X SEMANA DA Matemática

UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI
CAMPUS AVANÇADO DE CAMPOS SALES
CURSO DE MATEMÁTICA

ALGUMAS RELAÇÕES ENTRE A MATEMÁTICA FINANCEIRA E AS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Iza Silva Campos[1]
João Paulo de Araújo Souza[2]
Peter Ramazi Campos Pereira[3]
William de Souza Santos[4]

RESUMO

O principal objetivo da educação financeira é tornar o indivíduo consciente para todas as decisões que envolvam dinheiro. Para tanto, a matemática financeira assume um papel de suma importância neste cenário, na criação de modelos que permitem prever situações hipotéticas e, com isso, escolher a melhor opção entre as possibilidades apresentadas. Através de uma abordagem qualitativa e procedimentos de pesquisa bibliográfica, este artigo tem como objetivo apresentar temas da matemática financeira relacionando-os com as propriedades das progressões geométricas, como forma de fornecer um material de apoio e subsidiar a prática pedagógica dos professores de matemática e de facilitar a resolução de problemas relacionados a investimentos financeiros. Para justificar os resultados encontrados, fez-se necessário relacionar os problemas da matemática financeira apresentados no texto com alguns conteúdos da matemática básica, mostrando uma relação entre esse conteúdos que aparentam não ter ligação entre si.

Palavras-chave: Educação Financeira. Matemática Financeira. Progressão Geométrica. Série de pagamentos.

1. Introdução

A educação financeira tem como um dos seus principais objetivos, contribuir para melhoria organizacional e planejamento em geral, ajudando as pessoas a desenvolverem e melhorarem suas habilidades financeiras para gerenciar suas finanças e tomarem decisões mais conscientes em relação ao seu dinheiro no futuro.

Porém, no cenário da educação brasileira, como cita Siqueira e Duarte (2022), a educação financeira ainda não é realidade nas salas de aula brasileiras, pois, apesar de ser obrigatória por lei no Ensino Fundamental desde 2017, ainda observa-se uma baixa adesão deste conteúdo nas escolas. Segundo este estudo, que apresenta os dados da Associação de Educação Financeira do Brasil (AEF Brasil), nas regiões Centro-Oeste e Nordeste, respectivamente, apenas 7% e 8% das escolas do país trabalham o conteúdo, enquanto na Região Norte as atividades de seus colégios representam 33% do total nacional, o Sul com 32% e o Sudeste, com 20%.

Tal fato, demonstra primeiramente a necessidade de capacitar os professores para abordarem tal temática em suas aulas, bem como a preparação de materiais que possam subsidiar os

[1]Especialista em Ensino de Matemática e Física, e-mail: izacampos2013@gmail.com
[2]Mestre em Matemática, e-mail: paulo.souza@ifpb.edu.br
[3]Licenciando em Matemática, e-mail: peter.ramazi@urca.br
[4]Doutor em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial, e-mail: william.souza@ifpb.edu.br

professores em suas práticas pedagógicas. É nesta lacuna que surge este trabalho, que tem por intuito fornecer um material de apoio para professores de matemática, em especial nas temáticas que envolvem matemática financeira e progressões geométricas. Mesmo que o público alvo seja professores e futuros professores de matemática, não desejamos excluir como possíveis leitores aqueles que desejem gerenciar melhor suas finanças.

Numa tentativa de fundamentar as propriedades apresentadas no texto, é apresentada uma ligação entre conteúdos da matemática básica como, por exemplo, as sequências, em especial, as progressões geométricas. Pois, assim, podemos relacionar conteúdos que aparentemente eram desconexos até então.

2. Objetivo

Apresentar alguns temas da Matemática Financeira (valor presente e o valor futuro de uma série de pagamentos ou recebimento), abordando suas relações com as sequências numéricas, em especial, as propriedades das progressões geométricas.

3. Metodologia

Este texto adota uma abordagem qualitativa (GIL et al., 2002), tendo como procedimento metodológico uma pesquisa bibliográfica. Segundo Severino (2013), esse tipo de procedimento se caracteriza por investigar o registro disponível sobre tal tema, que decorre de pesquisas já realizadas, em livros, artigos, monografias, dissertações e teses, dentre outros arquivos.

Como base principal de pesquisa foram utilizadas as produções de (ASSAF NETO, 2021) e (SAMANEZ, 2010), que abordam algumas propriedades da Matemática Financeira e os métodos de cálculo do valor presente e o valor futuro de uma série de pagamentos.

Além disso, como deseja-se apresentar e analisar as ideias que se baseiam cada princípio apresentado, optou-se em ser utilizada uma pesquisa explicativa, que segundo Severino:

> A pesquisa explicativa é aquela que, além de registrar e analisar os fenômenos estudados, busca identificar suas causas, seja através da aplicação do método experimental/matemático, seja através da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos. (SEVERINO, 2013, p. 107).

