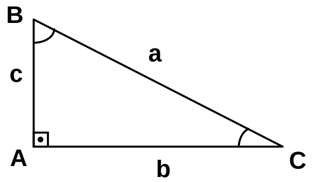
1. TRIÂNGULO RETÂNGULO

TRIÂNGULO RETÂNGULO é aquele que possui um ângulo reto (90º). Dizemos que o triângulo a seguir é retângulo em A, veja:



ONDE:

a é a hipotenusa (maior lado);

b e **c** são os catetos (formam o ângulo reto);

$\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos complementares, isto é, $\hat{B}+\hat{C}=90^{\circ}$;

2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

No TRIÂNGULO RETÂNGULO ABC são válidas as seguintes RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS (entre os elementos mencionados acima):

RAZÃO 01: SENO DO ÂNGULO $\hat{B}$ – É a razão entre o cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$ e a hipotenusa.

$$\boxed{\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}}$$

RAZÃO 02: COSSENO DO ÂNGULO $\hat{B}$ – É a razão entre o cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$ e a hipotenusa.

$$\boxed{\cos\hat{B}=\frac{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}}$$

RAZÃO 03: TANGENTE DO ÂNGULO $\hat{B}$ – É a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$.

$$\boxed{\operatorname{tg}\hat{B}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}}$$

De modo análogo podemos definir as razões seno, cosseno e tangente do ângulo agudo $\hat{C}$.

3. PROPRIEDADES

Observe os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos $\hat{B}$:

$\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}=\frac{b}{a}$	$\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{C}}{\text{hipotenusa}}=\frac{c}{a}$
$\cos\hat{B}=\frac{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}=\frac{c}{a}$	$\cos\hat{C}=\frac{\text{cateto adjacente a }\hat{C}}{\text{hipotenusa}}=\frac{b}{a}$
$\operatorname{tg}\hat{B}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}=\frac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\hat{C}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{C}}{\text{cateto adjacente a }\hat{C}}=\frac{c}{b}$

Para dois ângulos complementares $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são válidas as seguintes PROPRIEDADES:

PROPRIEDADE 01: O seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complementar.

$$\boxed{\operatorname{sen}\hat{B}=\cos\hat{C}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\operatorname{sen}\hat{C}=\cos\hat{B}}$$

PROPRIEDADE 02: A tangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente de seu complementar.

$$\boxed{\operatorname{tg}\hat{B}=\frac{1}{\operatorname{tg}\hat{C}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\operatorname{tg}\hat{C}=\frac{1}{\operatorname{tg}\hat{B}}}$$

4. TABELA

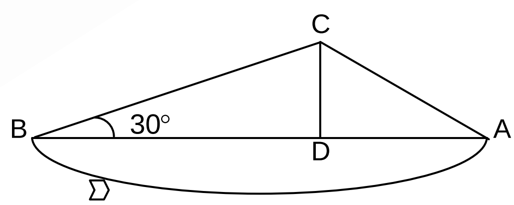
Os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos 30º, 45º e 60º são mostrados na tabela a seguir:

	30º	**45º**	**60º**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

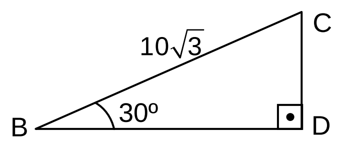
5. EXEMPLOS RESOLVIDOS

01. (UEPA) O mastro $\left(\overline{CD}\right)$ de um navio é preso verticalmente por cabos de aço fixo na proa (A) e na popa (B), conforme mostra a figura a seguir. Se o cabo $\overline{BC}$ mede $10\sqrt{3}$ m então, a altura do mastro é:

a) $2\sqrt{3}$ m
b) $5\sqrt{3}$ m
c) $8\sqrt{3}$ m
d) $10\sqrt{3}$ m
e) $20\sqrt{3}$ m



RESOLUÇÃO: Destacamos o triângulo BCD retângulo em D:



Para calcular a altura do mastro que corresponde ao segmento $\overline{CD}$ aplicamos o seno, pois o mastro $\left(\overline{CD}\right)$ é o cateto oposto ao ângulo de 30º e o cabo $\overline{BC}$ é a hipotenusa.

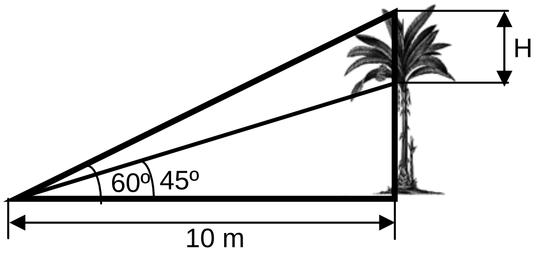
$\operatorname{sen}30^{\circ}=\frac{CD}{10\sqrt{3}}$ e como $\operatorname{sen}30^{\circ}=\frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{CD}{10\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad CD = \frac{10\sqrt{3}}{2}$$
$$2.CD = 10\sqrt{3} \qquad CD = 5\sqrt{3}$$

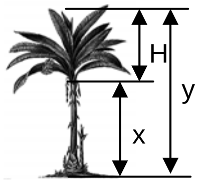
Portanto a altura do mastro é $5\sqrt{3}$ m (alternativa b).

