editora ática

Diretoria editorial e de conteúdo: Angélica Pizzutto Pozzani
Gerência de produção editorial: Hélia de Jesus Gonsaga
Editoria de Matemática, Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Cármen Matricardi
Editores: Cibeli Chibante Bueno; Letícia Mancini Martins, Luiz Paulo Gati de Cerqueira Cesar e Marcela Pontes (estags.)
Supervisão de arte e produção: Sérgio Yutaka
Editor de arte: André Gomes Vitale
Diagramação: Casa de Tipos
Supervisão de criação: Didier Moraes
Editora de arte e criação: Andréa Dellamagna
Design gráfico: Ulhôa Cintra Comunicação Visual e Arquitetura (miolo e capa)
Revisão: Rosângela Muricy (coord.), Claudia Virgilio (prep.), Ana Paula Chabaribery Malfa, Arnaldo R. Arruda, Luís Maurício Bôa Nova e Gabriela Macedo de Andrade (estag.)
Supervisão de iconografia: Sílvio Kligin
Pesquisadora iconográfica: Claudia Bertolazzi
Cartografia: Allmaps, Juliana Medeiros de Albuquerque e Márcio Santos de Souza
Tratamento de imagem: Cesar Wolf e Fernanda Crevin
Foto da capa: Gloria H. Chomica/Masterfile/Other Images
Ilustrações: Dam d'Souza, Fabio Eugenio, Formato Comunicação e Paulo Manzi (aberturas das unidades)

Versão digital
Diretoria de tecnologia de educação: Ana Teresa Ralston
Gerência de desenvolvimento digital: Mário Matsukura
Gerência de inovação: Guilherme Molina
Coordenadores de tecnologia de educação: Daniella Barreto e Luiz Fernando Caprioli Pedroso
Coordenador de edição de conteúdo digital: Danilo Claro Zanardi
Editores de tecnologia de educação: Cristiane Buranello e Juliano Reginato
Editores de conteúdo digital: Cibeli Chibante Bueno, Monique Matos de Oliveira, Alterson Luiz Cação, Letícia Mancini Martins (estag.) e Marcela Pontes (estag.)
Editores assistentes de tecnologia de educação: Aline Oliveira Bagdanavicius, Drielly Galvão Sales da Silva, José Victor de Abreu e Michelle Yara Urcci Gonçalves
Assistentes de produção de tecnologia de educação: Alexandre Marques, Gabriel Kujawski Japiassu, João Daniel Martins Bueno, Paula Pelisson Petri, Rodrigo Ferreira Silva e Saulo André Moura Ladeira
Desenvolvimento dos objetos digitais: Agência GR8, Atômica Studio, Cricket Design, Daccord e Mídias Educativas
Desenvolvimento do livro digital: Digital Pages

Direitos desta edição cedidos à Editora Ática S.A.
Av. Otaviano Alves de Lima, 4400
6º andar e andar intermediário ala A
Freguesia do Ó – CEP 02909-900 – São Paulo – SP
Tel.: 4003-3061
www.atica.com.br/editora@atica.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dante, Luiz Roberto
Matemática : contexto & aplicações / Luiz Roberto Dante. – 2. ed. – São Paulo : Ática, 2013.
Obra em 3 v.
1. Matemática (Ensino médio) I. Título.
13–03268 CDD–510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino médio 510.7

2013
ISBN 978 8508 16301-4 (AL)
ISBN 978 8508 16302-1 (PR)
Código da obra CL 712767

Uma publicação Abril EDUCAÇÃO

Apresentação

A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos.

Aristóteles

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

Ao elaborar esta coleção para o Ensino Médio, levamos em conta as ideias que abrem esta apresentação. Isso porque nosso objetivo é criar condições para que você, aluno, possa compreender as ideias básicas da Matemática desse nível de ensino atribuindo significado a elas, além de saber aplicá-las na resolução de problemas do mundo real.

Todos os conceitos básicos próprios do Ensino Médio foram explorados de maneira intuitiva e compreensível. As receitas prontas e o formalismo excessivo foram evitados, porém mantivemos o rigor coerente com o nível para o qual a coleção está sendo proposta.

Na abertura das unidades apresentamos um tema que está relacionado com um dos capítulos que a compõem; ela te dará uma ideia de um dos temas que será estudado. Já na abertura dos capítulos apresentamos informações gerais, que podem ter uma abordagem histórica sobre o assunto que será discutido.

Antes de resolver os exercícios, é absolutamente necessário que você estude a teoria, analise os exemplos e refaça os exercícios resolvidos. Na seção *Resolvido passo a passo*, comentamos e explicitamos as fases da resolução de um problema.

A seção *Outros contextos* foi criada para formular, resolver e interpretar situações-problema que estão relacionadas a situações reais e/ou relacionadas com outras disciplinas.

Cada unidade contém ainda as seções *Pensando no Enem* e *Vestibulares de Norte a Sul*, com questões baseadas no Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) e de vestibulares de todas as regiões do país, destinadas a revisar, fixar e aprofundar os conteúdos estudados. E no fim de cada volume, na seção *Caiu no Enem*, foram incluídas questões do Enem relacionadas a cada unidade.

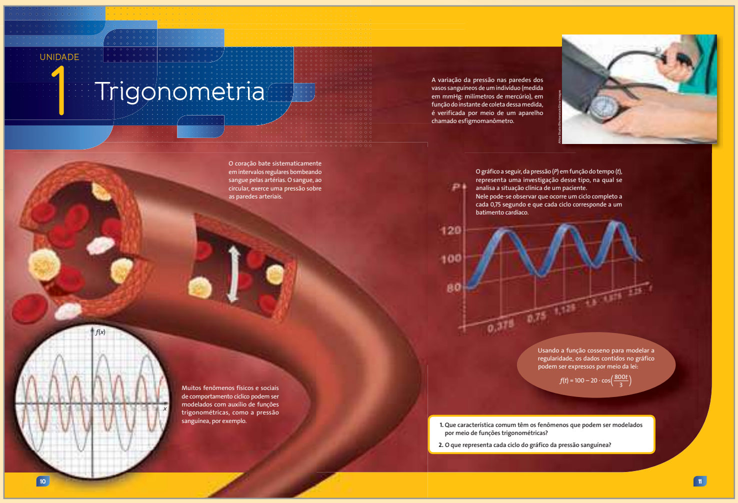
A coleção engloba, desse modo, todos os assuntos costumeiramente trabalhados no Ensino Médio, além de auxiliá-lo em sua preparação para os processos seletivos de ingresso nos cursos de Educação Superior.

As sugestões e críticas que visem ao aprimoramento deste trabalho serão sempre bem-vindas.

O autor

Conheça seu livro

Cada volume da coleção é dividido em quatro unidades nas quais você encontrará os seguintes boxes e seções:

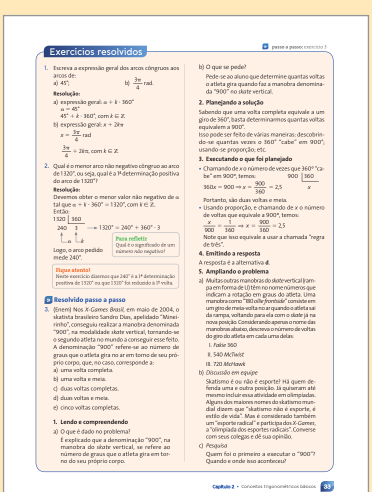


Abertura de unidade

Duas páginas que proporcionam o primeiro contato com um dos assuntos que será abordado na unidade.

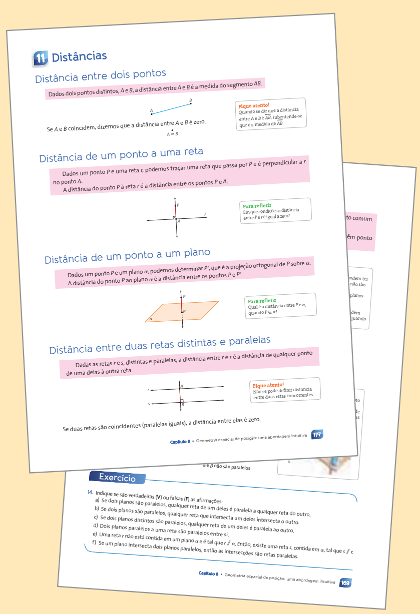
Abertura de capítulo

Texto introdutório com o objetivo de apresentar, por meio de uma situação real ou um contexto histórico, o conteúdo que será estudado no capítulo.



Exercício resolvido passo a passo

Apresenta a resolução detalhada de uma questão ou um problema. Não são modelos a serem seguidos, mas visam inspirar e indicar estratégias de resolução.

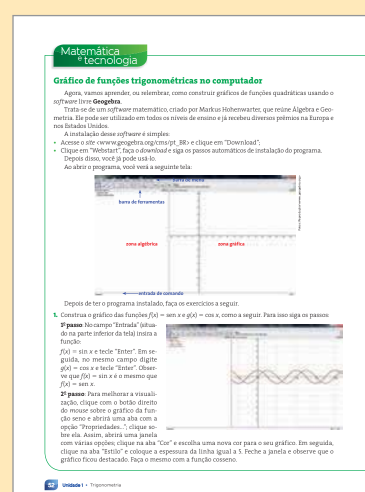


Para refletir, Fique atento! e Você sabia?

Pequenos boxes que trazem questões para reflexão ou dicas importantes para o estudo.

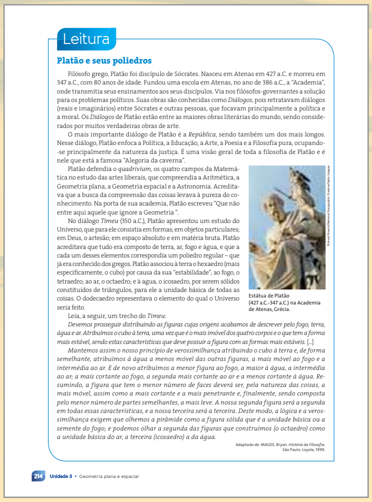
Exercícios

Essenciais para a aprendizagem. Ajudam a fixar e aprofundar os conteúdos estudados.



Matemática e tecnologia

Sugestões de atividades em que o computador é utilizado para visualizar e manipular gráficos e tabelas. Uma oportunidade de trabalhar com a Matemática dinâmica.

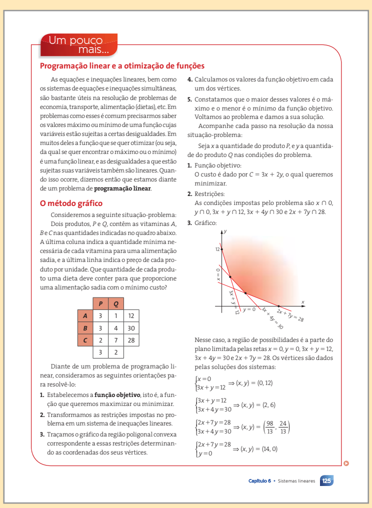


Leitura(s)

Textos que visam ampliar e enriquecer o conteúdo estudado no capítulo.

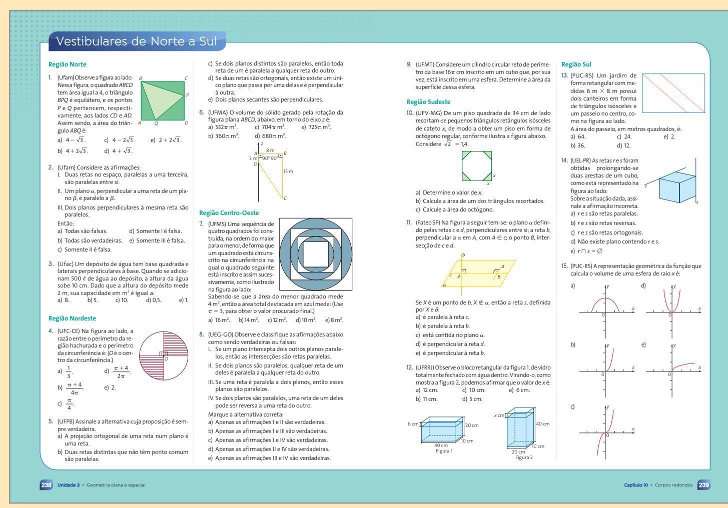
Outros contextos

Temas relevantes e atuais que tratam de situações práticas, articulando a Matemática com outras disciplinas e com temas como saúde, sociedade, meio ambiente entre outros.



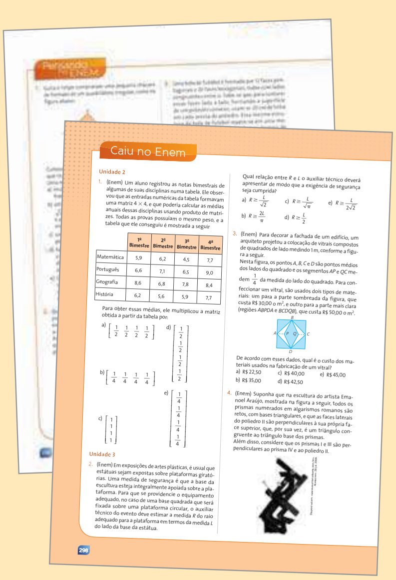
Um pouco mais...

Textos e exercícios que ajudam a aprofundar o conteúdo do capítulo.



Vestibulares de Norte a Sul

Questões de vestibulares, de todas as regiões geográficas do Brasil, relacionadas aos conteúdos estudados.



Pensando no Enem

Atividades contextualizadas que visam ao desenvolvimento das competências e habilidades previstas na Matriz do Enem.

Caiu no Enem

Questões extraídas do Enem classificadas de acordo com as unidades.

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

Atenção! Ainda que seja pedido "Assinale", "Indique", etc. em algumas questões, nunca escreva no livro. Dê todas as respostas no caderno.

CONTEÚDO DIGITAL

Objeto Educacional Digital

Este ícone indica Objetos Educacionais Digitais relacionados aos conteúdos do livro.