4. Resultados

Nesta seção, iremos estudar como podemos determinar quanto será acumulado ao fazer um investimento que rende uma certa porcentagem a cada período dado e quanto devemos investir hoje para poder sacar uma certa quantia periodicamente durante uma período dado, sendo o saldo final igual a zero unidades monetárias. Numa tentativa de embasar algumas fórmulas que apareceram naturalmente no texto, temos uma propriedade sobre a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (PG).

Definição 1 (Progressões geométricas (PG)). *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita uma progressão geométrica de razão q se $x_n = q \cdot x_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil mostrar que, fixando x_1 e q, tem-se*

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}.$$

Um exemplo de PG é dado por $(1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}, \ldots)$. Em que o primeiro termo é $x_1 = 1$ e a razão é dada por $q = 2$. É interessante citar que essa sequência recebe esse nome por seus termos estarem ligados à média geométrica. Pode-se provar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PG de termos positivos se, e somente se,

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}.$$

Agora podemos anunciar e demonstrar a propriedade relacionada à soma dos n primeiros termos de uma PG.

Proposição 1. *Se x_n é o $n-$ésimo termo de uma PG cujo primeiro termo é x_1 e tem razão $q \neq 1$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Demonstração. Como $q \neq 1$ e pondo $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$, temos

$$\begin{aligned} q \cdot s_n &= q(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n) \\ &= x_2 + x_3 + \cdots + x_n + q \cdot x_n \\ &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + q \cdot x_n - x_1 \\ &= s_n + (q \cdot x_n - x_1) \\ &= s_n + (q \cdot x_1 q^{n-1} - x_1) \end{aligned}$$

Ou seja, $q \cdot s_n - s_n = x_1 q^n - x_1 = x_1(q^n - 1)$. Logo,

$$s_n(q-1) = x_1(q^n - 1) \Rightarrow s_n = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

■

Agora iremos tratar de algumas informações acerca da matemática financeira, que serão de grande utilidade para alcançar o objetivo proposto.

Quando o nosso objetivo é constituir um capital em uma data futura temos um processo de capitalização. Caso contrário, quando queremos pagar uma dívida, temos um processo de amortização. Pode ocorrer também o caso em que tenhamos pagamento pelo uso sem que tenhamos amortização: é o caso dos aluguéis.

Definição 2. *Chamamos de rendas, de série de pagamentos ou recebimentos, série de prestações ou anuidades a toda sequência finita ou infinita de pagamentos ou recebimentos em datas previamente estipuladas.*

(1) Cada um destes pagamentos ou recebimentos, referidos a uma mesma taxa de juros compostos, será chamado de termo da série de pagamentos.

(2) O intervalo de tempo entre dois termos chama-se período e a soma dos períodos define a duração da série de pagamentos.

Vale salientar que o regime de capitalização adotado no trabalho será sempre o de capitalização composta, ou seja, juros compostos, onde os juros incidem sobre o saldo devedor referente ao período imediatamente anterior e não apenas sobre o capital inicial (como acontece no regime de juros simples).

No regime de juros compostos, ao aplicar um capital inicial (PV), a uma taxa de juros (i) em um período em que ocorreram n capitalizações, temos que o valor futuro (FV), ou montante, será dado por

$$FV = PV(1+i)^n.$$

Para demonstrar essa fórmula, pode-se fazer uso do Princípio de Indução Finita ou verificar que o valor futuro de um capital, no regime de juros compostos, forma uma progressão geométrica e, assim, utilizar a fórmula para o $n-$ésimo termo de uma PG. Quanto ao processo utilizando a PG, basta tomar FV_n como sendo o valor futuro após a $n-$ésima capitalização e mostrar que para todo número natural n vale $FV_n/FV_{n-1} = 1 + i$ que, por sua vez, é uma constante.

Ainda de posse das propriedades de uma PG e da fórmula para o FV_n, pode-se mostrar que

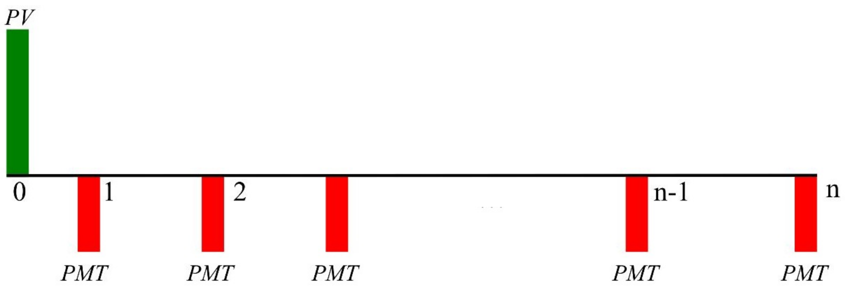
$$FV_n = FV_{n-k}(1+i)^k \text{ ou } FV_{n-k} = \frac{FV_n}{(1+i)^k} \tag{1}$$

que podem ser entendidas como: para avançar ou retroceder k capitalizações, basta multiplicar ou duvidir, respectivamente, pelo fator de atualização $(1 + i)^k$.