02. (UEPA – PRISE) Um botânico interessado em descobrir qual o comprimento da copa de uma árvore fez as observações indicadas na figura abaixo a partir de um ponto no solo. O comprimento (H), em metros, dessa copa é:

a) $10\left(\sqrt{3}-1\right)$
b) 15
c) $10\sqrt{3}$
d) $10\left(\sqrt{3}+1\right)$
e) 30

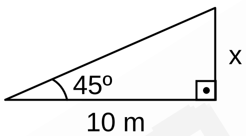


RESOLUÇÃO: Observe o esquema:



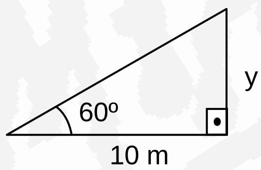
$\boxed{H + x = y}$

Destacamos os dois triângulos retângulos a seguir:
Aplicamos a tangente de 45º, pois x é o cateto oposto e 10 m é a medida do cateto adjacente.



$tg\,45º = \frac{x}{10}$ e como $tg\,45º = 1$, temos: $1 = \frac{x}{10}$, logo $x = 10$.

A medida do tronco da árvore é 10 m.
Aplicamos a tangente de 60º, pois y é o cateto oposto e a medida 10 m é o cateto adjacente.



$tg\,60º = \frac{y}{10}$ e como $tg\,60º = \sqrt{3}$,

temos: $\sqrt{3} = \frac{y}{10}$, logo $y = 10\sqrt{3}$.

Substituindo x e y na relação $H + x = y$, temos:

$$H + 10 = 10\sqrt{3}$$
$$H = 10\sqrt{3} - 10$$

Colocando o fator comum 10 em evidência, temos:

$$H = 10.\left(\sqrt{3}-1\right)$$

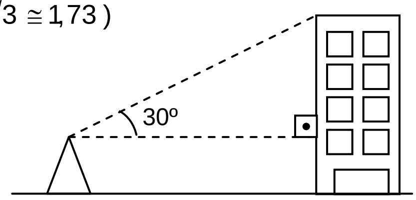
Portanto o comprimento da copa da árvore é $10.\left(\sqrt{3}-1\right)$ metros.

EXERCÍCIOS

01. (UFSM) Um estudante de engenharia vê um prédio do campus da UFSM construído em um terreno plano, sob um ângulo de 30º. Aproximando-se do prédio mais 40 m, passa a vê-lo sob um ângulo de 60º. Considerando que a base do prédio está no mesmo nível dos olhos do estudante, então a altura h do prédio é igual a:

a) $30\sqrt{3}$ c) 10
b) $20\sqrt{3}$ d) $10\sqrt{3}$ e) 28

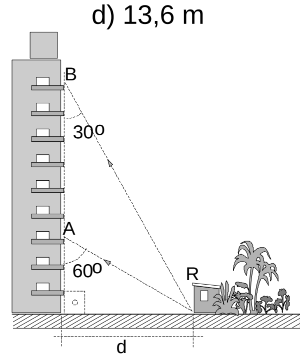
02. (UFJF) Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento para medir ângulos) a 200 m do edifício e mediu o ângulo de 30º, como indicado na figura a seguir: (Utilize $\sqrt{3} \cong 1{,}73$)



Sabendo que o teodolito está a 1,5 m do solo, pode-se concluir que, dentre os valores a seguir, o que melhor aproxima a altura do edifício, em metros, é:
a) 112 c) 117
b) 115 d) 120 e) 124

03. (CEFET) A Rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, se cruzam segundo um ângulo de 30º. O posto de gasolina Estrela do Sul se encontra na Avenida Teófilo Silva a 4000 m do citado cruzamento. Portanto, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros, em quilômetros, é igual a:
a) 4 c) 2
b) 12 d) 5 e) 8

04. (CEFET) Patrik Onom Étrico, um jovem curioso, observa da janela do seu quarto (A) uma banca de revistas (R), bem em frente ao seu prédio, segundo um ângulo de 60º com a vertical. Desejando avaliar a distância do prédio à banca, Patrik sobe seis andares (aproximadamente 16 metros) até o apartamento de um amigo seu, e passa a avistar a banca (do ponto B) segundo um ângulo de 30º com a vertical. Calculando a distância "d", Patrik deve encontrar, aproximadamente, o valor:
(Dados: $\sqrt{2} = 1{,}4$; $\sqrt{3} = 1{,}7$)
a) 8,0 m c) 12,4 m
b) 11,2 m d) 13,6 m e)15,0 m



05. (UFSC) Dois pescadores P_1 e P_2, estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver um bote B na outra margem. Sabendo que P_1P_2=63 m, os ângulos $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$ e $B\hat{P}_2P_1 = \beta$ e que $tg\,\alpha = 2$ e $tg\,\beta = 4$, determine a distância (em metros) entre as margens.