SEÇÃO 1.3

Equações Diferenciais como Modelos Matemáticos

• Modelo Matemático • Nível de Resolução • Dinâmica Populacional • Decaimento Radioativo e Datação por Carbono • Propagação de uma Doença • Lei de Newton do Esfriamento/Aquecimento • Misturas • Lei de Torricelli • Segunda Lei de Kirchhoff • Segunda Lei do Movimento de Newton • Amortecimento Viscoso • Sistema Dinâmico

Nesta seção, focalizaremos somente a construção de equações diferenciais como modelos matemáticos. Uma vez examinados alguns dos métodos de resolução de equações diferenciais nos Capítulos 2 e 4, retornaremos e resolveremos alguns desses modelos nos Capítulos 3 e 5.

Modelos Matemáticos É freqüentemente desejável descrever o comportamento de algum sistema ou fenômeno da vida real em termos matemáticos, quer sejam eles físicos, sociológicos ou mesmo econômicos. A descrição matemática de um sistema ou fenômeno, chamada de **modelo matemático**, é construída levando-se em consideração determinadas metas. Por exemplo, talvez queiramos compreender os mecanismos de um determinado ecossistema por meio do estudo do crescimento de populações de animais nesse sistema ou datar fósseis por meio da análise do decaimento radioativo de uma substância que esteja no fóssil ou no extrato no qual foi descoberta.

A construção de um modelo matemático de um sistema começa com

*(i) a identificação das variáveis responsáveis pela variação do sistema. Podemos a princípio optar por não incorporar todas essas variáveis no modelo. Nesta etapa, estamos especificando o **nível de resolução** do modelo.*

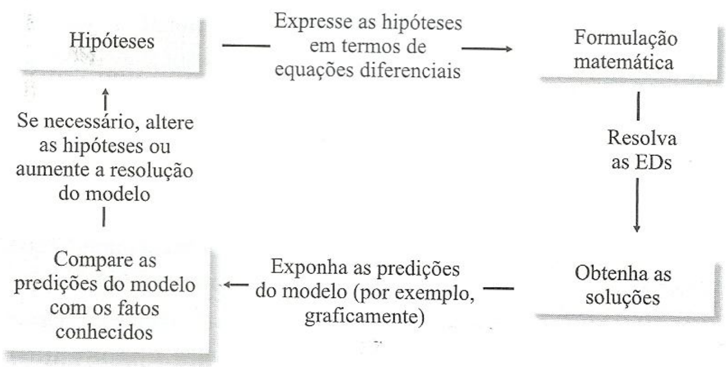
A seguir,

(ii) elaboramos um conjunto de hipóteses razoáveis ou pressuposições sobre o sistema que estamos tentando descrever. Essas hipóteses deverão incluir também quaisquer leis empíricas aplicáveis ao sistema.

Para alguns propósitos, pode ser perfeitamente razoável nos contentarmos com um modelo de baixa resolução. Por exemplo, você provavelmente já sabe que, nos cursos básicos de Física, a força retardadora do atrito com o ar é às vezes ignorada, na modelagem do movimento de um corpo em queda nas proximidades da superfície da Terra, mas se você for um cientista cujo trabalho é predizer precisamente o percurso de um projétil de longo alcance, terá de levar em conta a resistência do ar e outros fatores, como a curvatura da Terra.

Como as hipóteses sobre um sistema envolvem freqüentemente *uma taxa de variação* de uma ou mais das variáveis, a descrição matemática de todas essas hipóteses pode ser uma ou mais equações envolvendo *derivadas*. Em outras palavras, o modelo matemático pode ser uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais.

Depois de formular um modelo matemático, que é uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais, estaremos de frente para o problema nada insignificante de tentar resolvê-lo. *Se* pudermos resolvê-lo, julgaremos o modelo razoável se suas soluções forem consistentes com dados experimentais ou fatos conhecidos sobre o comportamento do sistema. Porém, se as predições obtidas pela solução forem pobres, poderemos elevar o nível de resolução do modelo ou levantar hipóteses alternativas sobre o mecanismo de mudança no sistema. As etapas do processo de modelagem são então repetidas, conforme disposto no seguinte diagrama:



Naturalmente, aumentando a resolução aumentaremos a complexidade do modelo matemático e, assim, a probabilidade de não conseguirmos obter uma solução explícita.