Para determinar o valor presente de uma série de parcelas, basta determinar o valor real de cada prestação na data zero (início da operação). Considerando uma série de pagamentos em que as parcelas são constantes e iguais a PMT. Pondo PMT_n como sendo o valor da $n-$ésima prestação na data zero, pela Equação 1, temos que

$$PMT_k = \frac{PMT}{(1+i)^k}.$$

Figura 1: Linha temporal



Fonte: autoria própria.

Com isso e por PMT_k ser uma PG de razão $(1 + i)^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} PV &= \sum_{k=1}^{n} PMT_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{PMT}{(1+i)^k} \\ &= \frac{PMT}{1+i} \cdot \frac{[(1+i)^{-1}]^n - 1}{(1+i)^{-1} - 1} \\ &= PMT \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

Na literatura é assumido que $a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Lê-se, *a n* cantoneira *i*. Também é conhecido como fator de valor presente. Assim, podemos representar o valor presente de uma série de pagamentos por

$$PV = a_{n\rceil i} \cdot PMT.$$

Com uma leitura mais atenta, pode-se observar que $a_{n\rceil i}$ representa quantas parcelas são efetivamente necessárias para poder retirar n parcelas sucessivas, uma parcela a cada período de capitalização. Uma aplicação interessante dessa propriedade é o problema a seguir, que seria bem difícil de encontrar a solução sem a fórmula de $a_{n\rceil i}$.

Problema 1. *Quanto devo aplicar hoje na poupança, que rende* $0,5\%$ *ao mês, para poder sacar mensalmente, a partir do final do primeiro mês, uma quantia de R\$* $100,00$ *durante o período de uma ano?*

Solução. Inicialmente devemos observar que $n = 12$ meses, $i = 0,5\%$ ao mês e $PMT = 100$ reais. Logo,

$$a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+0,005)^{-12}}{0,005} \approx 11,6289 \Rightarrow PV \approx 11,6289 \cdot 100 = 1162,89$$

ou seja, o valor depositado hoje (PV) deve ser, aproximadamente, R\$ $1.162,89$.

$\Diamond$

A seguir apresentaremos uma situação problema mais bem elaborada, mas que também pode ser entendida como uma situação do cotidiano de qualquer pessoa.

Problema 2. *Alisson Gomes fez um financiamento em* 24 *parcelas mensais de R\$* $1.000,00$ *à taxa de juros de* 4% *ao mês. Após pagar a quinta parcela, ele decidiu adiantar o pagamento das parcelas restantes. Quanto Alisson deve pagar pelas parcelas que foram adiantadas?*

Solução. Inicialmente devemos observar que $n = 24 - 5 = 19$ meses, $i = 4\%$ ao mês e $PMT = 1000$ reais. Logo,

$$a_{n\rceil i} = \frac{1-1,04^{-19}}{0,04} \approx 13,13 \Rightarrow PV = a_{n\rceil i} \cdot PMT \approx 13,13 \cdot 1000 = 13130$$

ou seja, os R\$ $19.000,00$ referentes as 19 prestações, serão pagos com apenas R\$ $13.130,00$.

$\Diamond$

Esses dois problemas exemplificam muito bem algumas aplicações para a fórmula do valor presente de uma renda e, com eles, encerramos essa parte.

Quanto ao caso de saber o valor acumulado, devemos ter em mente que o montante é dado por $FV = PV(1+i)^n$. Como sabemos que o valor presente é dado por $PV = a_{n\rceil i} \cdot PMT$, nos resta que $FV = [a_{n\rceil i}(1+i)^n] \cdot PMT$. Além disso, temos

$$a_{n\rceil i}(1+i)^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

esse, por sua vez, é o fator de valor futuro ou fator de acumulação de uma série de pagamentos. Denota-se por $s_{n\rceil i} = a_{n\rceil i}(1+i)^n$ ou, simplesmente, $s_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$. Com isso, o valor futuro é dado por

$$FV = s_{n\rceil i} \cdot PMT$$

Assim como aconteceu com o $a_{n\rceil i}$, podemos relacionar o $s_{n\rceil i}$ com a quantidade de parcelas. De certa forma, podemos entender que $s_{n\rceil i}$ representa a real quantidade de parcelas que teremos acumulado após investir parcelas constantes em uma operação que rende a juros compostos a cada período de capitalização.

