EDO homogêneas

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

Dizemos que uma equação diferencial é homogênea se multiplicando cada variável por uma constante implica na função ser multiplicada por uma potência dessa constante.

Exemplo

A função $f(x, y) = xy - y^2$ é homogênea mas a função f$(x, y) = y^2 + x$ não é. De fato,

Solução 1:

$f(x, y) = xy - y^2$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y - (\lambda y)^2$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 xy - \lambda^2 y^2$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (xy - y^2)$

ou seja

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$

Solução 2:

$f(x, y) = y^2 + x$

$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)^2 + \lambda x$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 y^2 + \lambda x$

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda(\lambda y^2 + x)$

ou seja

$f(\lambda x, \lambda y) \neq \lambda f(x, y)$

Procedimentos para resolver EDO homogêneas $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

1. verificamos se $f(x, y)$ obedece a condição de homogeneidade;
2. no caso afirmativo, dividimos a todos os termos da expressão pelo x de maior grau e obtemos a expressão $\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$;
3. fazemos $u = \frac{y}{x}$ que resulta $y = ux$;
4. derivamos $y = ux$ e encontramos $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$;
5. substituimos $\frac{y}{x}$ por u e na expressão $\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$;
6. determinamos a primitiva de $u + x\frac{du}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$;
7. finalmente trocamos $u = \frac{y}{x}$ e isolamos y se possível.

:xemplo

Resolver a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Vamos seguir o processo

1 - Verificamos se $f(x, y)$ é homogênea.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \lambda y}{(x\lambda)^2 + (\lambda y)^2}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2 (x^2 + y^2)} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ou seja

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$$

2 - Dividimos f por x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}$$

ou seja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (*)$$

3 - Agora fazemos $u = \frac{y}{x}$ e, deste resultado, obtemos $y = ux$.

4 - Derivamos y em relação a x e obtemos $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.

5 - Substituimos $\frac{y}{x}$ por u e $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ na equação (*).

Técnicas de resolução de equações diferenciais.

5 - Substituimos $\frac{y}{x}$ por u

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \text{ (*)}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1+(u)^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1+(u)^2} - u = \frac{u - u\left(1+u^2\right)}{1+(u)^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{-u^3}{1+(u)^2}$$

$$-\frac{\left(1+u^2\right)du}{u^3} = \frac{dx}{x}$$

6 - Determinamos a primitiva

$$-\frac{\left(1+u^2\right)du}{u^3} = \frac{dx}{x}$$

$$-\left(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$$

$$\int\left(-\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du = \int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\frac{1}{2u^2} = \ln|u| + \ln|x| + \ln|c|$$

$$\frac{1}{u^2} = 2\ln|uxc|$$

Técnicas de resolução de equações diferenciais.

7 - Substituindo u por $\frac{y}{x}$

$$\frac{1}{u^2} = 2\ln|uxc|$$

$$\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} = 2\ln\left|\frac{y}{x}xc\right|$$

$$\frac{x^2}{y^2} = 2\ln|yc|$$

ou seja

$$x^2 = 2y^2\ln|yc|$$

$$x = y\sqrt{2\ln|yc|}$$