Um modelo matemático de um sistema físico freqüentemente envolve a variável tempo t. Uma solução do modelo oferece então o **estado do sistema**; em outras palavras, os valores da variável (ou variáveis) para valores apropriados de t descrevem o sistema no passado, presente e futuro.

Dinâmica Populacional Uma das primeiras tentativas de modelagem do **crescimento populacional** humano por meio da matemática foi feita pelo economista inglês Thomas Malthus, em 1798. Basicamente, a idéia por trás do modelo malthusiano é a hipótese de que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional* à população total do país naquele instante. Em outras palavras, quanto mais pessoas houver em um instante t, mais pessoas existirão no futuro. Em termos matemáticos, se $P(t)$ for a população total no instante t, então essa hipótese pode ser expressa por

$$\frac{dP}{dt} \propto P \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dt} = kP \qquad \textbf{(1)}$$

* Se duas quantidades u e v forem proporcionais, escrevemos u μ v. Isso significa que uma quantidade é um múltiplo constante da outra: u = kv.

onde k é uma constante de proporcionalidade. Esse modelo simples, embora não leve em conta muitos fatores que podem influenciar a população humana tanto em seu crescimento quanto em seu declínio (imigração e emigração, por exemplo), não obstante resulta ser razoavelmente preciso na previsão da população dos Estados Unidos entre os anos de 1790 e 1860. As populações que crescem à taxa descrita por (1) são raras; entretanto, (1) é ainda usada para modelar *o crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo* (crescimento de bactérias em uma placa de Petri, por exemplo).

Decaimento Radioativo O núcleo de um átomo consiste em combinações de prótons e nêutrons. Muitas dessas combinações são instáveis – isto é, os átomos decaem ou transmutam em átomos de outra substância. Esses núcleos são chamados de radioativos. Por exemplo, ao longo do tempo, o altamente radioativo elemento rádio, Ra–226, trasmuta-se no gás radônio radioativo, Rn-222. Para modelar o fenômeno de **decaimento radioativo**, supõe-se que a taxa de dA/dt segundo a qual o núcleo de uma substância decai é proporcional à quantidade (mais precisamente, ao número de núcleos) $A(t)$ de substância remanescente no instante t:

$$\frac{dA}{dt} \propto A \quad \text{ou} \quad \frac{dA}{dt} = kA. \tag{2}$$

Naturalmente, as equações (1) e (2) são exatamente iguais; a diferença reside apenas na interpretação dos símbolos e nas constantes de proporcionalidade. Para o crescimento, conforme esperamos em (1), $k > 0$, e para o decaimento, como em (2), $k < 0$.

O modelo (1) para o crescimento também pode ser visto como a equação $dS/dt = rS$, a qual descreve o crescimento do capital S quando uma taxa anual de juros r é composta continuamente. O modelo (2) para o decaimento também ocorre em aplicações biológicas, como a determinação da meia-vida de uma droga – o tempo necessário para que 50% de uma droga seja eliminada de um corpo por excreção ou metabolismo. Em química, o modelo de decaimento (2) aparece na descrição matemática de uma reação química de primeira ordem. A questão é que:

> *Uma única equação diferencial pode servir como um modelo matemático para vários fenômenos diferentes.*

Modelos matemáticos são freqüentemente acompanhados por determinadas condições laterais. Por exemplo, em (1) e (2), esperaríamos conhecer, por sua vez, a população inicial P_0 e a quantidade inicial de substância radioativa A_0. Se considerarmos $t = 0$ como instante inicial saberemos que $P(0) = P_0$ e $A(0) = A_0$. Em outras palavras, um modelo matemático pode consistir ou em um problema de valor inicial ou, como veremos posteriormente na Seção 5.2, em um problema de contorno.

Lei de Newton do Esfriamento/Aquecimento De acordo com a lei empírica de Newton do esfriamento/resfriamento, a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada temperatura ambiente. Se $T(t)$ representar a temperatura de um corpo no instante t, T_m a temperatura do meio que o rodeia e dT/dt a taxa segundo a qual a temperatura do corpo varia, a lei de Newton do esfriamento/resfriamento é convertida na sentença matemática

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{3}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Em ambos os casos, esfriamento ou aquecimento, se T_m for uma constante, é lógico que $k < 0$.