Sumário

UNIDADE 1 Trigonometria


Philippe Maillard/Album/Latinstock

UNIDADE

2 Matrizes, determinantes e sistemas lineares

CAPÍTULO 5

Matrizes e determinantes

CAPÍTULO 6

Sistemas lineares

Bioraven/Shutterstock/Glow Images

UNIDADE

3 Geometria plana e espacial

CAPÍTULO 7
Polígonos inscritos e áreas

Thruston/Wikimedia Commons

CAPÍTULO 8
Geometria espacial de posição: uma abordagem intuitiva

CAPÍTULO 9
Poliedros: prismas e pirâmides

CAPÍTULO 10
Corpos redondos

UNIDADE
4 Análise combinatória e probabilidade

CAPÍTULO 11
Análise combinatória

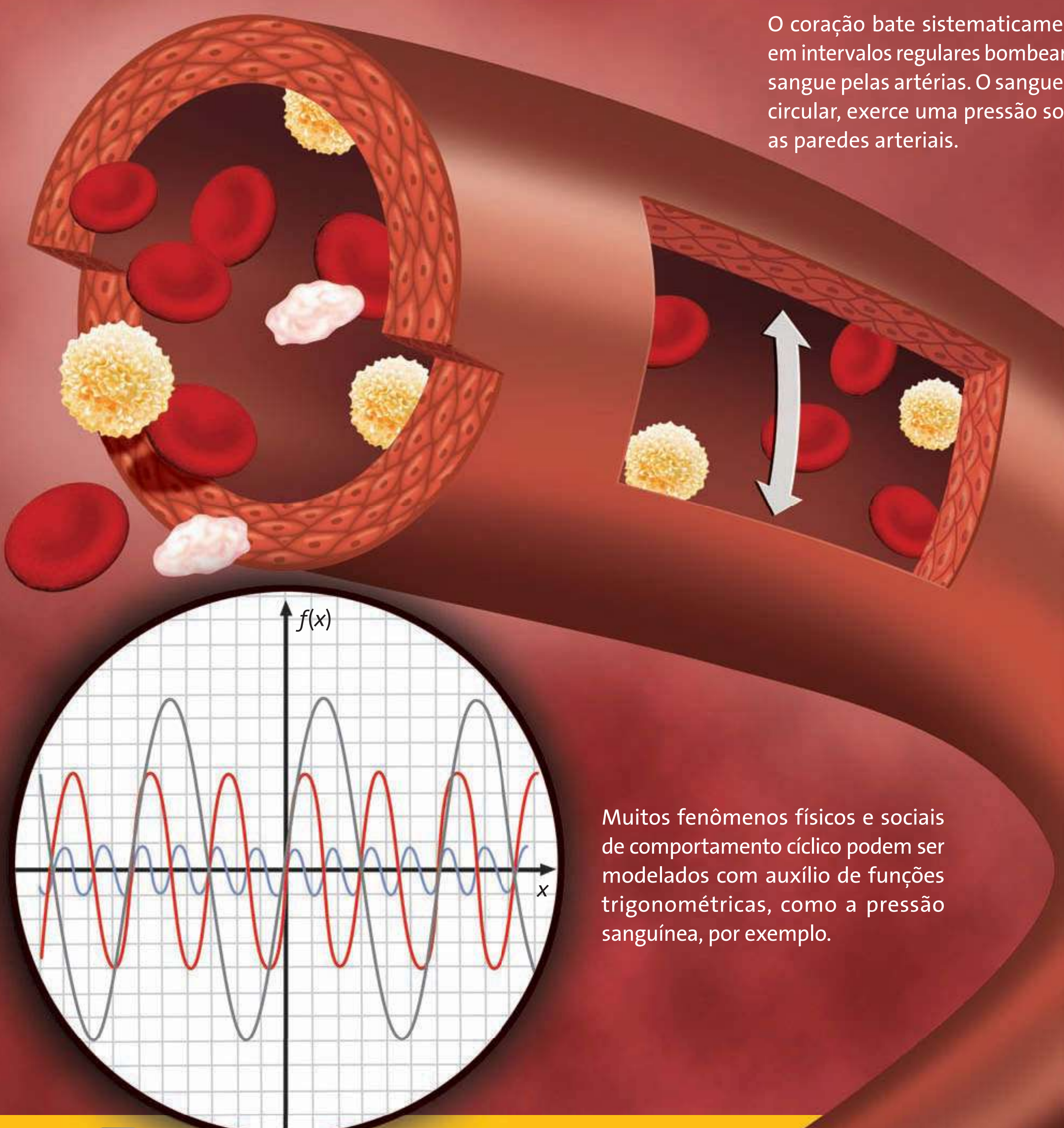
Fotos: Hely Demutti/Acervo do fotógrafo

CAPÍTULO 12
Probabilidade

UNIDADE

1 Trigonometria

O coração bate sistematicamente em intervalos regulares bombeando sangue pelas artérias. O sangue, ao circular, exerce uma pressão sobre as paredes arteriais.



Muitos fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico podem ser modelados com auxílio de funções trigonométricas, como a pressão sanguínea, por exemplo.

A variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um indivíduo (medida em mmHg: milímetros de mercúrio), em função do instante de coleta dessa medida, é verificada por meio de um aparelho chamado esfigmomanômetro.

Africa Studio/Shutterstock/Glow Images

O gráfico a seguir, da pressão (P) em função do tempo (t), representa uma investigação desse tipo, na qual se analisa a situação clínica de um paciente.
Nele pode-se observar que ocorre um ciclo completo a cada 0,75 segundo e que cada ciclo corresponde a um batimento cardíaco.

Usando a função cosseno para modelar a regularidade, os dados contidos no gráfico podem ser expressos por meio da lei:

$$f(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{800t}{3}\right)$$

1. **Que característica comum têm os fenômenos que podem ser modelados por meio de funções trigonométricas?**

2. **O que representa cada ciclo do gráfico da pressão sanguínea?**

CAPÍTULO 1

Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer

Algumas vezes deparamos com plantas de terrenos em que há a representação de lagos ou de montanhas com todas as medidas indicadas sem que nos ocorra pensar em como essas medidas teriam sido obtidas.

A Topografia é a área da Engenharia que trata de situações como esta: medições que determinam a forma e a posição de elementos do relevo, com base em relações estabelecidas pela **Trigonometria**. Para isso, utiliza-se o teodolito, um instrumento de observação que ajuda a calcular distâncias difíceis de serem medidas, a partir de medidas de triângulos que podem ser determinados nos terrenos.

Marcus Lyon/Getty Images

Engenheiro usando teodolito.

O conhecimento das relações entre lados e ângulos desses triângulos é fundamental para o topógrafo, pois se ele conhecer três das seis medidas de lados e ângulos de um triângulo poderá calcular as demais.

Até a descoberta dessas relações, problemas que envolvessem triângulos eram geralmente resolvidos com o que se sabia das relações no triângulo retângulo, mas a prática mostrou que isso era insuficiente ou tornava os cálculos muito trabalhosos.

A determinação das medidas dos ângulos e dos comprimentos dos lados de um triângulo qualquer, sem recorrer aos triângulos retângulos, foi possível com a evolução da Trigonometria. As relações, chamadas **lei dos senos** e **lei dos cossenos**, trouxeram ferramentas fundamentais para os problemas que envolviam esses triângulos. Vamos estudá-las neste capítulo.

1 Revisão sobre resolução de triângulos retângulos

Antes de aprender novos conceitos e relações da Trigonometria, vamos revisar o que foi estudado nos anos anteriores. Faça dupla com um colega e tentem resolver os exercícios a seguir.

Quando necessário use a tabela da página 23 ou uma calculadora científica.

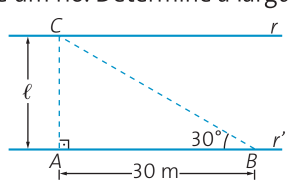
Observação: Usaremos $\overline{AB}$ ora para designar **segmento de reta** AB, ora para designar medida do segmento de reta AB. Pelo contexto da situação saberemos quando está sendo usado um significado e quando está sendo usado o outro.

Segmento de reta: parte da reta compreendida entre dois de seus pontos distintos, denominados extremos.

Exercícios

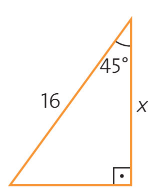
ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Nesta figura, as retas paralelas r e r' representam as margens de um rio. Determine a largura ℓ desse rio.

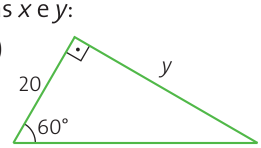


2. Calcule os valores das medidas x e y:

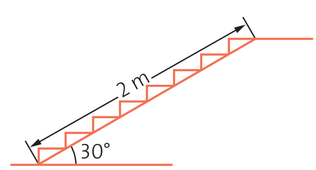
a)



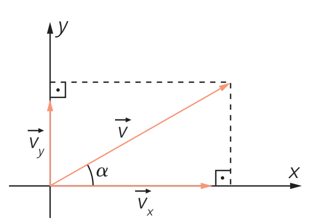
b)



3. Dois níveis de uma praça estão ligados por uma rampa de 2 m de comprimento e 30° de inclinação, conforme a figura. Devem-se construir, sobre a rampa, 8 degraus de mesma altura. Encontre a altura de cada degrau.



4. Observe a figura:

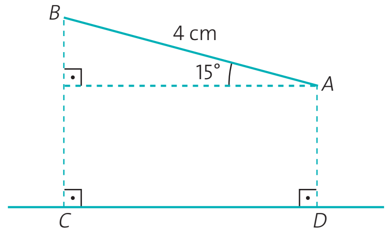


Dizemos que $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ são as componentes retangulares do vetor $\vec{v}$.

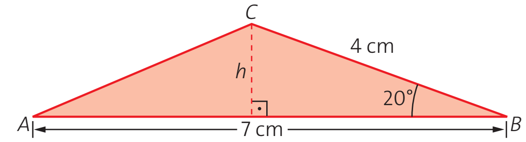
Considerando o módulo de $\vec{v}$ igual a 10 cm e o ângulo α de 30°, determine os módulos de $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$.

5. Um poste na posição vertical tem sua sombra projetada em uma rua horizontal. A sombra tem 12 m. Se a altura do poste é de $4\sqrt{3}$ m, então, qual é a inclinação dos raios solares em relação à rua horizontal?

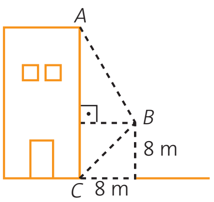
6. Determine o valor de $\overline{CD}$ na figura abaixo. $\overline{CD}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre um eixo.



7. Determine a área da região triangular abaixo.

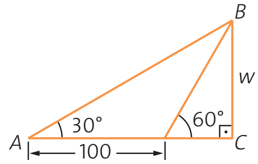


8. Um observador, no ponto B da figura ao lado, vê um prédio de modo que o ângulo ABC é de 105°. Se esse observador está situado a uma distância de 8 m do prédio e a uma altura de 8 m, qual é a altura do prédio?

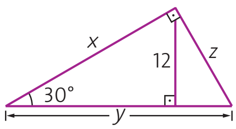


9. Calcule as medidas x, y, z e w indicadas nas figuras.

a)



b)



2 Seno e cosseno de ângulos obtusos

Neste capítulo precisaremos, em alguns momentos, saber os valores de senos e cossenos de **ângulos obtusos**. Como esse assunto ainda não foi estudado — não existem ângulos obtusos nos triângulos retângulos —, aprenderemos neste momento apenas como lidar com eles na prática, e deixaremos a parte teórica, que fundamenta o que estudaremos agora, para outro capítulo.

Ângulo obtuso: ângulo cuja medida está entre 90° e 180°.

Inicialmente, é necessário saber que:

Fique atento!
Lembre-se de que ângulos suplementares são dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 180°.

- $\text{sen } 90° = 1$ e $\cos 90° = 0$
- senos de ângulos obtusos são exatamente iguais aos senos dos suplementos desses ângulos:

$$\text{sen } x = \text{sen } (180° - x)$$

- cossenos de ângulos obtusos são opostos aos cossenos dos suplementos desses ângulos:

$$\cos x = -\cos (180° - x)$$

Exemplos:

a) sen 120°

O suplemento de 120° é 60°, portanto:

$$\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 120°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) cos 120°

$$\cos 120° = -\cos (180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

Exercícios

10. Obtenha o valor de:
    a) sen 135°
    b) cos 135°
    c) sen 150°
    d) cos 150°

11. Obtenha o valor de x em:
    a) $x = \text{sen } 20° - \text{sen } 160° + \cos 44° + \cos 136°$
    b) $x = \text{sen } 10° \cdot \cos 50° + \cos 130° \cdot \text{sen } 170°$

3 Lei dos senos

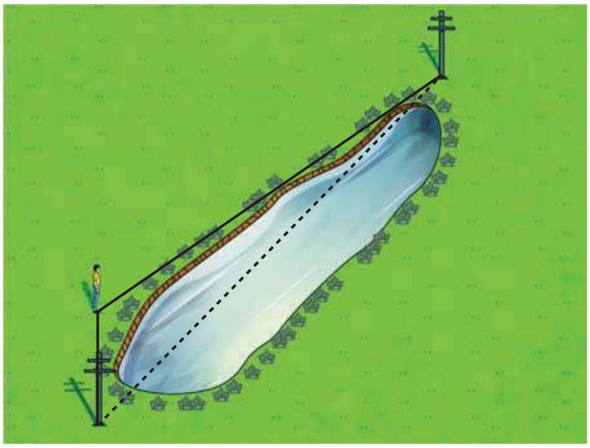
Vamos analisar a seguinte situação-problema:

Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica em uma fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância.

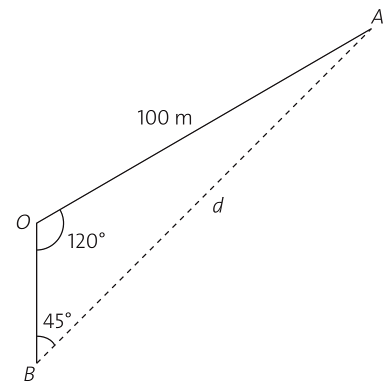
Um dos engenheiros posicionou-se em um local onde era possível visualizar os dois postes e medir a distância entre eles. Com um aparelho apropriado, o teodolito, ele mediu o ângulo entre a linha de visão dele e os postes, obtendo 120°. Um auxiliar mediu a distância entre o engenheiro e o poste mais afastado e obteve 100 m; outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo do engenheiro e a linha entre os postes, obtendo 45°. Com essas informações, o engenheiro ficou satisfeito, pois ele já conseguiria calcular a distância entre os postes. Acompanhe como, a seguir.

Realidade

Dam d'Souza/Arquivo da editora



Modelo matemático

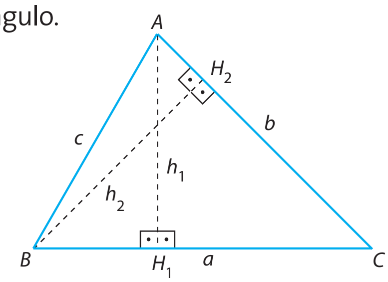


O triângulo AOB é obtusângulo, e a resolução desse problema consiste em determinar a medida do lado $\overline{AB}$. Para resolvê-lo, vamos estudar a **lei dos senos**, cujo enunciado vem a seguir:

> Em qualquer triângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja:
>
> $$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Veja a seguir a demonstração da lei dos senos para um triângulo acutângulo.

Consideremos o $\triangle ABC$ acutângulo e duas de suas alturas: $\overline{AH_1}$ e $\overline{BH_2}$.



- No $\triangle ACH_1$, retângulo em H_1, temos:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen}\,\hat{C}$$

- No $\triangle ABH_1$, retângulo em H_1, temos:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen}\,\hat{B}$$

Comparando, temos:

$$b \cdot \text{sen}\,\hat{C} = c \cdot \text{sen}\,\hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \quad \text{(I)}$$

- No $\triangle BCH_2$, retângulo em H_2, temos:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen}\,\hat{C}$$

- No $\triangle ABH_2$, retângulo em H_2, temos:

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \text{sen}\,\hat{A}$$

Comparando, temos:

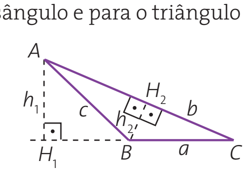
$$a \cdot \text{sen}\,\hat{C} = c \cdot \text{sen}\,\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \quad \text{(II)}$$

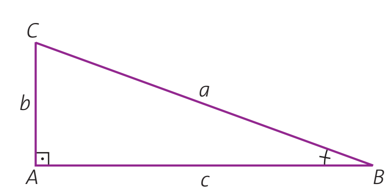
De (I) e (II) concluímos que:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Para refletir

Verifique que a demonstração vale também para o $\triangle ABC$ obtusângulo e para o triângulo retângulo.

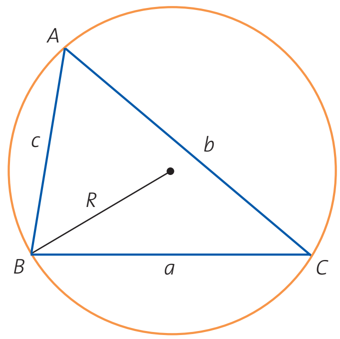




[Lembre-se: sen α = sen $(180° - \alpha)$.]

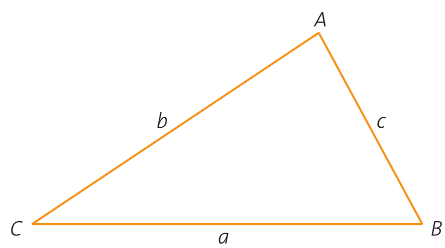
Observações:

1ª) Pode-se provar que a razão $\dfrac{\text{medida do lado}}{\text{seno do ângulo oposto}}$ é constante e igual a $2R$, em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo considerado.



$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

2ª) Quando o enunciado de uma questão se refere a um triângulo ABC, temos de colocar o lado a oposto ao ângulo A, o lado b oposto ao ângulo B, e o lado c oposto ao ângulo C, como na figura abaixo:

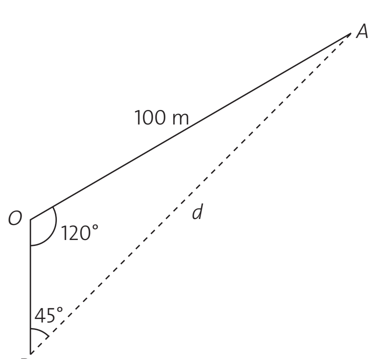


Agora temos condições de resolver a situação-problema apresentada na página 14:

Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica em uma fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância.