Problema 3. *Peter irá aplicar R\$* $100,00$ *ao final de cada mês, durante* 24 *meses, em um investimento que rende* 2% *ao mês. A quantas parcelas de R\$* $100,00$ *equivalem as aplicações mensais realizados por ele durante os* 24 *meses e quanto ele acumulou nesse período com tal aplicação?*

Solução. De início, poderíamos, erroneamente, imaginar que seriam equivalentes a 24, já que essa foi a quantidade de aplicações realizadas. Como $s_{n\rceil i}$ representa a quantidade real de parcelas acumuladas (considerando os juros acumulados), temos

$$s_{n\rceil i} = \frac{1,02^{24} - 1}{0,02} \approx 30,42$$

ou seja, ao aplicar 24 parcelas como no enunciado, ele terá 30 parcelas e 42% de uma outra. Quanto ao acumulado, basta fazer $FV = s_{n\rceil i} \cdot PMT \approx 30,42 \cdot 100 = 3042$. Nos dando, que serão acumulados R\$ 3.042,00 aproximadamente.

$\lozenge$

Podemos considerar a situação com relação à poupança comum que rende em média 0,5% ao mês.

Problema 4. *William irá depositar mensalmente R\$ 100,00 em uma poupança de um banco até que a quantia acumulada chegue a R\$5.000,00. Sabendo que tal poupança rende, em média, 0,5% ao mês, quantas parcelas, aproximadamente, ele deverá depositar?*

Solução. Esse problema consiste basicamente em determinar o valor de n para o qual teremos $s_{n\rceil i} = 50$ quando $i = 0,5\%$. Assim

$$s_{n\rceil i} = 50 \Rightarrow \frac{1,005^n - 1}{0,005} = 50 \Rightarrow n \approx 44,74$$

ou seja, serão necessárias 45 parcelas para que o saldo acumulado exceda os R\$ 5.000,00 desejados.

$\lozenge$

5. Considerações Finais

Podemos afirmar que ninguém está livre de taxas e tributos, diariamente parcelas de dívidas são pagas, empréstimos são concedidos e investimentos são computados, entender como esses fluxos de movimento monetário funcionam é essencial para uma consolidação social ativa, entendemos que esse conhecimento é recebido de forma dialética, geralmente pela troca mutualística entre professor e aluno ou alguém com o conhecimento e quem admite recebe-lo.

Dito isso, inicialmente nos propomos a elucidar algumas relações acerca das séries de pagamento e as progressões geométricas dadas suas aplicações corriqueiras. No decorrer do texto, esperamos ter tornado tátil o entendimento após demonstrar sucintamente as ideias centrais acerca de cada tópico e ao indicar os pontos altos dessas relações por meio dos questionamentos apresentados no início da seção 4. Podemos concluir com o término desse trabalho que, por mais que os conteúdos sejam aplicados em sala e recebendo todo o rigor docente necessário, cabe salientar a existência dessas relações entre conteúdos que tornam ao revisitar o assunto, menos maçante desde que sejam esclarecidos previamente.

Esperamos ter alcançado os objetivos ao apresentar os conceitos da matemática financeira necessários para a fundamentação proposta quanto aos valores presentes e futuros de uma série de pagamentos. Além disso, apresentamos de uma maneira clara e objetiva a relação entre as séries de pagamentos e aplicações em investimentos.

Finalizamos com uma citação que muito textos atribuem[5] ao educador Paulo Freire: "A teoria sem a prática vira 'verbalismo', assim como a prática sem teoria vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade."

[5] Não encontramos esse trecho nos livros indicados como referência (foi indicada como presente em mais de um livro), mas isso não tira o valor da frase e, por isso, decidimos mantê-la.

Referências

ASSAF NETO, A. **Matemática Financeira e suas aplicações**. 14a. ed. São Paulo: Atlas, 2021.

GIL, A. C. et al. **Como elaborar projetos de pesquisa**. [S.l.]: Atlas São Paulo, 2002. v. 4.

SAMANEZ, C. P. **Matemática Financeira**. 5a. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico [livro eletrônico]**. 1a. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

SIQUEIRA, F.; DUARTE, I. **Educação Financeira ainda não é realidade nas salas de aula brasileiras**. Disponível em: https://infograficos.estadao.com.br/focas/por-minha-conta/materia/educacao-financeira-ainda-nao-e-realidade-nas-salas-de-aula-brasileiras. Acesso em: 19 nov. 2022. São Paulo: Estadão, 2022.