Disseminação de uma Doença Uma doença contagiosa – por exemplo, um vírus de gripe – espalha-se em uma comunidade por meio do contato entre as pessoas. Seja $x(t)$ o número de pessoas que contraíram a doença e $y(t)$ o número de pessoas que ainda não foram expostas. É razoável supor que a taxa dx/dt segundo a qual a doença se espalha seja proporcional ao número de encontros ou *interações* entre esses dois grupos de pessoas. Se supusermos que o número de interações é conjuntamente proporcional a $x(t)$ e a $y(t)$ – isto é, proporcional ao produto xy – então

$$\frac{dx}{dt} = kxy, \tag{4}$$

onde k é a constante de proporcionalidade usual. Suponha que uma pequena comunidade tenha uma população fixa de n pessoas. Se uma pessoa infectada for introduzida na comunidade, pode-se argumentar que $x(t)$ e $y(t)$ estão relacionados por $x + y = n + 1$. Usando essa última equação para eliminar y em (4), obtemos o modelo

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x). \tag{5}$$

Uma condição inicial óbvia que acompanha a equação (5) é $x(0) = 1$.

Reações Químicas A desintegração de uma substância radioativa, governada pela equação diferencial (1), é chamada de **reação de primeira ordem**. Em química, algumas reações seguem essa mesma lei empírica: se as moléculas da substância A decompuserem-se em moléculas menores, é natural a hipótese de que a taxa segundo a qual essa decomposição se dá é proporcional à quantidade da primeira substância ainda não convertida; isto é, se $X(t)$ for a quantidade de substância A remanescente em qualquer instante, $dX/dt = kX$, onde k é uma constante negativa, já que X é decrescente. Um exemplo de reação química de primeira ordem é a conversão de *t*-cloreto butílico, $(CH_3)_3CCl$, em *t*-álcool butílico, $(CH_3)_3COH$:

$$(CH_3)_3CCl + NaOH \rightarrow (CH_3)_3COH + NaCl.$$

Somente a concentração do *t*-cloreto butílico controla a taxa de reação. Mas na reação

$$CH_3Cl + NaOH \rightarrow CH_3OH + NaCl$$

uma molécula de hidróxido de sódio, NaOH, é consumida para cada molécula de cloreto metílico, CH_3Cl, formando, assim, uma molécula de álcool metílico, CH_3OH, e uma molécula de cloreto de sódio, NaCl. Nesse caso, a taxa segundo a qual a reação se processa é proporcional ao produto das concentrações remanescentes de CH_3Cl e NaOH. Para

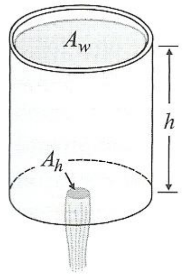


Figura 1.17

– isto é, $v = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração devida à gravidade. Essa última expressão origina-se de igualar a energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$ com a energia potencial mgh e resolver para v. Suponha que um tanque cheio com água seja drenado por meio de um buraco sob a influência da gravidade. Gostaríamos de encontrar a altura h de água remanescente no tanque no instante t. Considere o tanque mostrado na Figura 1.17. Se a área do buraco for A_h (em pés quadrados) e a velocidade de saída da água do tanque for $v = \sqrt{2gh}$ (em pés/s), o volume de saída de água do tanque por segundo é $A_h\sqrt{2gh}$ (em pés cúbicos/s). Assim, se $V(t)$ denotar o volume de água no tanque no instante t,

$$\frac{dV}{dt} = -A_h\sqrt{2gh}, \tag{9}$$

onde o sinal de subtração indica que V está decrescendo. Observe aqui que estamos ignorando a possibilidade de atrito no buraco que possa causar uma redução na taxa de fluxo. Agora, se o tanque for tal que o volume de água em qualquer instante t possa ser escrito como $V(t) = A_w h$, onde A_w (em pés quadrados) é a área *constante* da superfície superior de água (veja a Figura 1.17), então $dV/dt = A_w\, dh/dt$. Substituindo essa última expressão em (9), obtemos a equação diferencial desejada para a altura de água no instante t:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}. \tag{10}$$

É interessante notar que (10) permanece válida mesmo quando A_w não for constante. Nesse caso, devemos expressar a superfície superior da água como uma função de h – isto é, $A_w = A(h)$. Veja o Problema 12 nos Exercícios 1.3.