Um dos engenheiros posicionou-se em um local onde era possível visualizar os dois postes e medir a distância entre eles. Com um aparelho apropriado, o teodolito, ele mediu o ângulo entre a linha de visão dele e os postes, obtendo 120°. Um auxiliar mediu a distância entre o engenheiro e o poste mais afastado e obteve 100 m; outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo do engenheiro e a linha entre os postes, obtendo 45°. Com essas informações, o engenheiro ficou satisfeito, pois ele já conseguiria calcular a distância entre os postes.

Retomando o modo matemático, temos:



Pela lei dos senos, temos:

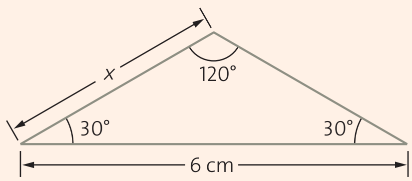
$$\frac{100}{\text{sen } 45°} = \frac{d}{\text{sen } 120°} = \frac{100}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} \Rightarrow \sqrt{2}d = 100\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{6} \simeq 122,47$$

Então, a distância entre os postes é de aproximadamente 122,47 m.

Exercícios resolvidos

1. Em um triângulo isósceles, a base mede 6 cm e o ângulo oposto à base mede 120°. Calcule a medida dos lados congruentes do triângulo.



Resolução:

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{6}{\text{sen } 120°} = \frac{x}{\text{sen } 30°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{x}{\frac{1}{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Cada um dos lados congruentes mede $2\sqrt{3}$ cm.

> **Para refletir**
> Em um triângulo isósceles, a altura relativa à base é também mediana e bissetriz. Use esse fato e resolva este exercício de outra forma.

2. Em um triângulo ABC, temos $\overline{BC} = 5$ cm, $\hat{A} = 48°$ e $\hat{B} = 25°$. Calcule a medida aproximada do lado $\overline{AB}$ (use a tabela da página 23 ou uma calculadora científica).

Resolução:

Pela lei dos senos:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \hat{C}},$$

sendo $\hat{C} = 180° - (48° + 25°) = 107°$.

> **Fique atento!**
> Com a tabela calculamos sen 107° ≃ 0,956, procurando sen 73°.

Substituindo:

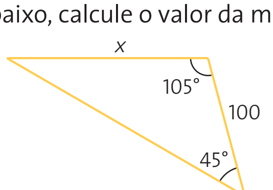
$$\frac{5}{\text{sen } 48°} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } 107°} \Rightarrow \frac{5}{0{,}743} = \frac{\overline{AB}}{0{,}956} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{5 \cdot 0{,}956}{0{,}743} \simeq 6{,}43$$

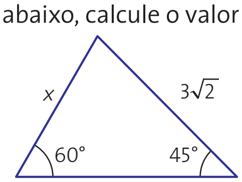
Portanto, a medida aproximada do lado $\overline{AB}$ é 6,43 cm.

Exercícios

12. Na figura abaixo, calcule o valor da medida x.

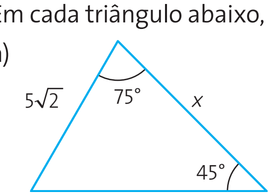


13. No triângulo abaixo, calcule o valor da medida x.

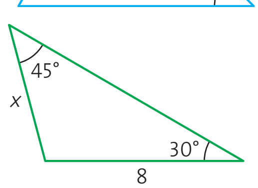


14. Em cada triângulo abaixo, calcule o valor da medida x.

a)



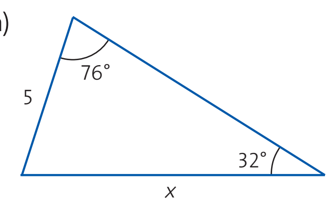
b)



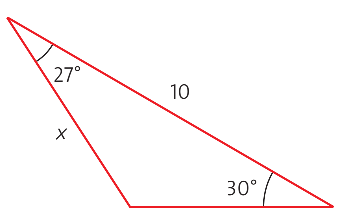
15. Num triângulo ABC, são dados $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 30°$ e $a + b = \sqrt{2} + 1$. Calcule o valor de a.

16. Use a tabela da página 23 ou uma calculadora científica e determine os valores de x (aproximadamente):

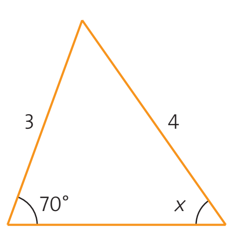
a)



b)



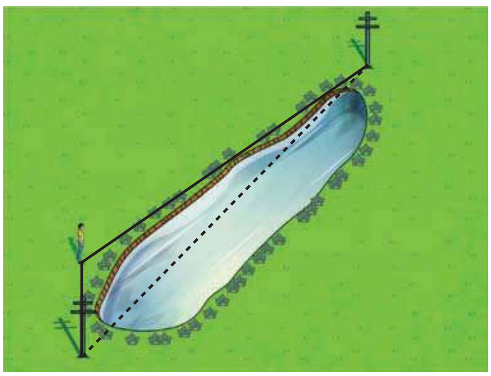
c)



4 Lei dos cossenos

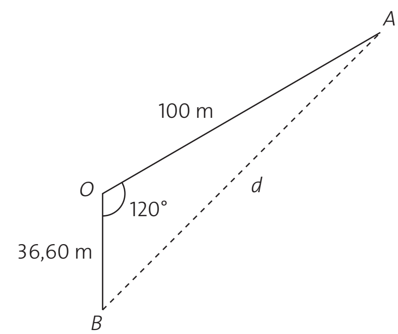
Voltemos ao nosso engenheiro e seu problema em medir a distância entre os postes, sugerido no início do item 3. Se tivesse encontrado alguma dificuldade para obter o ângulo de 45°, ou mesmo que não quisesse obtê-lo, o engenheiro poderia ter pedido ao seu segundo auxiliar que medisse a distância do local onde ele estava até o poste mais próximo. Assim, além do valor do ângulo (120°) que o engenheiro já havia medido e da distância (100 m) entre o poste mais afastado e ele, o engenheiro teria obtido a nova distância, de 36,60 m, entre o poste mais próximo e ele. Essas informações também permitiriam calcular a distância desejada. Observe as representações novamente.

Realidade



Dam d'Souza/Arquivo da editora

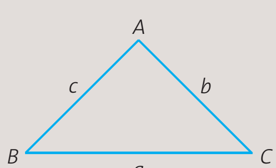
Modelo matemático



Pelo desenho, observamos que o nosso problema consiste em determinar a medida de um lado de um triângulo, quando conhecemos as medidas dos outros dois, e do ângulo oposto ao lado cuja medida queremos encontrar.

Para resolvê-lo, precisamos estudar a **lei dos cossenos**, enunciada a seguir:

Em qualquer triângulo ABC, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam, ou seja:



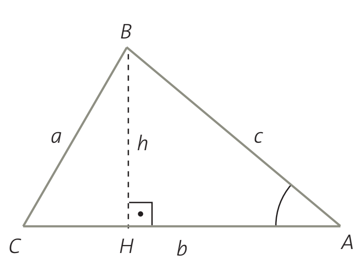
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$

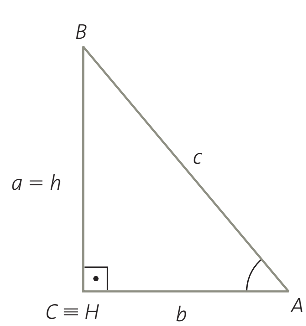
Vamos provar apenas a primeira das relações acima, considerando o **ângulo *A* agudo**; a demonstração das outras relações é análoga.

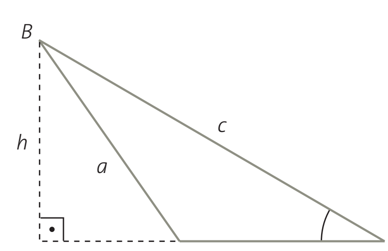
O ângulo agudo A pode estar em um triângulo acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Ângulo agudo: ângulo cuja medida é menor do que 90°.

Vamos demonstrar a lei dos cossenos usando o triângulo acutângulo.







Traçando a altura $\overline{BH}$, obtemos os triângulos retângulos ABH e CBH.

- No $\triangle ABH$, temos:

$$\begin{cases} \cos \hat{A} = \dfrac{\overline{AH}}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos \hat{A} \\ c^2 = h^2 + \overline{AH}^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - \overline{AH}^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - \left(c \cdot \cos \hat{A}\right)^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \hat{A} \quad \text{(I)} \end{cases}$$

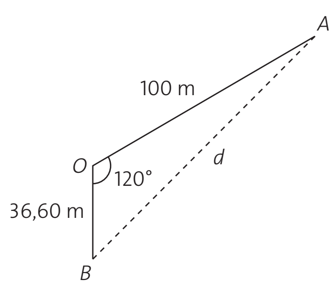
- No $\triangle CBH$, temos:

$$a^2 = h^2 + \overline{CH}^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + (b - \overline{AH})^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos \hat{A})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = a^2 - b^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A} - c^2 \cdot \cos^2 \hat{A} \quad \text{(II)}$$

- De (I) e (II) temos:

$$a^2 - b^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A} - \cancel{c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}} = c^2 - \cancel{c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}} \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

Agora estamos em condições de resolver a situação-problema colocada no início deste item. Retomando o modelo matemático, temos:



Pela lei dos cossenos, temos:

$$d^2 = 100^2 + (36,6)^2 - 2 \cdot 100 \cdot 36,6 \cdot \cos 120° \Rightarrow d^2 = 15\,000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{15\,000} = 50\sqrt{6} \simeq 122,47 \text{ m}$$

Observe que esse valor é o mesmo encontrado na página 16.

Para refletir

- Verifique que a relação vale para $\hat{A}$ agudo no triângulo retângulo e no triângulo obtusângulo.
- Podemos considerar o teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$) como um caso particular da lei dos cossenos (pois $\cos 90° = 0$).

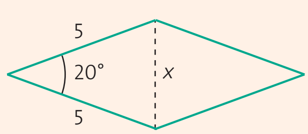
» passo a passo: exercício 4

Exercícios resolvidos

3. O ângulo agudo de um losango mede 20° e seus lados medem 5 cm. Calcule as medidas das diagonais menor e maior do losango.

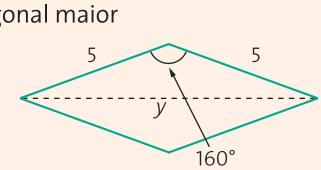
Resolução:

- diagonal menor



$$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \underbrace{\cos 20°}_{\text{usando a tabela da página 23 ou uma calculadora científica}} =$$
$$= 25 + 25 - 50 \cdot 0,94 = 50 - 47 = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{3} \simeq 1,7 \text{ cm}$$

- diagonal maior



$$y^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \underbrace{\cos 160°}_{\cos 160° = -\cos 20°} =$$
$$= 50 + 50 \cdot \overbrace{(-0,94)} = 50 + 47 = 97 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{97} \simeq 9,8 \text{ cm}$$

» Resolvido passo a passo

4. *Geografia*

(UEL-PR) Entre os povos indígenas do Brasil contemporâneo, encontram-se os Yanomami. Estimados em cerca de 9 000 indivíduos, vivem muito isolados nos estados de Roraima e Amazonas, predominantemente na serra do Parima. O espaço de floresta usado por cada aldeia yanomami pode ser descrito esquematicamente como uma série de três círculos concêntricos: o primeiro, com raio de 5 km, abrange a área de uso imediato da comunidade; o segundo, com raio de 10 km, a área de caça individual e da coleta diária familiar; e o terceiro, com raio de 20 km, a área das expedições de caça e coleta coletivas, bem como as roças antigas e novas. Considerando que um indivíduo saia de sua aldeia localizada no centro dos círculos, percorra

8 km em linha reta até um local de caça individual e a seguir percorra mais 8 km em linha reta na direção que forma 120° com a anterior, chegando a um local onde está localizada sua roça antiga, a distância do ponto de partida até este local é:

a) $8\sqrt{3}$.
b) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.
c) $3\sqrt{8}$.
d) $8\sqrt{2}$.
e) $2\sqrt{8}$.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada a descrição do espaço da floresta usado por cada aldeia (*uma série de três círculos concêntricos: o primeiro, com raio de 5 km, abrange a área de uso imediato da comunidade; o segundo, com raio de 10 km, a área de caça individual e da coleta diária familiar; e o terceiro, com raio de 20 km, a área das expedições de caça e coleta coletivas, bem como as roças antigas e novas*).

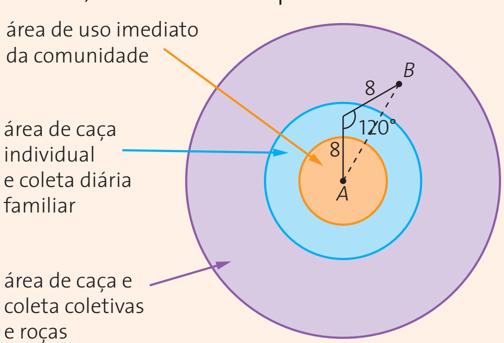
Também é dado o trajeto percorrido pelo indivíduo (*ele sai de sua aldeia localizada no centro dos círculos, percorre 8 km em linha reta até um local de caça individual e a seguir percorre mais 8 km em linha reta na direção que forma 120° com a anterior, chegando a um local onde está localizada sua roça antiga*).

b) O que se pede?

Pede-se a distância que um indivíduo estará do local de partida após caminhar seguindo as indicações do enunciado.

2. Planejando a solução

Devemos interpretar o texto montando o trajeto percorrido pelo indivíduo. Assim podemos escolher a melhor maneira de obter a distância dele ao ponto de partida. De acordo com o texto, montamos o esquema abaixo:



Analisando o esquema anterior, percebemos a necessidade de se obter o lado $\overline{AB}$ do triângulo resultante das informações do enunciado.

Assim, a estratégia se resume a obter o lado $\overline{AB}$, que chamaremos x, do triângulo, usando a lei dos cossenos.

3. Executando o que foi planejado

Chamando a medida do lado $\overline{AB}$ de x, usaremos a lei dos cossenos para obtê-lo:

Lei dos cossenos: $x^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120°$

Como visto no início deste capítulo, o cosseno de 120° equivale ao oposto do cosseno de 60° (ou seja, $\cos 120° = -\cos 60°$).

$x^2 = 64 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot (-\cos 60°) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 64 + 64 + 128 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 128 + 128 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 192 \Rightarrow x = 8\sqrt{3}$

Assim, o indivíduo em questão estará a $8\sqrt{3}$ km do local de origem (aproximadamente 13,6 km).

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

a) Se o indivíduo em questão desejar retornar à área de caça individual, qual é a distância mínima que ele vai percorrer?

b) *Discussão em equipe*

O artigo 231 da Constituição Federal do Brasil, de 1988, reconhece "aos índios sua organização social, costumes, línguas, crenças e tradições, e os direitos originários sobre as terras que tradicionalmente ocupam, competindo à União demarcá-las, proteger e fazer respeitar todos os seus bens". Os Yanomami tiveram suas terras demarcadas em 1992. Porém, cada nova demarcação de terras indígenas gera muita discussão e processos judiciais, principalmente por causa da retirada dos indivíduos não indígenas que residem nessas áreas.

Troque ideias com seus colegas sobre a situação dos índios no Brasil. Discutam sobre estas questões:

- É importante a preservação da cultura indígena?
- Os povos indígenas devem ter direito a essas áreas exclusivas para viver (as tais áreas demarcadas)?

c) *Pesquisa*

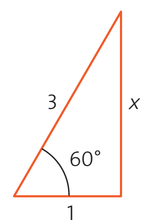
- Além do Brasil, em que outro país vivem os Yanomami? O que significa a palavra Yanomami?
- O que significa a sigla Funai?

Observação: No capítulo 9 do volume 1 e neste primeiro capítulo sobre Trigonometria, estudamos a trigonometria do triângulo. Neste caso, as funções seno e cosseno têm como domínio o conjunto *A* de todos os ângulos do plano, menores do que ou iguais a dois **ângulos retos**. Tais funções são independentes da forma de como se medem os ângulos. Logo, dispensam a consideração de arcos de circunferência, radianos, etc. Isso merecerá atenção especial quando estudarmos, no capítulo 3, sen *x* e cos *x* como funções reais de uma variável real.

