Integrais Definidas

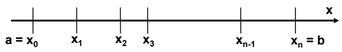
Áreas entre Curvas

Integral Definida

I - Coisas que você precisa saber:

1. Pode-se expressar a soma $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ *como:* $\sum_{i=1}^{n} x_i$

2. Considere um intervalo [a,b] e sejam $a = x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n = b$ *pontos desse intervalo.*



O conjunto P dos subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

é chamado uma partição do intervalo $[a,b]$

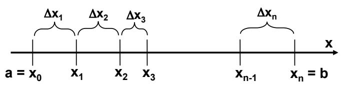
Observe que o comprimento de cada um desses subintervalos é dado por:

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x_2$$

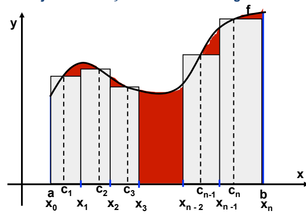
$$x_3 - x_2 = \Delta x_3$$

$$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$$



I - Área sobre o gráfico de uma função f de a até b

Seja f uma função contínua não negativa no intervalo [a,b]



Definição 1. Seja f uma função contínua não negativa em [a,b] . Chama-se área sob o gráfico de f de a até b o limite:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i \right] = A$$

onde c_i é ponto um arbitrário do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

A área de todos esses retângulos é dada pela soma:

$$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3) + \ldots + \Delta x_n \cdot f(c_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(c_i)$$

que chamada "soma de Riemann".

Observe que quando se faz o máximo dos Δx_i tender a zero, a soma de Riemann se aproxima da área sob o gráfico de f de a até b.

Definição 2. Seja f uma função definida no intervalo [a,b] e P uma partição de [a,b]. Chama-se de integral definida de f de a até b o limite:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i \right]$$ **, se esse limite existe e é finito.**

Notação:

Sinal de integração — **Limite superior** — **Limite inferior**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i \right]$$

Observe que a integral definida é um número, enquanto a integral indefinida é um conjunto infinito de funções.

Observe também que, quando a função f é contínua e não negativa em [a,b], a integral definida representa a área sob o gráfico de f de a até b, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

Definição 3.

(i) Se a > b então: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(ii) Se existe f(a) então: $\int_a^a f(x)dx = 0$

Teorema 1: Toda função f contínua em [a,b] é integrável em [a,b].

Propriedades: Sejam f e g funções integráveis em [a,b] e k um número real, então:

$$(i) \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$(ii) \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua em [a,b] e P(x) uma primitiva de f em [a,b]. Então,

$$\int_a^b f(x)dx = P(b) - P(a)$$

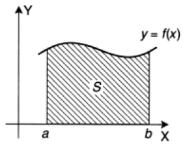
Exemplos:

Calcule as integrais:

a) $\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left(\frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right) = 9$

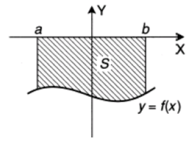
b) $\int_0^2 3^x dx =$

c) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x) dx =$



Neste caso, a área é dada por:

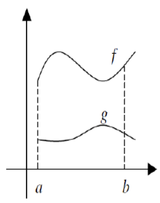
$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$



Neste caso, a área é dada por:

$$\boxed{A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|}$$

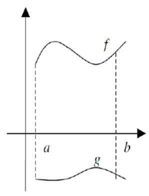
i) $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$.



Neste caso, a área é dada por:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

ii) $f(x) \geq 0$ e $g(x) \leq 0$ $\forall\ x \in [a,b]$.

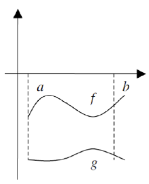


Neste caso, a área é dada por:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx + \left[-\int_a^b g(x)dx\right]} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

iii) $f(x) \leq 0$, $g(x) \leq 0$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$.

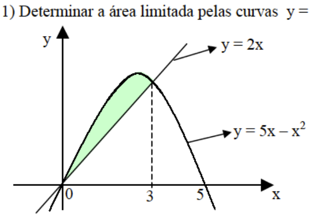


Neste caso, a área é dada por:

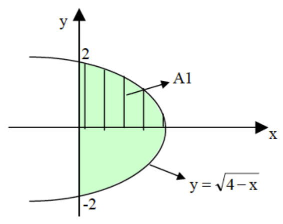
$$\boxed{A = -\int_a^b g(x)dx - \left[-\int_a^b f(x)dx\right]} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

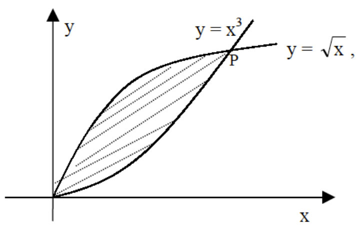
1) Determinar a área limitada pelas curvas $y = 5x - x^2$ e $y = 2x$.



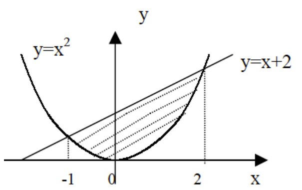
Determinar a área limitada pelo eixo y e pela curva $x = 4 - y^2$



4) Achar a área entre as curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.



Calcule a área entre os gráficos de $y = x + 2$ e $y = x^2$.



Achar a área da região limitada pelos gráficos $x = y^2 - 2y$ e $x = 2y - 3$.