{u(x)} = \frac{c + \int e^{x}.sen(x).dx}{e^{x}} = ce^{-x} + \frac{1}{2}sen(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$$

Na solução da integral acima, usamos integração por parte duas vezes.

Portanto, a solução geral da EDO é: $y = ce^{-x} + \frac{1}{2}sen(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$