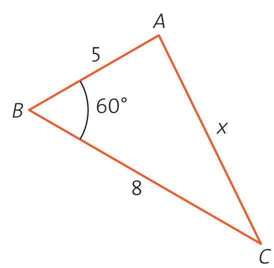
Ângulo reto: ângulo de medida igual a 90°.

Exercícios

17. No triângulo da figura abaixo, calcule a medida *x*.



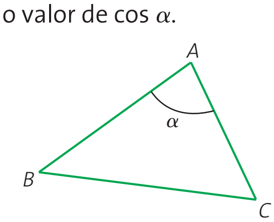
18. No triângulo da figura abaixo, determine *x*.



19. Em um triângulo *ABC* são dados: $\hat{A} = 30°$, $b = 2\sqrt{3}$ e $c = 3$. Calcule a medida do terceiro lado do triângulo.

20. Considere o triângulo *ABC* com: $\hat{A} = 45°$, $a = 4$ e $b = 4\sqrt{2}$. Determine o lado *c*.

21. No triângulo abaixo, $\overline{AC} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{AB} = 3$ e $B\hat{A}C = \alpha$. Determine o valor de cos α.

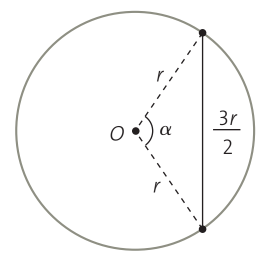


22. Dois lados de um triângulo medem 10 cm e 6 cm e formam entre si um ângulo de 120°. Calcule a medida do terceiro lado.

23. Em um triângulo *ABC* são dados $\hat{A} = 45°$, $b = 8\sqrt{2}$ e $c = 10$. Calcule a medida do terceiro lado.

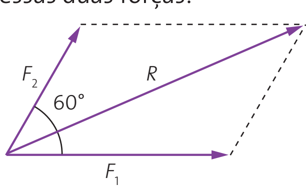
24. ATIVIDADE EM DUPLA Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 14 cm e 10 cm e formam um ângulo de 60°. Calculem as medidas de suas diagonais.

25. ATIVIDADE EM DUPLA (FCMSCSP) Considerando a figura abaixo, qual o valor de sen α?

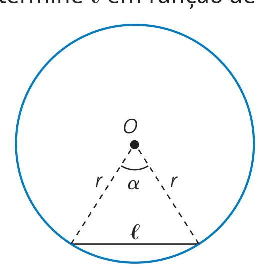


26. DESAFIO *Física*

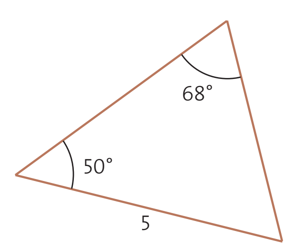
Duas forças de intensidade $F_1 = 8$ N e $F_2 = 12$ N formam entre si um ângulo de 60°. Qual é a intensidade *R* resultante dessas duas forças?



27. Considere uma circunferência de raio *r* e ℓ a medida do lado de um decágono regular inscrito nessa circunferência. Determine ℓ em função de *r*. $\left(\alpha = \dfrac{360°}{n}\right)$.

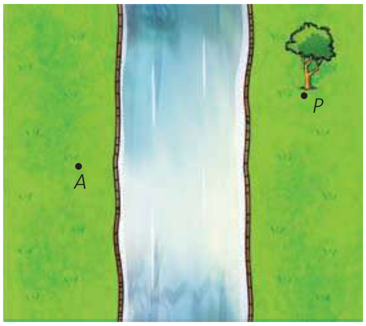


28. DESAFIO Resolva o triângulo abaixo. Use sua calculadora se precisar.

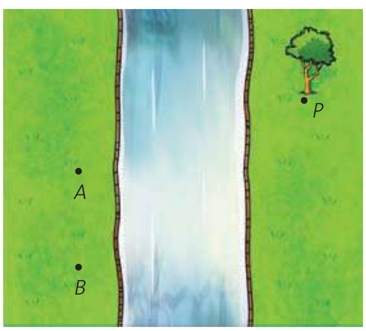


29. ATIVIDADE EM DUPLA *Medida da distância de um ponto A (onde está o observador) a um ponto P inacessível*

Vamos supor que um observador esteja no ponto A e queira saber a distância entre A e P, que é o ponto onde se localiza uma árvore do outro lado de um rio, conforme representado na figura a seguir.



O observador se locomove de A para B, de onde pode ver também o ponto P.

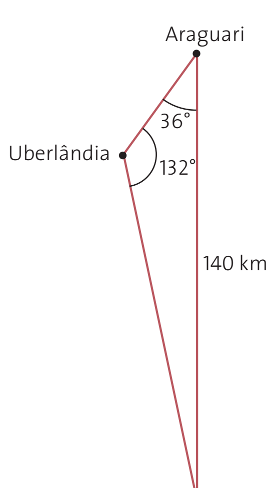


Ilustrações: Dam d'Souza/Arquivo da editora

Qual é a distância de A a P sabendo que a distância de A a B é 2 km, a medida do ângulo $B\hat{A}P$ é igual a 120° e a medida do ângulo $A\hat{B}P$ é igual a 45°?

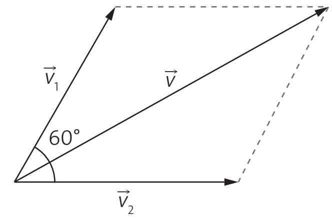
30. ATIVIDADE EM DUPLA Uberaba, Uberlândia e Araguari são cidades do Triângulo Mineiro localizadas conforme a figura a seguir.

A partir dos dados fornecidos, determinem a distância aproximada de Uberaba a Uberlândia.

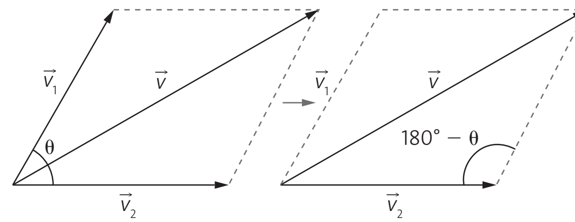


31. ATIVIDADE EM DUPLA *Física*

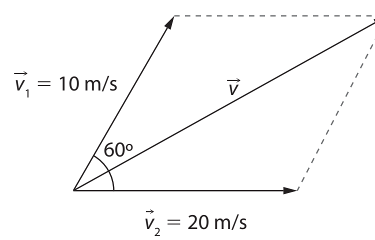
Em Física o módulo do vetor resultante é dado pela diagonal do paralelogramo. Exemplo:



Podemos usar a lei dos cossenos para obter o vetor resultante. Para isso, basta perceber que:



Determinem o vetor resultante $\vec{v}$ na situação abaixo:



32. ATIVIDADE EM DUPLA Em 2010 as prefeituras de São José (SC) e Florianópolis (SC) inauguraram o pórtico e a ponte sobre o rio Araújo, que liga as duas cidades. Veja:

Dircinha/Flickr/Getty Images

Sabendo que o pórtico forma com a pista aproximadamente um triângulo isósceles, que cada lado do pórtico mede 40 m e que o cosseno do ângulo entre as estruturas metálicas do pórtico (ângulo superior) é de 0,875, qual é a medida da base do pórtico por onde passam as pessoas e os automóveis?

a) 16 m
b) 18 m
c) 20 m
d) 22 m
e) 24 m

Tabela de razões trigonométricas

Ângulo	sen	cos	tan	Ângulo	sen	cos	tan
1°	0,017	1,000	0,017	**46°**	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	**47°**	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	**48°**	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	**49°**	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	**50°**	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	**51°**	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	**52°**	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	**53°**	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	**54°**	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	**55°**	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	**56°**	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	**57°**	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	**58°**	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	**59°**	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	**60°**	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	**61°**	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	**62°**	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	**63°**	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	**64°**	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	**65°**	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	**66°**	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	**67°**	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	**68°**	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	**69°**	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	**70°**	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	**71°**	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	**72°**	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	**73°**	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	**74°**	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	**75°**	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	**76°**	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	**77°**	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	**78°**	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	**79°**	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	**80°**	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	**81°**	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	**82°**	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	**83°**	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	**84°**	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	**85°**	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	**86°**	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	**87°**	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	**88°**	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	**89°**	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

Outros contextos

O mundo na palma das mãos

Neo Edmund/Shutterstock/Glow Images

Satélite.

Erich Lessing/Album/Latinstock

Mapa babilônico. Não se sabe, ao certo, a sua idade. Calculam os estudiosos que tenha entre 2400 e 2200 anos antes da Era Cristã.

Sheila Terry/Science Photo Library/Latinstock

Mapa da Terra baseado nos mitos e conhecimentos dos antigos gregos na época de Homero (1º e 2º milênios antes de Cristo).

Durante séculos, os astros e a Matemática foram os instrumentos que permitiram ao ser humano desenhar mapas para se localizar no planeta. Hoje, quando o planeta é visto de cima pelos satélites, seus contornos não têm mais segredo.

Antes mesmo de começar a escrever, é provável que as pessoas das primeiras civilizações rabiscassem representações gráficas dos lugares por onde passavam. O mapa mais antigo de que se tem notícia é de origem babilônica. Trata-se de um tablete de argila cozido e que contém a representação de duas cadeias de montanhas e, no centro delas, um rio, provavelmente o Eufrates.

Por mais de vinte séculos, o ser humano olhou para o céu para calcular distâncias e representá-las nos mapas. Hoje faz o inverso: vai para o espaço e de lá consegue imagens do planeta com uma precisão inalcançável para quem tem os pés na Terra.

No Egito, essa prática começou cedo. Os egípcios já conheciam a triangulação, uma técnica para determinar distâncias baseada na Matemática, que seria depois usada por muitos outros povos. A triangulação utiliza um princípio da Trigonometria: se um lado e dois ângulos de um triângulo são conhecidos, é possível calcular o terceiro ângulo e os outros dois lados. Determinava-se, então, uma base para se chegar às distâncias desejadas. A medição de terras era quase vital para os faraós e sacerdotes, já que seus incontáveis gastos eram garantidos basicamente pelos impostos cobrados sobre a terra, pagos em cereais.

Mas quem achou o mapa do tesouro da Cartografia foram os gregos. “Eles foram o primeiro povo a ter uma base científica de observação”, conta a cartógrafa Regina Vasconcelos, professora da Universidade de São Paulo e membro da Associação Cartográfica Internacional. “A princípio, os gregos acreditavam ser a Terra um disco achatado.” Seus primeiros mapas-múndi, como o de Anaximandro de Mileto (610 a.C.-546 a.C.), eram representados por um círculo onde um oceano circundava os três continentes conhecidos: Europa, Ásia e África.

Ainda no século VI a.C., a escola de Pitágoras apresentou uma Terra esférica. Essa suposição tinha base em observações práticas, como a sombra projetada por um eclipse, e considerações filosóficas, como o fato de a esfera ser a forma geométrica mais perfeita.

Coube ao filósofo e astrônomo Erastóstenes (276 a.C.-194 a.C.) a tarefa de medir a circunferência da Terra. Também conhecedor de Matemática, Erastóstenes usou a Trigonometria em seus cálculos. Ele observou que nos dias 20 e 21 de junho o ângulo que os raios do Sol faziam com a superfície da Terra na cidade de Siena (hoje Assuã) era de 90°. Nos mesmos dias, esse ângulo era de 7° para a cidade de Alexandria. Por meio de relatos de viajantes, Erastóstenes sabia que a distância entre as duas cidades era de cerca de 5 000 estádios, ou 206 250 metros. Mais uma vez usando Trigonometria, ele foi capaz de calcular a circunferência da Terra. Chegou ao resultado de 45 000 quilômetros. Uma precisão razoável, já que o valor real é de 40 076 quilômetros.

Posidônio (135 a.C.-51 a.C.), um século mais tarde, utilizou a distância entre Rodes e Alexandria e a altura da estrela Canopus para fazer o mesmo cálculo, chegando ao resultado de 29 000 quilômetros. Provavelmente, foi esse o cálculo adotado por Cristóvão Colombo, quinze séculos mais tarde, fazendo-o acreditar, pelo tempo de viagem, que havia chegado às Índias.

O sistema de coordenadas geográficas latitude e longitude também é um legado dos gregos, graças, mais uma vez, à Matemática, e também às observações de fenômenos celestes.

Adaptado de: LUCÍRIO, Ivonete D.; HEYMANN, Gisela. *Superinteressante*. Disponível em: <http://super.abril.com.br/tecnologia/localizacao-terra-mundo-palma-maos-440278.shtml>; <http://www.algosobre.com.br/geografia/cartografia.html>. Acesso em: 7 dez. 2012.

Trabalhando com o texto

1. Na época de Erastóstenes não existiam instrumentos de medição precisos, por isso ele cometeu um erro ao calcular que a circunferência da Terra era de 45 000 km. Considerando que a circunferência da Terra é de 40 000 km, qual foi o percentual de erro de Erastóstenes?

Pesquisando e discutindo

2. Quem foi Claudius Ptolomeu e qual foi a sua importância no desenvolvimento da Cartografia?

3. Em que período histórico a Cartografia teve maior relevância? Como é, atualmente, o trabalho do cartógrafo? E qual a importância dessa profissão?

4. Em um mapa da sua cidade, localize diversos pontos importantes como escolas, universidades, hospitais. Depois, compare com mapas feitos por colegas de classe.

Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações em jornais, revistas e nos *sites*:

- Cartografia: <www.cartografia.org.br> e <www.suapesquisa.com/grandesnavegacoes>.
- Artigo: Equador, paralelos e meridianos: apenas linhas imaginárias?: <www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_27/equador.pdf>. Acessos em: 7 dez. 2012.

CAPÍTULO 2

Conceitos trigonométricos básicos

Os ângulos aparecem nos registros da Grécia antiga associados ao estudo dos elementos de um círculo, relacionados com arcos e cordas. As propriedades dos ângulos centrais de uma circunferência eram conhecidas desde o tempo de Eudoxo — astrônomo, matemático e filósofo grego que viveu no século IV a.C. —, que teria usado medidas de ângulos em diversos cálculos, como a determinação das dimensões da Terra e da distância relativa entre o Sol e a Terra.

Reprodução/<http://www.nndb.com>

Eudoxo (408 a.C.-355 a.C.).

Acredita-se que os sumérios e os acadianos, antigos povos habitantes da Mesopotâmia (3500 a.C.), já sabiam medir ângulos — é atribuída aos sumérios a criação da escrita cuneiforme, a mais antiga de que se tem notícia. Feita com o auxílio de uma cunha, a escrita cuneiforme era composta de traços verticais, horizontais e oblíquos.

A divisão do círculo em partes iguais, obtida por meio de ângulos centrais congruentes, aparece bem mais tarde. Hipsicles (século III a.C.) foi um dos primeiros astrônomos gregos a dividir o círculo em 360 partes iguais, mas não há evidência científica da escolha desse número. O que pode tê-la influenciado é o fato de já se saber que o movimento de translação da Terra em torno do Sol se realizava em um período de aproximadamente 360 dias. Mas a hipótese mais provável é ter havido a influência do sistema de numeração de base sexagesimal (base 60), utilizado na Babilônia, justificando também as subdivisões das medidas dos ângulos, que seguem essa base.

A Trigonometria, como seu nome sugere, é o estudo das medidas envolvidas no triângulo. Seu propósito inicial é, portanto, a resolução de problemas relacionados a triângulos. Já estudamos as relações entre os ângulos e os lados de um triângulo retângulo, as razões trigonométricas. Agora, vamos estender esses conceitos a ângulos maiores do que 180°, e para isso contaremos com o apoio de uma circunferência, chamada circunferência trigonométrica, na qual serão considerados os ângulos centrais.

Tábua de argila com escrita cuneiforme.

Philippe Maillard/Album/Latinstock

1 Arcos e ângulos

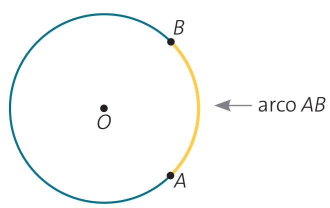
No capítulo 8 do volume 1 e no capítulo anterior estudamos a Trigonometria tal qual ela apareceu há milhares de anos, com o objetivo de resolver triângulos. Nos próximos capítulos vamos fazer um estudo mais abrangente de seno, cosseno e tangente, uma necessidade mais recente da Matemática. Nesse novo contexto, o triângulo retângulo é insuficiente para as definições necessárias e precisamos estabelecer um novo "ambiente" para a Trigonometria: a **circunferência trigonométrica**.

