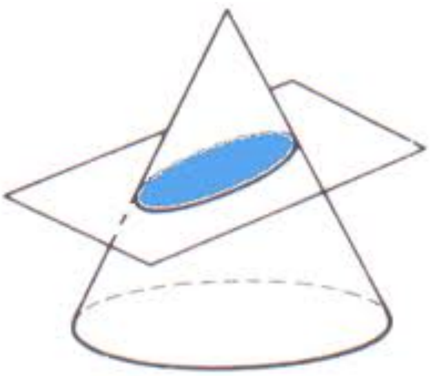
A ELIPSE

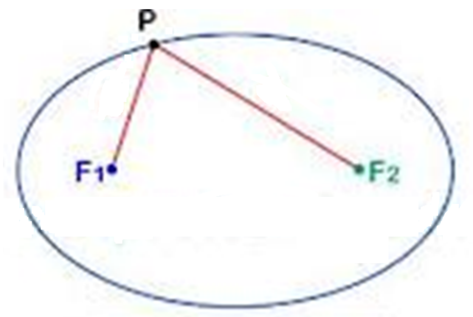
Disciplina: Geometria Analítica



DEFINIÇÃO

Uma Elipse é o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de maneira que a soma de suas distâncias dois pontos fixos é sempre igual a uma constante maior do que a distância entre os dois pontos fixos.

Charles H. Lehmann

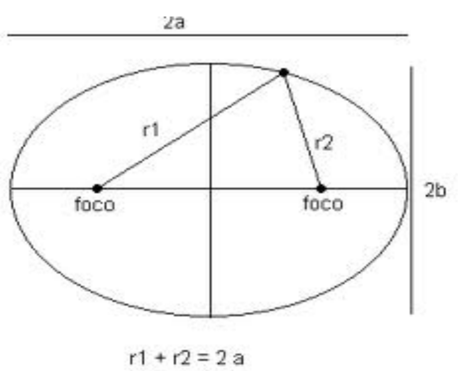


A ELIPSE

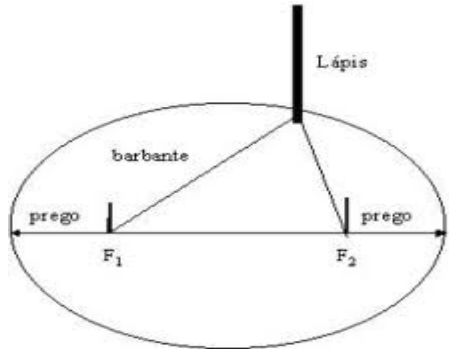
Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1,F_2) = 2c$, e um número real positivo a com $2a > 2c$.

Um ponto P pertence à elipse se, e somente se:

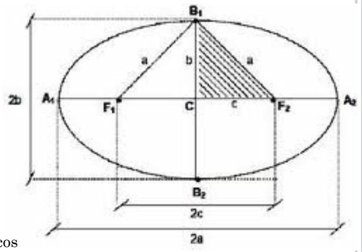
$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$



A CONSTRUÇÃO



ELEMENTOS



- F1 e F2 → são os focos
- C → Centro da elipse
- 2c → distância focal
- 2a → medida do eixo maior
- 2b → medida do eixo menor
- c/a → excentricidade

$$a^2 = b^2 + c^2$$

EQUAÇÃO REDUZIDA

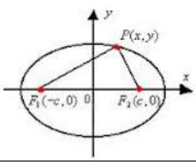
Seja a elipse de centro C(0,0). Consideremos dois casos:

1º) O Eixo maior está sobre o eixo dos x

Seja P(x,y) um ponto qualquer de uma elipse de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$.

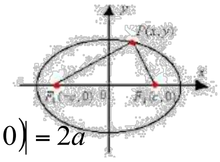
Pela Definição, temos:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$



EQUAÇÃO REDUZIDA

ou então



$$\left|\overrightarrow{PF_1}\right| + \left|\overrightarrow{PF_2}\right| = 2a$$

$$|(x+c, y-0)| + |(x-c, y-0)| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

Arrumando a equação, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

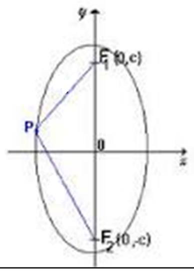
EQUAÇÃO REDUZIDA

2º) O Eixo maior está sobre o eixo dos y

Observando a figura e procedendo de maneira análoga ao 1º caso, temos:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

essa é a ***equação reduzida*** para esse caso.



OBSERVAÇÃO

Como em toda elipse a > b (ou $a^2 > b^2$), para sabermos se a elipse tem seu eixo maior sobre OX ou OY basta observarmos onde está o maior denominador – a^2. Se for o denominador de x^2 então o eixo maior é sobre OX de for de y^2 então é sobre OY.

Exemplo: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Excentricidade

Excentricidade da elipse é o número real

$$e = \frac{c}{a}$$

A excentricidade é responsável pela forma da elipse:

$e = 0$ $e = 1$

1 – Determine a excentricidade da elipse de equação $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

SOLUÇÃO: Temos: $16x^2 + 25y^2 = 400$. Observe que a equação da elipse não está na forma reduzida. Vamos dividir ambos os membro por 400. Fica então:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Portanto, $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$. Daí, vem: $a = 5$ e $b = 4$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, vem substituindo e efetuando, que $c = 3$

Portanto a excentricidade e será igual a : $e = c/a = 3/5 = 0,60$

Resposta: 3/5 ou 0,60.

2 – CESCEA 1969 – Determine as coordenadas dos focos da elipse de equação $9x^2 + 25y^2 = 225$.

SOLUÇÃO: dividindo ambos os membros por 225, vem:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Daí, vem que: $a^2=25$ e $b^2=9$, de onde deduzimos: $a = 5$ e $b = 3$.

Portanto, como $a^2 = b^2 + c^2$, vem que $c = 4$.

Portanto, as coordenadas dos focos são: $F_1(4,0)$ e $F_2(-4,0)$.

3 – Determine a distancia focal da elipse $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

SOLUÇÃO: a elipse é a do problema anterior. Portanto a distancia focal ou seja, a distancia entre os focos da elipse será:
D = 4 - (- 4) = 8 u.c (u.c. = unidades de comprimento).

4 – Calcular a distancia focal e a excentricidade da elipse $25x^2 + 169y^2 = 4225$.
Resposta: e = 12/13 e $d_f = 2c = 24$.

5 – Determinar a equação da elipse com centro na origem, que passa pelo ponto P(1,1) e tem um foco F(-Ö 6 /2, 0).
Resposta: $x^2 + 2y^2 = 3$.