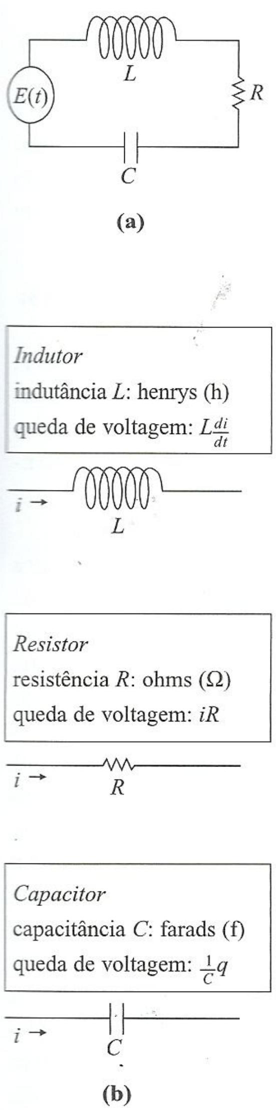


Figura 1.18

Circuito em Série Considere o circuito em série de malha simples mostrado na Figura 1.18(a), contendo um indutor, resistor e capacitor. A corrente no circuito depois que a chave é fechada é denotada por $i(t)$; a carga em um capacitor no instante t é denotada por $q(t)$. As letras L, C e R são conhecidas como indutância, capacitância e resistência, respectivamente, e em geral são constantes. Agora, de acordo com a **segunda lei de Kirchhoff**, a voltagem aplicada $E(t)$ em uma malha fechada deve ser igual à soma das quedas de voltagem na malha. A Figura 1.18(b) mostra os símbolos e as fórmulas para a respectiva queda de voltagem em um indutor, um capacitor e um resistor. Uma vez que a corrente $i(t)$ está relacionada com a carga $q(t)$ no capacitor por $i = dq/dt$, adicionando-se as três quedas de voltagem

$$\overset{\text{indutor}}{L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}}, \quad \overset{\text{resistor}}{iR = R\frac{dq}{dt}} \quad \text{e} \quad \overset{\text{capacitor}}{\frac{1}{C}q}$$

e equacionando-se a soma das voltagens aplicadas, obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{11}$$

Examinaremos detalhadamente uma equação diferencial análoga a (11) na Seção 5.1.

Corpos em Queda Para construir um modelo matemático do movimento de um corpo em um campo de força, em geral iniciamos com a segunda lei do movimento de Newton.

EXERCÍCIOS 1.3

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-1.

Dinâmica Populacional

1. Sob as mesmas hipóteses subjacentes ao modelo em (1), determine a equação diferencial que governa o crescimento populacional $P(t)$ de um país quando os indivíduos têm autorização para imigrar a uma taxa constante r. Qual é a equação diferencial quando os indivíduos têm autorização para emigrar a uma taxa constante r?

2. O modelo dado em (1) não leva em conta a mortalidade; a taxa de crescimento é igual à taxa de natalidade. Em um outro modelo de variação populacional de uma comunidade supõe-se que a taxa segundo a qual a população varia é uma taxa *líquida* – isto é, a

diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade na comunidade. Determine uma equação diferencial que governe a evolução da população $P(t)$, se as taxas de natalidade e mortalidade forem ambas proporcionais à população presente no instante t.

3. Usando o conceito de taxa líquida introduzido no Problema 2, determine uma equação diferencial que governe a evolução da população $P(t)$, se a taxa de natalidade for proporcional à população presente no instante t, mas a de mortalidade for proporcional ao quadrado da população presente no instante t.

4. O número de ratos do campo em uma determinada pastagem é dado pela função $200 - 10t$, onde t é medido em anos. Determine uma equação diferencial que governe uma população de corujas que se alimentam de ratos, se a taxa segundo a qual cresce a população de corujas for proporcional à diferença entre o número de corujas e o número de ratos do campo no mesmo instante t.

Lei de Newton do Esfriamento/Aquecimento

5. Uma xícara de café esfria de acordo com a lei do esfriamento de Newton (3). Use os dados do gráfico de temperatura $T(t)$ da Figura 1.23 para estimar as constantes T_m, T_0 e k em um modelo da forma de um problema de valor inicial de primeira ordem: $dT/dt = k(T - T_m)$, $T(0) = T_0$.