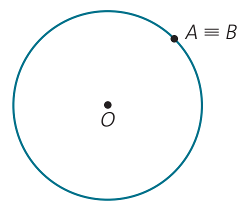
Neste capítulo estudaremos conceitos necessários para esse novo estudo.

Vamos recordar alguns conceitos já conhecidos da **Geometria plana**:

Geometria plana: campo da Matemática que estuda os elementos do plano (retas, circunferências, ângulos, etc.), suas propriedades e relações.

- **Arco geométrico**: é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os. Se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta.

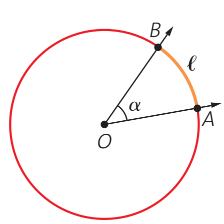




- **Medida e comprimento de um arco**: considere um ponto A sobre uma circunferência de raio r e centro O. Deslocando-se o ponto A sobre a circunferência, ele percorre uma distância ℓ ao mesmo tempo que gira um ângulo α em torno do centro O. Esse movimento do ponto A descreve um arco de circunferência de medida α e comprimento ℓ.

Fique atento!
O comprimento ℓ depende do raio da circunferência, mas a medida α não.

- **Unidades**: para a medida α usam-se geralmente unidades como o "grau" e o "radiano". Para o comprimento ℓ usam-se em geral unidades como "metro", "centímetro", "quilômetro", etc.
- **Arco** e **ângulo central**: todo arco de circunferência tem a mesma medida do ângulo central que o subtende.



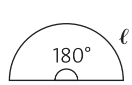
Arco: $\widehat{AB}$
medida de $\widehat{AB}$: α

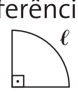
Ângulo central: $A\hat{O}B$
medida de $A\hat{O}B$: α

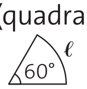
Para refletir
Considere cinco circunferências concêntricas de raios diferentes e um mesmo ângulo central subtendendo arcos em todas elas. Os cinco arcos terão a mesma medida? E terão o mesmo comprimento?

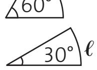
- **Comprimento de uma circunferência de raio r**: $C = 2\pi r$.
- **Medida de uma circunferência em graus**: 360°.

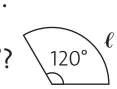
» Junte-se com um colega e respondam: se o comprimento de uma circunferência é 2π cm, qual seria o comprimento de um arco de:

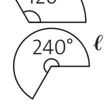
a) 180° (semicircunferência)? 

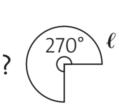
b) 90° (quadrante)? 

c) 60°? 

d) 30°? 

e) 120°? 

f) 240°? 

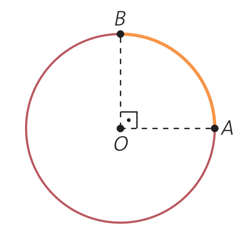
g) 270° (3 quadrantes)? 

2 Unidades para medir arcos de circunferência (ou ângulos)

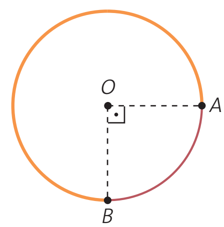
As unidades mais usadas para medir arcos de circunferência (ou ângulos) são o **grau** e o **radiano**.

- **Grau**: quando dividimos uma circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes é um arco de um grau (1°).

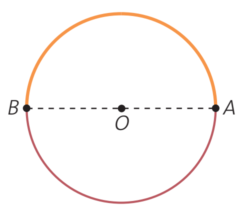
  Considere o arco *AB*, que vai de *A* para *B* no sentido anti-horário:



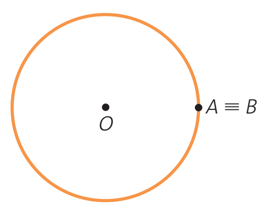
arco *AB* de 90°
(um quarto de volta)



arco *AB* de 270°
(três quartos de volta)



arco *AB* de 180°
(meia volta)

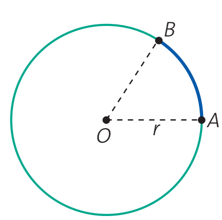


arco *AB* de 360° ou 0°
(uma volta ou nulo)

- **Radiano**: um arco de um radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento retificado é igual ao raio da circunferência.

  Isso deve ser interpretado da seguinte forma: se temos um ângulo central de medida 1 radiano, então ele subtende um arco de medida 1 radiano (lembre que a medida do arco é igual à medida do ângulo central) e comprimento de 1 raio.

  Se temos um ângulo central de medida 2 radianos, então ele subtende um arco de medida 2 radianos e comprimento de 2 raios. Se temos um ângulo central de medida α radianos, então ele subtende um arco de medida α radianos e comprimento de α raios. Assim, se a medida α do arco for dada em radianos, teremos $\ell = \alpha r$.



comprimento do arco *AB* = comprimento de $\overline{OA}$ (r)
ou
$m(\widehat{AB}) = 1$ rad

Você sabia?
Essa divisão em 360 partes congruentes se deu pela influência do sistema sexagesimal (sistema de base 60) e pela associação do movimento de translação da Terra, que dura aproximadamente 360 dias; com isso a circunferência foi dividida em 360 partes, ou seja, 360 *gradus*, na linguagem atual 360 **graus**.
O grau foi dividido em 60 partes menores chamadas *minutae prime* (primeira parte pequena), o que originou a palavra **minuto** $\left(1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}\right)$.
O minuto foi dividido também em 60 partes menores chamadas *minutae secundae* (próxima parte pequena). Daí a origem da palavra **segundo** $\left(1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'\right)$.
Assim, um arco de dois graus, trinta e cinco minutos e quarenta segundos é representado por 2°35'40".

CONTEÚDO DIGITAL

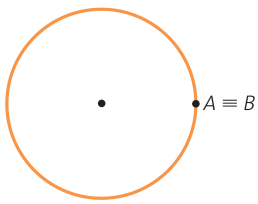
Para refletir
"Esticando" o arco *AB*, a medida do segmento obtido será igual à do raio. Use o transferidor e verifique, aproximadamente, a quantos graus corresponde 1 radiano. 57°

*Comente com os alunos que existem outras unidades para medir arcos, por exemplo, o **grado**, que é um arco obtido a partir da divisão da circunferência em 400 partes iguais. Porém, as unidades mais usadas são o grau e o radiano.*

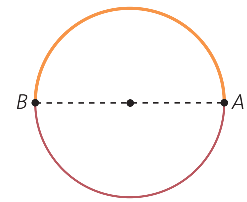
Relação entre as unidades para medir arcos

Lembre-se de que o comprimento C da circunferência de raio r é igual a $C = 2\pi r$, em que $\pi = 3{,}141592...$

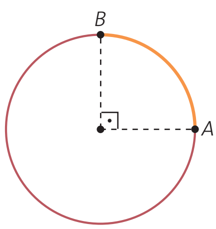
Como cada raio r corresponde a 1 rad, podemos afirmar que o arco correspondente à circunferência mede $2\pi r = 2\pi \cdot 1$ rad $= 2\pi$ rad.



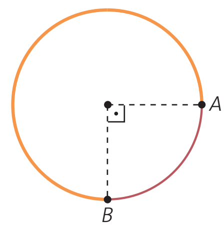
$\overset{\frown}{AB}$: arco de 360° ou arco de 2π rad



$\overset{\frown}{AB}$: arco de 180° $\left(\dfrac{360°}{2}\right)$ ou arco de π rad $\left(\dfrac{2\pi}{2}\text{ rad}\right)$



$\overset{\frown}{AB}$: arco de 90° $\left(\dfrac{360°}{4}\right)$ ou arco de $\dfrac{\pi}{2}$ rad $\left(\dfrac{2\pi}{4}\text{ rad}\right)$



$\overset{\frown}{AB}$: arco de 270° $\left(\dfrac{3}{4}\text{ de } 360°\right)$ ou arco de $\dfrac{3\pi}{2}$ rad $\left(\dfrac{3}{4}\text{ de } 2\pi \text{ rad}\right)$

Observação: Sabendo que um arco de 180° mede π rad, podemos fazer a conversão de unidades usando uma regra de três simples. Porém, recomendamos que você se acostume a fazer as principais conversões entre grau e radiano mentalmente, sem recorrer à regra de três. Esse procedimento é muito simples se observarmos que:

- 90° é $\dfrac{1}{2}$ de 180°; logo, é $\dfrac{1}{2}$ de π rad $\rightarrow 90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad
- 30° é $\dfrac{1}{6}$ de 180°; logo, é $\dfrac{1}{6}$ de π rad $\rightarrow 30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad
- 60° é $\dfrac{1}{3}$ de 180°; logo, é $\dfrac{1}{3}$ de π rad $\rightarrow 60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad
- 45° é $\dfrac{1}{4}$ de 180°; logo, é $\dfrac{1}{4}$ de π rad $\rightarrow 45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad

Você pode (e deve) memorizar essas relações para agilizar as conversões.

Veja mais uma: 120° é o dobro de 60°; logo, $120° = 2 \cdot \dfrac{\pi}{3}\text{ rad} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad.

Exemplos de conversão:

a) 30° em radianos

$$\begin{array}{lcl} \textit{grau} & & \textit{radiano} \\ 180 & \text{———} & \pi \\ 30 & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow \frac{\cancel{180}^{\,6}}{\cancel{30}_{\,1}} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 6x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

Portanto, $30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad.

Fique atento!
Outro modo de resolver:
$30° = \dfrac{180°}{6} = \dfrac{\pi \text{ rad}}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad em graus

grau — *radiano*

$$\begin{array}{ccc} 180 & \text{———} & \pi \\ x & \text{———} & \frac{3\pi}{4} \end{array} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{\cancel{\pi}}{\frac{3\cancel{\pi}}{4}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4x = 540 \Rightarrow x = 135°$$

Logo, $\frac{3\pi}{4}$ rad $= 135°$

c) 1 rad em graus

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{1} \Rightarrow \pi x = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{\pi} \simeq \frac{180}{3,14} \simeq 57,3° \text{ ou } 57°18'$$

Portanto, 1 rad $\simeq 57°18'$.

d) 1 grau em radianos

$$\frac{180}{1} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{180} \simeq \frac{3,14}{180} \simeq 0,017 \text{ rad}$$

Logo, $1° \simeq 0,017$ rad.

e) transformação em radianos ou em graus sem usar regra de três.

- $330° = 11 \cdot 30° = 11 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$
- $225° = 5 \cdot 45° = 5 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$
- $\frac{7\pi}{6} = 7 \cdot 30° = 210°$
- $\frac{7\pi}{4} = 7 \cdot 45° = 315°$
- $\frac{4\pi}{3} = 4 \cdot 60° = 240°$

Fique atento!
É mais simples responder à pergunta "Qual é o comprimento de um arco de 2 radianos em uma circunferência de raio 10 cm?" do que à pergunta "Qual é o comprimento de um arco de 30° em uma circunferência de raio 10 cm?".

Fique atento!
Como 2π rad $= 360°$, os valores que aparecem arredondados são:

$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \simeq 57°17'44,8''$

$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \simeq 0,01745 \text{ rad}$

Fique atento!

- $\frac{\pi}{6} = 30°$; $\frac{\pi}{4} = 45°$; $\frac{\pi}{3} = 60°$
- Quando a unidade não for indicada, subentende-se que é o radiano.

Por exemplo: $\frac{7\pi}{6}$ significa $\frac{7\pi}{6}$ rad.

Exercício resolvido

1. Determine a medida, em radianos, de um arco de 20 cm de comprimento contido em uma circunferência de raio 8 cm.

Resolução:

$\ell = 20$ cm; $r = 8$ cm

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{20}{8} = 2,5 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \frac{8 \text{ cm}}{1 \text{ rad}} = \frac{20 \text{ cm}}{x \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{20}{8} = 2,5 \text{ rad}$$

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Converta em radianos:
   a) 60° c) 210° e) 120° g) 270°
   b) 45° d) 300° f) 150° h) 135°

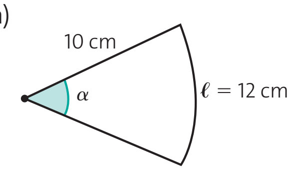
2. Expresse em graus:
   a) $\frac{\pi}{6}$ rad
   b) $\frac{\pi}{2}$ rad
   c) $\frac{\pi}{4}$ rad
   d) $\frac{5\pi}{6}$ rad
   e) $\frac{5\pi}{4}$ rad
   f) $\frac{4\pi}{3}$ rad

3. Calcule, em radianos, a medida do ângulo central correspondente a um arco de comprimento 15 cm contido numa circunferência de raio 3 cm.

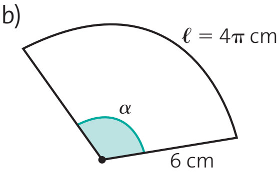
4. Qual é o comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de 45° contido em uma circunferência de raio 2 cm?

5. Determine o ângulo, em radianos, em cada item.

a)



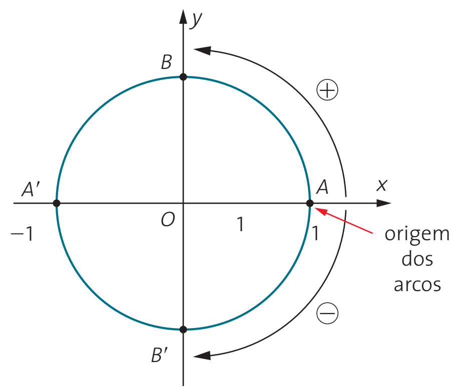
b)



6. Um pêndulo tem 15 cm de comprimento e, no seu movimento, suas posições extremas formam um ângulo de 60°. Qual é o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve?

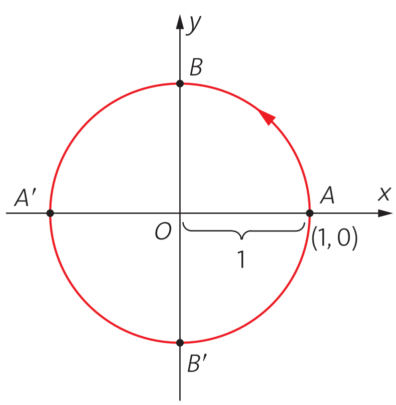
3 Circunferência trigonométrica

Denomina-se **circunferência trigonométrica** a circunferência orientada, de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujo raio tem 1 unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.



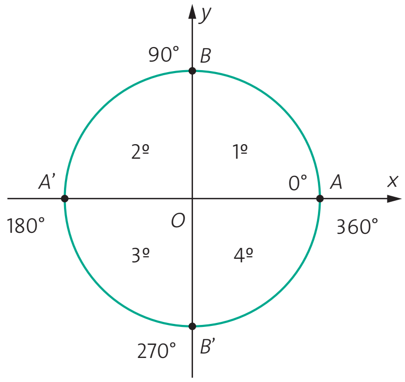
Para refletir
Por que dizemos **circunferência orientada**?

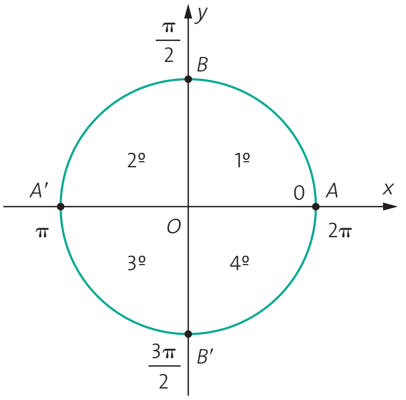
À circunferência trigonométrica de centro O vamos associar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, fixando o ponto A de coordenadas (1, 0) como origem dos arcos (conforme figura abaixo).



Para refletir
Os pontos B, A' e B' correspondem a quais pares ordenados?

Os eixos x e y dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes congruentes chamadas **quadrantes**, numeradas de 1 a 4 e contadas a partir de A, no sentido positivo.





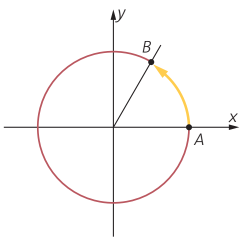
Observações:

1ª) Os pontos A, B, A' e B' são pontos dos eixos e por isso não são considerados pontos dos quadrantes.

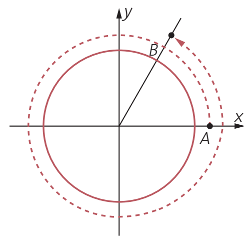
2ª) Para todo ponto (x, y) pertencente à circunferência trigonométrica, temos $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

4 Arcos côngruos (ou congruentes)

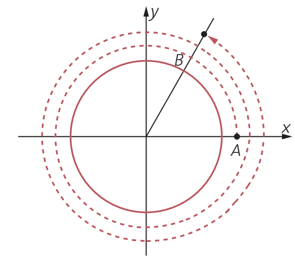
Toda vez que o ponto da circunferência, final do arco iniciado em (1, 0), é o mesmo para dois arcos diferentes (por exemplo, 0 e 2π), chamamos esses arcos de **arcos côngruos** ou **congruentes**. É conveniente notar que todos os arcos côngruos diferem entre si de um múltiplo de 2π, que é o comprimento de cada volta.



Ao número $\frac{\pi}{3}$ está associado o ponto *B*.



Ao número $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ também está associado o ponto *B*.



Ao número $\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$ está associado o mesmo ponto *B*.

Imaginando o ponto como um móvel que se desloca sobre a circunferência no sentido anti-horário, teríamos o seguinte:

- na primeira figura, o ponto deslocou-se $\frac{\pi}{3}$ ou 60° de *A* até *B*;
- na segunda figura, o ponto deslocou-se uma volta inteira (2π ou 360°) e mais $\frac{\pi}{3}$ ou 60°; ou seja, deslocou-se $\frac{7\pi}{3}$ ou 420°;
- na terceira figura, o ponto deslocou-se duas voltas inteiras ($2 \cdot 2\pi$ ou $2 \cdot 360°$) e mais $\frac{\pi}{3}$ ou 60°; ou seja, $\frac{13\pi}{3}$ ou 780°.

Supondo que o ponto se deslocasse *k* voltas inteiras, o número associado à extremidade *B* do arco *AB* seria escrito assim:

$$\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } 60° + k \cdot 360°, \text{ com } k \varnothing \mathbb{Z}$$

Podemos então definir:

> Dois arcos são côngruos ou congruentes quando suas medidas diferem de um múltiplo de 2π rad ou 360°.

Exemplos de arcos côngruos:

a) $30°$ e $30° + 360°$ $\left(\text{ou } \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{\pi}{6} + 2\pi\right)$

b) $45°$ e $45° + 2 \cdot 360°$ $\left(\text{ou } \frac{\pi}{4} \text{ e } \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi\right)$

c) $60°$ e $60° - 3 \cdot 360°$ $\left(\text{ou } \frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{\pi}{3} - 3 \cdot 2\pi\right)$

Para refletir
Com relação ao exemplo **a**, podemos afirmar que são côngruos: 30° e 390° ou $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{13\pi}{6}$. E com relação ao exemplo **b**?

Nesse último exemplo, o sinal negativo significa que as três voltas completas foram dadas no sentido horário. Dizemos, nesse caso, que $60° - 3 \cdot 360° = -1020°$ ou $-\frac{17\pi}{3}$ são arcos negativos.

Fique atento!
De modo geral:
- se um arco mede $\alpha°$, os arcos côngruos a ele podem ser dados pela expressão $\alpha° + k \cdot 360°$, com $k \varnothing \mathbb{Z}$.
- se um arco mede *x* radianos, os arcos côngruos a ele podem ser dados pela expressão $x + k \cdot 2\pi$ ou $x + 2k\pi$, com $k \varnothing \mathbb{Z}$.
- como a cada ponto da circunferência podem estar associados infinitos arcos côngruos, dizemos que o arco da 1ª volta positiva (entre 0 e 2π ou entre 0° e 360°), associado a um ponto da circunferência, é a 1ª determinação positiva de qualquer arco côngruo associado ao mesmo ponto.

Exercícios resolvidos

2. Escreva a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos de:

a) 45°;

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad.

Resolução:

a) expressão geral: $\alpha + k \cdot 360°$

$\alpha = 45°$

$45° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) expressão geral: $x + 2k\pi$

$x = \frac{3\pi}{4}$ rad

$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

3. Qual é o menor arco não negativo côngruo ao arco de 1320°, ou seja, qual é a 1ª determinação positiva do arco de 1320°?

Resolução:

Devemos obter o menor valor não negativo de α tal que $\alpha + k \cdot 360° = 1320°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Então:

$$\begin{array}{r|l} 1320 & 360 \\ \hline 240 & 3 \end{array} \longrightarrow 1320° = 240° + 360° \cdot 3$$

$\underset{\alpha}{240} \quad \underset{k}{3}$

Logo, o arco pedido mede 240°.

> **Para refletir**
> Qual é o significado de um *número não negativo*?

> **Fique atento!**
> Neste exercício dizemos que 240° é a 1ª determinação positiva de 1320° ou que 1320° foi reduzido à 1ª volta.

» Resolvido passo a passo

4. (Enem) Nos *X-Games Brasil*, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado “Mineirinho”, conseguiu realizar a manobra denominada “900”, na modalidade *skate* vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação “900” refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a:

a) uma volta completa.

b) uma volta e meia.

c) duas voltas completas.

d) duas voltas e meia.

e) cinco voltas completas.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É explicado que a denominação “900”, na manobra do *skate* vertical, se refere ao número de graus que o atleta gira em torno do seu próprio corpo.

b) O que se pede?

Pede-se ao aluno que determine quantas voltas o atleta gira quando faz a manobra denominada “900” no *skate* vertical.

2. Planejando a solução

Sabendo que uma volta completa equivale a um giro de 360°, basta determinarmos quantas voltas equivalem a 900°.

Isso pode ser feito de várias maneiras: descobrindo-se quantas vezes o 360° “cabe” em 900°; usando-se proporção; etc.

3. Executando o que foi planejado

- Chamando de x o número de vezes que 360° “cabe” em 900°, temos:

$$\begin{array}{r|l} 900 & 360 \\ \hline & x \end{array}$$

$360x = 900 \Rightarrow x = \frac{900}{360} = 2{,}5$

Portanto, são duas voltas e meia.

- Usando proporção, e chamando de x o número de voltas que equivale a 900°, temos:

$\frac{x}{900} = \frac{1}{360} \Rightarrow x = \frac{900}{360} = 2{,}5$

Note que isso equivale a usar a chamada “regra de três”.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **d**.

5. Ampliando o problema

a) Muitas outras manobras do *skate* vertical (rampa em forma de U) têm no nome números que indicam a rotação em graus do atleta. Uma manobra como “180 *ollie frontside*” consiste em um giro de meia-volta no ar quando o atleta sai da rampa, voltando para ela com o *skate* já na nova posição. Considerando apenas o nome das manobras abaixo, descreva o número de voltas do giro do atleta em cada uma delas:

I. *Fakie* 360

II. 540 *McTwist*

III. 720 *McHawk*

b) *Discussão em equipe*

Skatismo é ou não é esporte? Há quem defenda uma e outra posição. Já quiseram até mesmo incluir essa atividade em olimpíadas. Alguns dos maiores nomes do skatismo mundial dizem que “skatismo não é esporte, é estilo de vida”. Mas é considerado também um “esporte radical” e participa dos *X-Games*, a “olimpíada dos esportes radicais”. Converse com seus colegas e dê sua opinião.

c) *Pesquisa*

Quem foi o primeiro a executar o “900”? Quando e onde isso aconteceu?

Exercícios

7. Escreva a expressão geral dos arcos congruentes a:

a) 60°

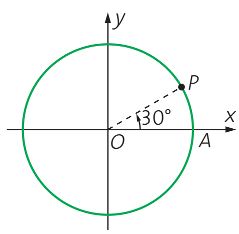
b) 120°

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad

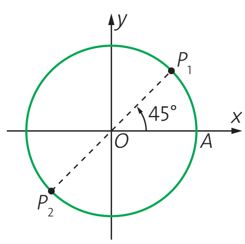
d) $\frac{11\pi}{6}$ rad

8. Dê a expressão geral, em radianos, dos arcos de extremidades nos pontos indicados, considerando a origem em *A*:

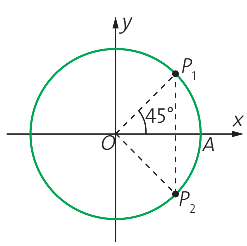
a)



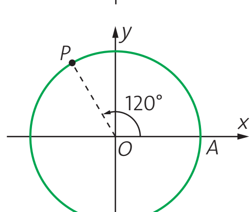
b)



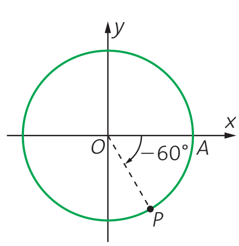
c)



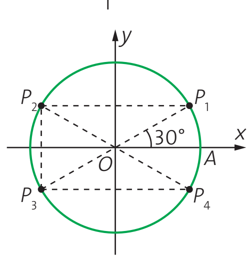
d)



e)



f)



9. ATIVIDADE EM DUPLA Encontrem a 1ª determinação, ou seja, o menor valor não negativo côngruo ao arco de:

a) 780°

b) 1140°

c) −400°

d) $\frac{15\pi}{2}$ rad

e) $\frac{10\pi}{3}$ rad

f) $\frac{9\pi}{2}$ rad

10. ATIVIDADE EM DUPLA Respondam:

a) Convertendo $\frac{7\pi}{4}$ rad em graus, quanto obtemos?

b) Qual é o comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de 60° contido em uma circunferência de raio $r = 1{,}5$ cm?

c) Quanto mede o menor arco não negativo côngruo de 2 650°?

d) Qual é a expressão geral dos arcos côngruos de $\frac{14\pi}{3}$?

11. ATIVIDADE EM DUPLA (PUC-MG) Ao projetar prédios muito altos, os engenheiros devem ter em mente o movimento de oscilação, que é típico de estruturas de arranha-céus. Se o ponto mais alto de um edifício de 400 m descreve um arco de $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$, a medida do arco descrito por esse ponto, em metros, é:

a) π.

b) $\frac{3\pi}{4}$.

c) $\frac{4\pi}{3}$.

d) $\frac{10\pi}{9}$.

e) $\frac{11\pi}{10}$.

12. ATIVIDADE EM DUPLA *História*

Em 1792, durante a Revolução Francesa, houve na França uma reforma de pesos e medidas que culminou na adoção de uma nova unidade de medida de ângulos. Essa unidade dividia o ângulo reto em 100 partes iguais, chamadas **grados**. Um grado (1 gr) é, então, a unidade que divide o ângulo reto em 100 partes iguais, e o minuto divide o grado em 100 partes, bem como o segundo divide o minuto também em 100 partes. Tudo isso para que a unidade de medição de ângulos ficasse em conformidade com o sistema métrico decimal. A ideia não foi muito bem-sucedida, mas até hoje encontramos na maioria das calculadoras científicas as três unidades: grau, radiano e grado.

Com base no texto acima, respondam:

a) A quantos grados equivale meia volta de circunferência? E uma volta inteira?

b) Em qual quadrante termina o arco trigonométrico de 250 gr?

c) A quantos grados equivale 1 rad?

d) A quantos graus equivale 1 gr?

CAPÍTULO

3 Funções trigonométricas

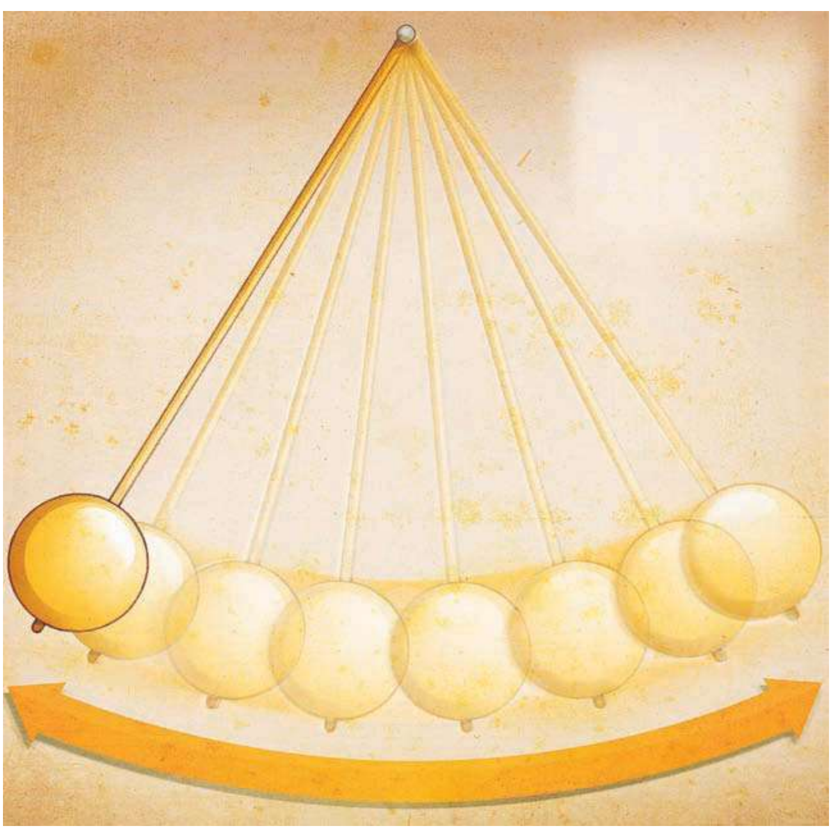
A representação das relações trigonométricas no círculo de raio unitário levou os matemáticos a estudar o seu comportamento esboçando-as graficamente. Assim, foram identificadas como funções e foi Gilles Persone de Roberval (1602-1675) o primeiro a esboçar o gráfico da função seno. O estudo dessas funções teve seu ápice com Joseph Fourier (1768-1830), no campo dos movimentos periódicos.

Um **movimento periódico** é aquele que se repete em intervalos de tempo iguais, como o movimento dos ponteiros de um relógio.

Se esse movimento ocorrer sempre na mesma trajetória e tiver o seu sentido invertido regularmente (em um vaivém, de um lado para o outro), é chamado então **movimento oscilatório** ou **vibratório**, como o pêndulo do relógio ao lado.

Coprid/Shutterstock/Glow Images

Relógio de pêndulo, exemplo de movimento oscilatório (ou vibratório).



Fabio Eugenio/Arquivo da editora

Quando afastado de sua posição de equilíbrio e solto, o pêndulo oscilará em um plano vertical sob a ação da gravidade: o movimento é periódico e oscilatório.

Em várias áreas do conhecimento ocorrem movimentos periódicos oscilatórios cujos comportamentos podem ser estudados e compreendidos se forem descritos por meio de **funções trigonométricas**.

Muito distante de seu embrião no triângulo retângulo, agora a Trigonometria toma proporções ampliadas. E as funções trigonométricas, que estudaremos neste capítulo, expandem seu campo de atuação.

1 Noções iniciais

No capítulo 8 do volume 1, os valores sen α, cos α e tan α foram definidos apenas para ângulos agudos, ou seja, para $0 \ \ell \ \alpha \ \ell \ \frac{\pi}{2}$, com α indicando a medida do ângulo em radianos.

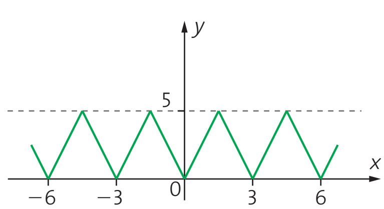
Para esses valores de α foram demonstradas duas importantes relações:

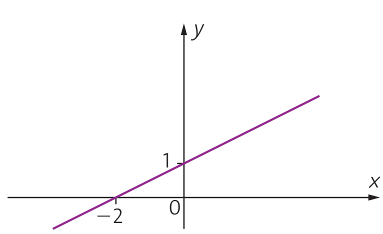
$$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{\tan\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}}$$

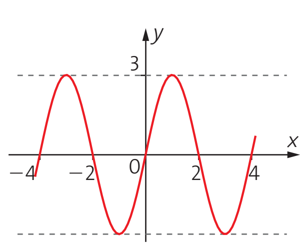
No primeiro capítulo deste volume, os valores de sen α, cos α e tan α foram estendidos para $\alpha = 0$ (ângulo nulo), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ângulo reto) e $\frac{\pi}{2} \ \ell \ \alpha \ \ell \ \pi$ (ângulos obtusos) para possibilitar a resolução de triângulos quaisquer, mas sem a justificativa desses valores.