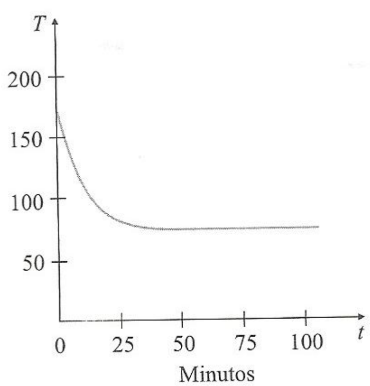


Figura 1.23

6. A temperatura ambiente T_m em (3) pode ser uma função do tempo t. Suponha que em um ambiente artificialmente controlado, $T_m(t)$ é periódica com um período de 24 horas, conforme ilustrado na Figura 1.24. Construa um modelo matemático para a temperatura $T(t)$ de um corpo dentro desse ambiente.

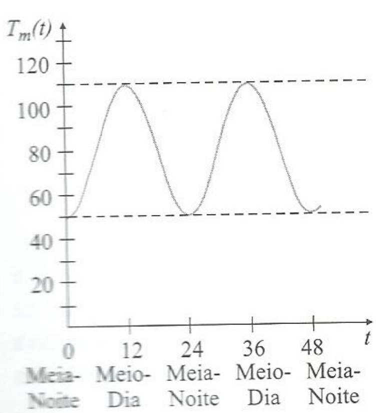


Figura 1.24

Propagação de uma Doença ou de uma Tecnologia

7. Suponha que um estudante portador de um vírus da gripe retorne para um *campus* universitário fechado com mil estudantes. Determine a equação diferencial que descreve o número de pessoas $x(t)$ que contrairão a gripe, se a taxa segundo a qual a doença se espalha for proporcional ao número de interações entre os estudantes gripados e os estudantes que ainda não foram expostos ao vírus.

8. No momento $t = 0$ uma inovação tecnológica é introduzida em uma comunidade com uma população fixa de n indivíduos. Determine a equação diferencial que descreve o número de pessoas $x(t)$ que adotaram a inovação no instante t, se for suposto que a taxa segundo a qual a inovação se espalha na comunidade é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que adotaram e ao número de pessoas que não a adotaram.

Misturas

9. Suponha que um grande tanque para misturas contenha inicialmente 300 galões de água, no qual foram dissolvidas 50 libras de sal. Água pura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 gal/min, e então, quando a solução está bem misturada, ela é bombeada para fora segundo a mesma taxa. Determine uma equação diferencial para a quantidade de sal $A(t)$ no tanque no instante t.

10. Suponha que um grande tanque para misturas contenha inicialmente 300 galões de água, no qual foram dissolvidas 50 libras de sal. Uma outra solução de sal é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 gal/min, e então, quando a solução está bem misturada, é bombeada para fora a uma taxa menor de 2 gal/min. Se a concentração da solução que entra for de 2 lb/gal, determine uma equação diferencial para a quantidade de sal $A(t)$ no tanque, no instante t.

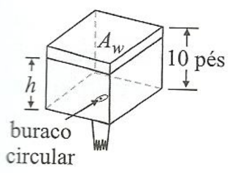


Figura 1.25

Drenando um Tanque

11. Suponha que a água está saindo de um tanque por um buraco circular em sua base de área A_h. Quando a água vaza pelo buraco, o atrito e a contração da corrente de água nas proximidades do buraco reduzem o volume de água que está vazando do tanque por segundo para $cA_h \sqrt{2gh}$, onde c $(0 < c < 1)$ é uma constante empírica. Determine uma equação diferencial para a altura h de água no instante t para um tanque cúbico, como na Figura 1.25. O raio do buraco é 2 pol. e $g = 32$ pés/s^2.

12. Um tanque com formato de cone circular reto é mostrado na Figura 1.26. Dele vaza água por um buraco circular na base. Determine uma equação diferencial para a altura h de água no instante t. O raio do buraco é 2 pol., $g = 32$ pés/s^2 e o fator atrito/contração introduzido no Problema 11 é $c = 0{,}6$.

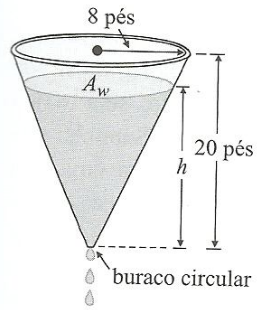


Figura 1.26

Circuitos em Série

13. Um circuito em série contém um resistor e um indutor conforme a Figura 1.27. Determine uma equação diferencial para a corrente $i(t)$ se a resistência for R, a indutância for L e a voltagem aplicada for $E(t)$.