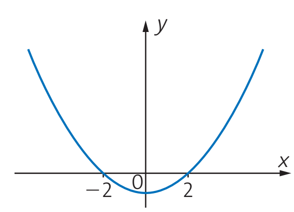
Neste capítulo vamos estender a noção de sen α, cos α e tan α para **todos os valores reais** de α, justificando seus valores de modo que sejam mantidas as duas relações fundamentais $\left(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 \text{ e } \tan\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}\right)$. Assim, poderemos definir seno, cosseno e tangente como funções de variáveis reais, quando for conveniente. Por isso, muitas vezes nos referimos ao seno, ao cosseno e à tangente como **funções trigonométricas**.

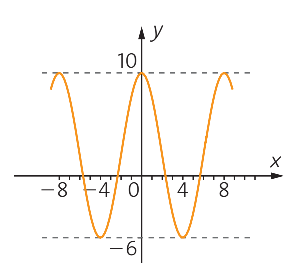
» Formem duplas com seus colegas, leiam o texto a seguir e façam o que se pede.
Um fenômeno periódico é algo que se repete da mesma maneira, em intervalos regulares. A sequência dos dias da semana (segunda, terça, ..., sábado, domingo, segunda, terça, ...) e a dos meses do ano (janeiro, fevereiro, ..., novembro, dezembro, janeiro, ...) são periódicas. No caso dos dias da semana o período é de 7 dias, no dos meses do ano o período é de 12 meses. As funções também podem ser periódicas.
Observem os gráficos das funções a seguir e tentem identificar quais representam funções periódicas. Nesse caso, qual é o período?

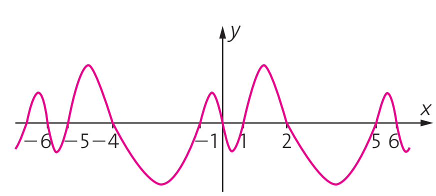
a)


b)


c)


d)


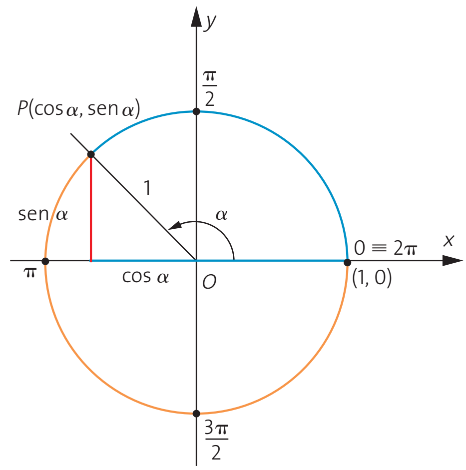
e)


f)


2 A ideia de seno, cosseno e tangente de um número real

Consideremos $P(x, y)$ um ponto da circunferência trigonométrica, ponto final do arco de medida α rad, definido a partir do número real α. Nessas condições, temos:

$\text{sen}\ \alpha =$ ordenada de P $\qquad$ $\cos \alpha =$ abscissa de P $\qquad$ $\tan \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$ (com $\alpha \neq 0$)



Observe que essa definição coincide com aquela dada para ângulos agudos, pois, como todos os pontos da circunferência trigonométrica estão à distância 1 da origem, pela relação de Pitágoras, temos:

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Assim, essa definição, estendida agora para qualquer número real, mantém as relações fundamentais.

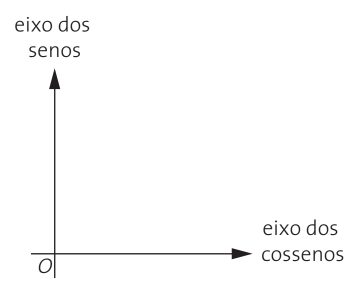
Observe também que $\tan \alpha$ não é definida para alguns valores de α, como para $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ e $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, em que $\cos \alpha = 0$.

Observações:

1ª) Dessa forma, ao associar um número real α a um arco da circunferência, estamos associando o número real ao ponto P cuja abscissa é o cosseno de α e cuja ordenada é o seno de α.

2ª) Apesar de as definições de seno e cosseno na circunferência trigonométrica necessitarem do arco em radianos — por causa da associação com os números reais (como exposto no capítulo anterior) —, não há problema em se referir aos valores dos ângulos em graus. Então, agora podemos pensar em seno e cosseno de arcos (ou ângulos) maiores do que 90°, algo impensável quando se trabalhava com triângulos retângulos. Também podemos pensar em senos e cossenos de ângulos negativos.

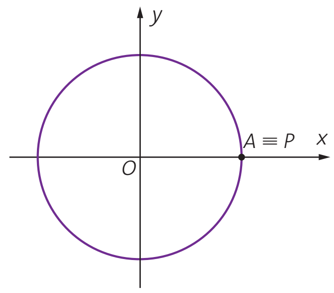
3ª) O eixo das abscissas é também chamado **eixo dos cossenos** e o eixo das ordenadas é também chamado **eixo dos senos**.



3 Valores notáveis do seno e do cosseno

Observe nas figuras a seguir os pontos $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$. Lembrando que a abscissa do ponto P é o cosseno, e a ordenada é o seno, temos:

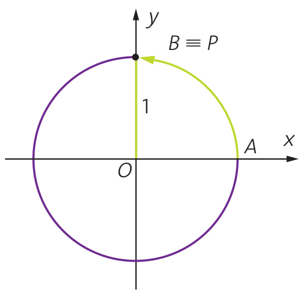
Para refletir
Por que o nome "valores notáveis"?



$x = 0\ (0°)$

$\text{sen } 0 = 0$

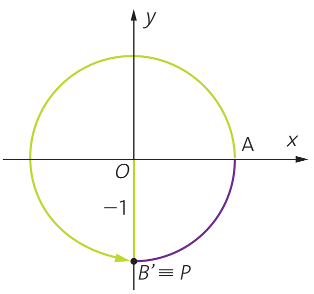
$\cos 0 = 1$



$x = \frac{\pi}{2}\ (90°)$

$\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

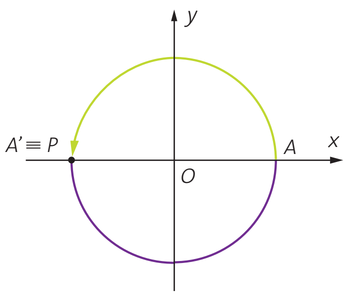
$\cos \frac{\pi}{2} = 0$



$x = \frac{3\pi}{2}\ (270°)$

$\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

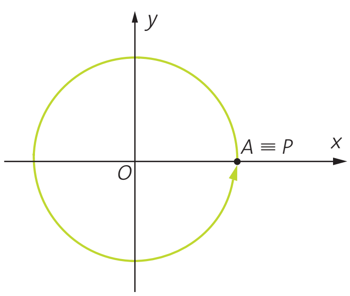
$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$



$x = \pi\ (180°)$

$\text{sen } \pi = 0$

$\cos \pi = -1$



$x = 2\pi\ (360°)$

$\text{sen } 2\pi = 0$

$\cos 2\pi = 1$

Veja a tabela com os valores notáveis do seno e do cosseno:

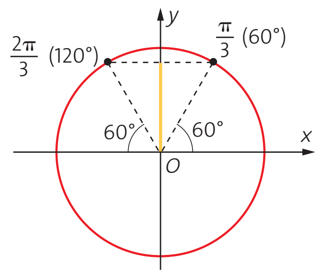
x	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

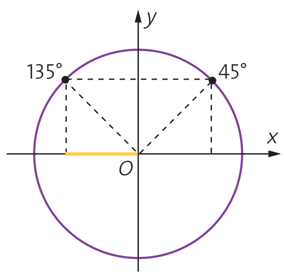
4 Redução ao 1º quadrante

Sabendo os valores da tabela da página 38 e usando a simetria dos pontos da circunferência, podemos obter valores de seno e cosseno de arcos em todos os quadrantes.

Observe como usar a simetria nas figuras a seguir.

Arcos no 2º quadrante

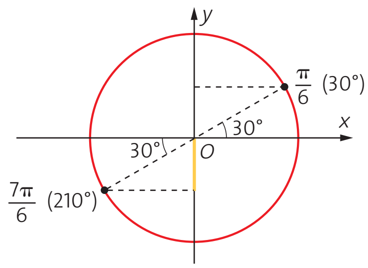


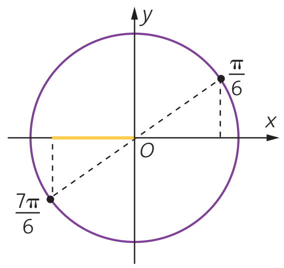


Para determinar o seno ou o cosseno de um ângulo do 2º quadrante, basta compará-lo com o ângulo correspondente do 1º quadrante.

$$\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x$$
$$\cos\,(\pi - x) = -\cos x$$

Arcos no 3º quadrante

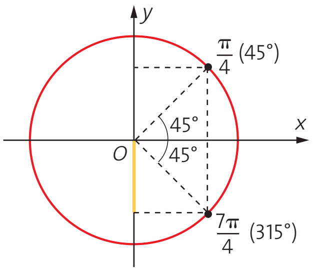


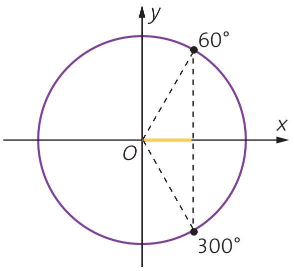


Para determinar o seno ou o cosseno de um ângulo do 3º quadrante, basta compará-lo com o ângulo correspondente do 1º quadrante.

$$\text{sen}\,(\pi + x) = -\text{sen}\,x$$
$$\cos\,(\pi + x) = -\cos x$$

Arcos no 4º quadrante

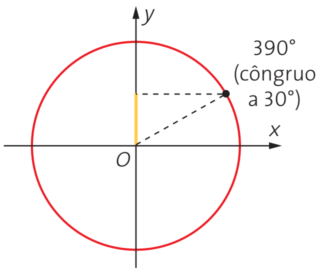


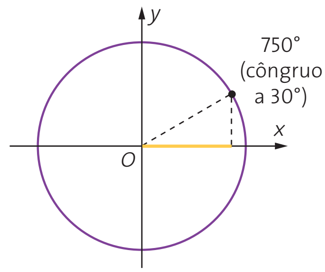


Para determinar o seno ou o cosseno de um ângulo do 4º quadrante, basta compará-lo com o ângulo correspondente do 1º quadrante.

$$\text{sen}\,(2\pi - x) = -\text{sen}\,x$$
$$\cos\,(2\pi - x) = \cos x$$

Arcos maiores do que 360° (fora da 1ª volta)





Fique atento!
Toda vez que o ponto da circunferência final do arco iniciado em (1,0) é o mesmo para dois arcos diferentes por exemplo 0 e 2π, chamamos esses arcos de **arcos côngruos** ou **congruentes**.

Para determinar o seno ou o cosseno de um arco fora da 1ª volta, basta considerar seu côngruo na 1ª volta.

Exercício resolvido

1. Calcule o valor de:

a) $\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}$ b) $\cos 135°$ c) $\text{sen}\,210°$ d) $\cos 300°$

Resolução:

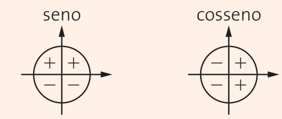
a) $\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3} = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 135° = -\cos 45° = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\,210° = -\text{sen}\,30° = \dfrac{-1}{2}$

d) $\cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

Fique atento!
Perceba os sinais de seno e cosseno em cada quadrante:



Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Em que quadrante temos simultaneamente:
   a) $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$?
   b) $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\cos\alpha > 0$?
   c) $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$?

2. A que quadrante pode pertencer α se:
   a) $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{4}$?
   b) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$?
   c) $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$?
   d) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$?

3. Determine $\cos x$ sabendo que $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{sen}\,x = \dfrac{3}{5}$.
   (Lembre-se de que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.)

4. Use os valores notáveis do seno para calcular pela redução ao 1º quadrante:
   a) $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}$ b) $\text{sen}\,\dfrac{4\pi}{3}$ c) $\text{sen}\,330°$

5. Use os valores notáveis do cosseno e calcule fazendo redução ao 1º quadrante:
   a) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$ c) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ e) $\cos\dfrac{5\pi}{4}$
   b) $\cos 315°$ d) $\cos 330°$ f) $\cos 240°$

6. Use os valores notáveis do seno e calcule:
   a) $\text{sen}\,\dfrac{37\pi}{6}$ d) $\text{sen}\,\dfrac{19\pi}{4}$
   b) $\text{sen}\,(-225°)$ e) $\text{sen}\,630°$
   c) $\text{sen}\,6\pi$ f) $\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. ATIVIDADE EM DUPLA Calculem os possíveis valores reais de x em:
   a) $\text{sen}\,x = -1$ c) $\text{sen}\,x = -\dfrac{1}{2}$
   b) $\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\text{sen}\,x = 0$

8. Calcule usando arcos côngruos:
   a) $\cos\dfrac{9\pi}{4}$ e) $\cos\dfrac{25\pi}{6}$
   b) $\cos(-330°)$ f) $\cos\left(-\dfrac{15\pi}{4}\right)$
   c) $\cos\dfrac{9\pi}{2}$ g) $\cos 11\pi$
   d) $\cos 1140°$ h) $\cos 570°$

5 A ideia geométrica de tangente

Dado um arco AP de medida x na circunferência trigonométrica, definimos tangente de x como o valor obtido assim:

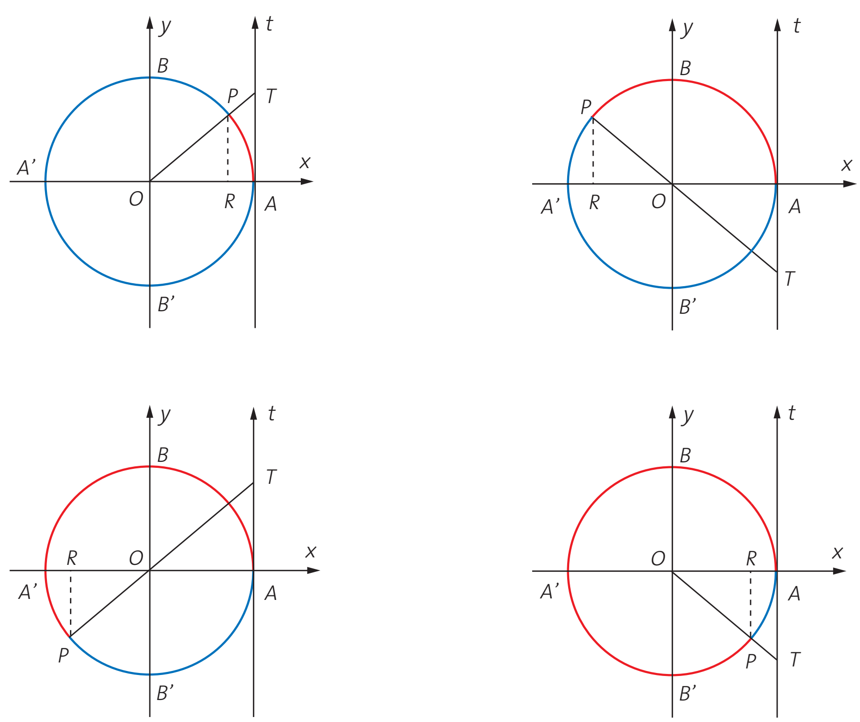
$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \text{ para } \cos x \neq 0$$

Geometricamente, o cosseno de x é a abscissa de P, e o seno de x é a ordenada de P.

Vejamos agora o significado geométrico de tan x.

Para isso, vamos considerar na circunferência trigonométrica a reta t, tangente à circunferência no ponto A, com a mesma orientação do eixo y.

Observe as figuras com P em cada um dos quadrantes:



Para refletir
Justifique que $\triangle ORP$ ℓ $\triangle OAT$.