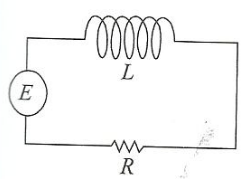


Figura 1.27

14. Um circuito em série contém um resistor e um capacitor conforme a Figura 1.28. Determine uma equação diferencial para a carga $q(t)$ no capacitor, se a resistência for R, a capacitância for C e a voltagem aplicada for $E(t)$.

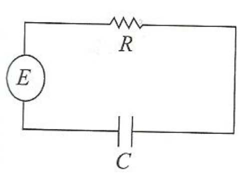


Figura 1.28

Corpos em Queda e Resistência do Ar

15. Para um movimento em alta velocidade no ar – tal como o *pára-quedista* mostrado, na Figura 1.29, caindo antes de abrir o pára-quedas –, a resistência do ar está próxima de uma potência da velocidade instantânea. Determine uma equação diferencial para a velocidade $v(t)$ de um corpo em queda com massa m, se a resistência do ar for proporcional ao quadrado de sua velocidade instantânea.

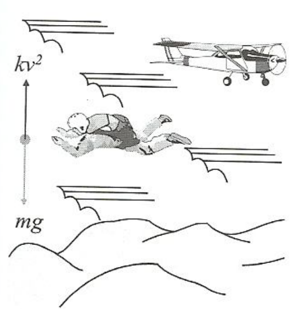


Figura 1.29

Segunda Lei de Newton e Princípio de Arquimedes

16. Um barril cilíndrico de s pés de diâmetro e w libras de peso está flutuando na água. Depois de afundado, o barril movimenta-se para cima e para baixo ao longo de uma reta vertical. Usando a Figura

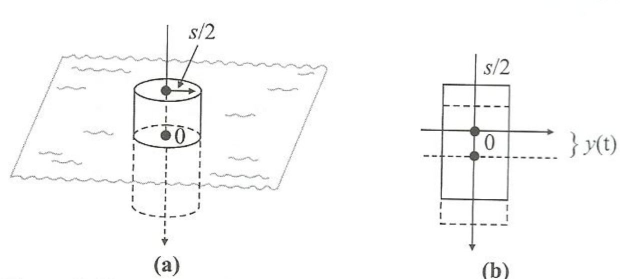


Figura 1.30

EXERCÍCIOS 2.2

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-1.

Nos Problemas 1 a 22, resolva, por separação de variáveis, as equações diferenciais dadas.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$
2. $\dfrac{dy}{dx} = (x+1)^2$
3. $dx + e^{3x}\, dy = 0$
4. $dy - (y-1)^2\, dx = 0$
5. $x\dfrac{dy}{dx} = 4y$
6. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
8. $e^x y \dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
9. $y \ln x \dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$
10. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$
11. $\sec^2 x\, dy + \csc y\, dx = 0$
12. $\operatorname{sen} 3x\, dx + 2y \cos^3 3x\, dy = 0$
13. $(e^y + 1)^2 e^{-y}\, dx + (e^x + 1)^3 e^{-x}\, dy = 0$
14. $y\, dy = x(1+x^2)^{-1/2}(1+y^2)^{1/2}\, dx$

EXERCÍCIOS 2.3

As respostas aos problemas ímpares começam na página RESP-1.

Nos Problemas 1 a 24, ache a solução geral da equação diferencial dada. Dê o maior intervalo sobre o qual a solução geral está definida. Determine se há termos transientes na solução geral.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 5y$
2. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$
4. $3\dfrac{dy}{dx} + 12y = 4$
5. $y' + 3x^2 y = x^2$
6. $y' + 2xy = x^3$
7. $x^2 y' + xy = 1$
8. $y' = 2y + x^2 + 5$
9. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$
10. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$
11. $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$
12. $(1+x)\dfrac{dy}{dx} - xy = x + x^2$
13. $x^2 y' + x(x+2)y = e^x$
14. $xy' + (1+x)y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$
15. $y\, dx - 4(x + y^6)\, dy = 0$
16. $y\, dx = (ye^y - 2x)\, dy$
17. $\cos x \dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)\, y = 1$
18. $\cos^2 x \operatorname{sen} x\, dy + (y \cos^3 x - 1)\, dx = 0$