Em todos os casos, $\triangle ORP$ e $\triangle OAT$ são semelhantes. Dessa semelhança, vem:

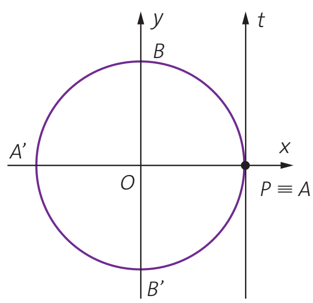
$$\frac{PR}{OR} = \frac{TA}{OA} \text{ ou } \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{TA}{1}$$

Como $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \tan x$ (com $\cos x \neq 0$) e $\tan x = \dfrac{TA}{OA} = \dfrac{TA}{1} = TA$, então temos $\tan x = TA$, ou seja, geometricamente a tan x é TA, medida algébrica de $\overline{TA}$.

Observação: Medida algébrica de $\overline{TA}$ significa que ela pode ser positiva, negativa ou nula.
Se T é o encontro das retas $\overleftrightarrow{OP}$ e t, no caso de essas retas serem paralelas, não existe TA e por isso não existe tan x.

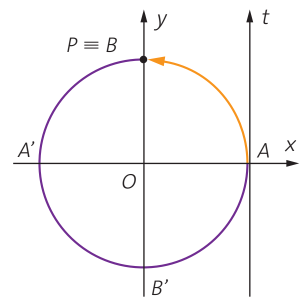
Por exemplo, $\tan \dfrac{\pi}{2}$ e $\tan \dfrac{3\pi}{2}$ não existem $\left(\text{perceba que } \cos \dfrac{\pi}{2} = 0 \text{ e } \cos \dfrac{3\pi}{2} = 0\right)$.

Valores notáveis da tangente



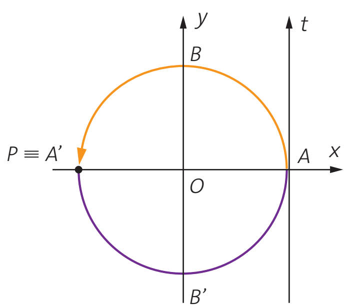
$x = 0$

tan $0 = 0$



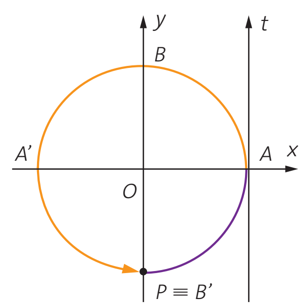
$x = \frac{\pi}{2}$

Não é definida a tan $\frac{\pi}{2}$.



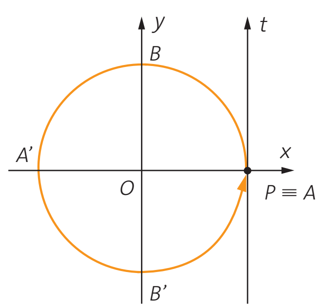
$x = \pi$

tan $\pi = 0$



$x = \frac{3\pi}{2}$

Não é definida a tan $\frac{3\pi}{2}$.



$x = 2\pi$

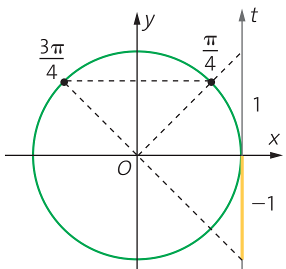
tan $2\pi = 0$

Temos, então, a tabela com os valores notáveis da tangente:

x	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
tan *x*	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	não é definida	0	não é definida	0

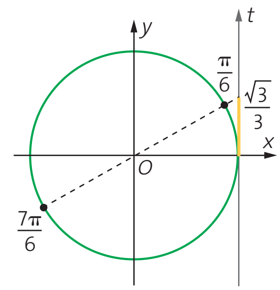
Para o cálculo dos valores das tangentes de ângulos no 2º, 3º, e 4º quadrantes, procedemos exatamente da mesma maneira que fizemos com senos e cossenos: sabendo o sinal da tangente em cada quadrante, basta reduzir cada arco desejado ao 1º quadrante para saber o valor da tangente desse arco.

Acompanhe as simetrias nas figuras abaixo:



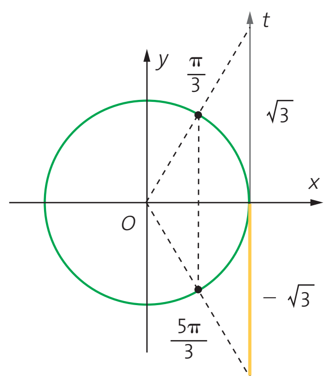
$\tan \frac{3\pi}{4} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

Fique atento!
Comparação de um arco do 2º quadrante com um correspondente do 1º quadrante.
$\tan(\pi - x) = -\tan x$



$\tan \frac{7\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

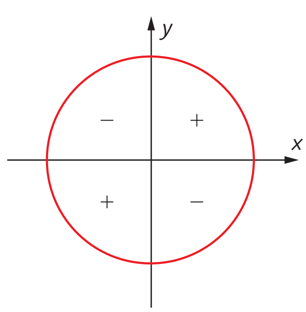
Fique atento!
Comparação de um arco do 3º quadrante com um correspondente do 1º quadrante.
$\tan(\pi + x) = \tan x$



$\tan \frac{5\pi}{3} = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Fique atento!
Comparação de um arco do 4º quadrante com um correspondente do 1º quadrante.
$\tan(2\pi - x) = -\tan x$

Como a reta *t* é orientada "para cima", a tangente é positiva quando *P* é do 1º, ou do 3º, quadrante; é negativa quando *P* é do 2º, ou do 4º, quadrante. Assim, sabemos o sinal da tangente em qualquer quadrante.



Exercícios

9. Calcule o valor de (use os valores notáveis, redução ao 1º quadrante e arcos côngruos):

a) tan 180°
b) tan 0°
c) tan 30°
d) tan 90°
e) tan 45°
f) tan 60°
g) tan 210°
h) tan 300°
i) $\tan \frac{3\pi}{4}$
j) $\tan \frac{4\pi}{3}$
k) $\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
l) $\tan \frac{5\pi}{6}$

10. Represente a expressão geral de x para que se tenha $\tan x = 1$.

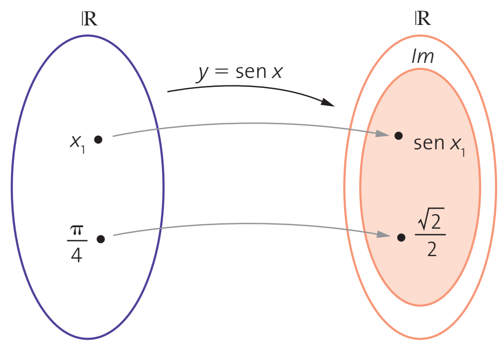
11. Determine x nos seguintes casos, com $x \in \mathbb{R}$:

a) $\tan x = \sqrt{3}$
b) $\tan x = -1$

12. Determine o valor de tan 1935°.

6 Estudo da função seno

Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do seno de um ângulo (ou arco) de x radianos:



Fique atento!
Para cada valor real de x existe sempre um único valor real para sen x.

Assim, definimos a **função trigonométrica seno** como a função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real **sen *x***, ou seja,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = \text{sen } x$$

Já estudamos o processo que permite associar um número real x à medida x de um ângulo (ou arco) para posterior obtenção do valor sen x. Estudamos também como obter os valores sen x para quaisquer valores x de medidas de ângulos (ou arcos). Lembramos que x, medida de ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

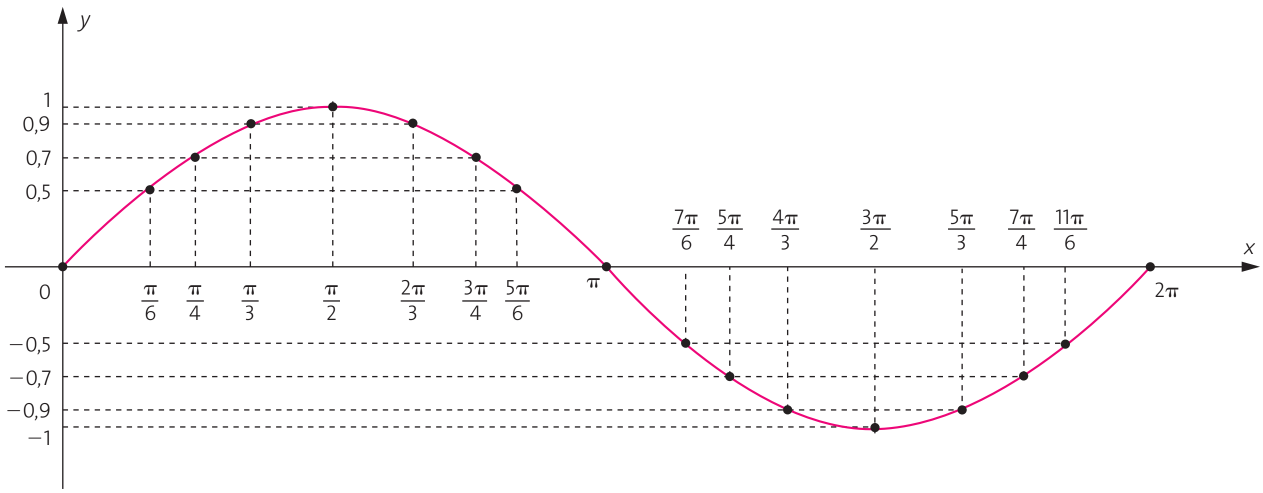
Gráfico da função seno

Para construir o gráfico da função seno vamos construir uma tabela com valores de x da 1ª volta positiva. O seno, em alguns casos, será usado com valores aproximados.

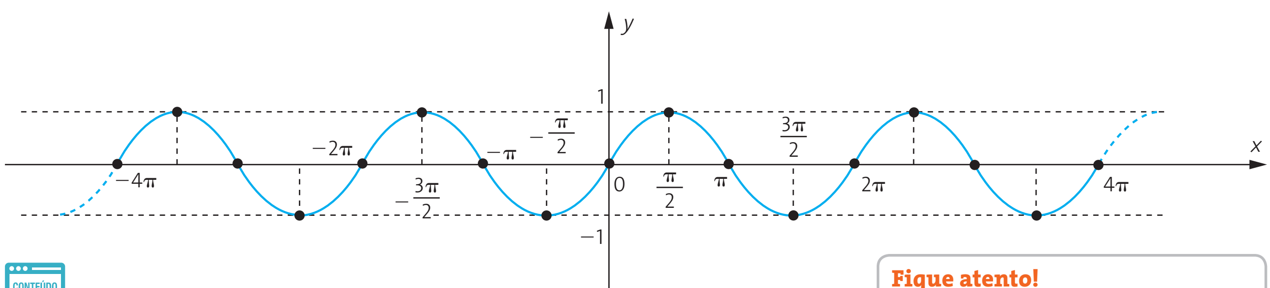
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sen *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen *x*	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen *x*	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	21	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sen *x*	−0,5	−0,7	−0,9	−1	−0,9	−0,7	−0,5	0

Veja o gráfico inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$ e depois para $x \in \mathbb{R}$:



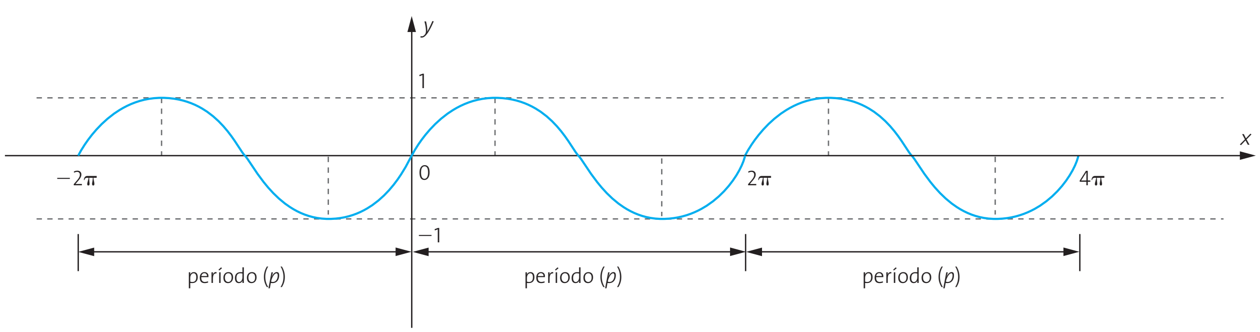
Como a função $f(x) = \text{sen } x$ é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é $\mathbb{R}$, a curva pode ser estendida para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen } x$, é a curva chamada **senoide**, que tem o seguinte aspecto:



CONTEÚDO DIGITAL

Fique atento!
O gráfico de $f(x) = \text{sen } x$ é simétrico em relação à origem.

Periodicidade da função seno



Observando o gráfico da função seno, vemos que a função repete periodicamente seus valores nos intervalos ..., $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ... Daí dizermos que a função seno é **periódica**.

Observe no gráfico que:

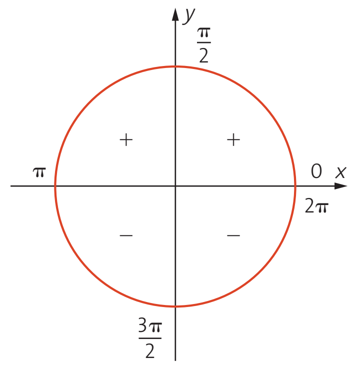
$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \dots \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Dizemos então que o **período** da função seno é 2π e indicamos assim: $p = 2\pi$.

Para encontrar o período basta observar no gráfico o deslocamento horizontal necessário para que ele comece a se repetir.

Sinal da função seno

Observando o sinal da função seno, vemos que a função é **positiva** para valores do 1º e 2º quadrantes e **negativa** para valores do 3º e 4º quadrantes.



Para refletir
Quais são os valores de sen x para $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, x = \frac{3\pi}{2}$ e seus arcos côngruos?

Observações sobre a função seno:

1ª) Função seno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$.

2ª) A função seno tem $D = \mathbb{R}$ e $Im = [-1, 1]$.

3ª) A função seno não é injetiva nem sobrejetiva.

4ª) A função seno é função ímpar, isto é, $\text{sen } x = -\text{sen } x$, para todo x real.

5ª) A função seno é periódica de período $p = 2\pi$.

6ª) • $\text{sen } x = 0$, para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
• $\text{sen } x \simeq 0$, para x do 1º e 2º quadrantes e para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
• $\text{sen } x \ \ell \ 0$, para x do 3º e 4º quadrantes e para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Fique atento!
x é a medida do arco em radianos.

Exercício resolvido

2. Determine os valores reais que m pode assumir para que exista um número real x que satisfaça a igualdade $\text{sen } x = 2m - 3$.

Resolução:

Condição: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2m - 3 \leq 1$

Resolvendo a dupla desigualdade, temos:

$-1 \leq 2m - 3 \leq 1 \Rightarrow -1 + 3 \leq 2m \leq 1 + 3 \Rightarrow 2 \leq 2m \leq 4 \Rightarrow 1 \leq m \leq 2$

Logo, os valores de m são dados pelo conjunto $\{m \in \mathbb{R} \mid 1 \leq m \leq 2\}$.

Exercício

13. Determine os valores reais de m para os quais as seguintes equações tenham solução:

a) $\text{sen } x = 2m - 7$

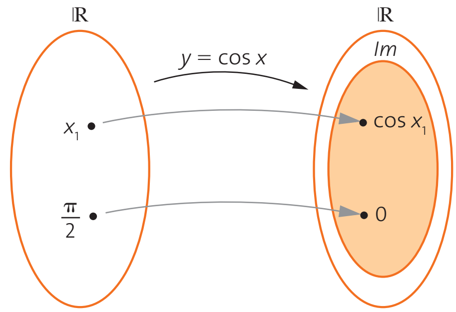
b) $\text{sen } x = 3m - 2$

c) $\text{sen } x = m^2 - 1$

d) $4m + \text{sen } x = 1$

7 Estudo da função cosseno

Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do cosseno de um ângulo (ou arco) de x radianos:



Fique atento!
Para cada valor real de x existe sempre um único valor real para $\cos x$.

Assim, definimos a **função trigonométrica cosseno** como a função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real $\cos x$, ou seja:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \cos x$$

Já estudamos o processo que permite associar um número real x à medida x de um ângulo (ou arco) para posterior obtenção do valor $\cos x$. Estudamos também como obter os valores $\cos x$ para quaisquer valores x de medidas de ângulos (ou arcos). Lembramos que x, medida de ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

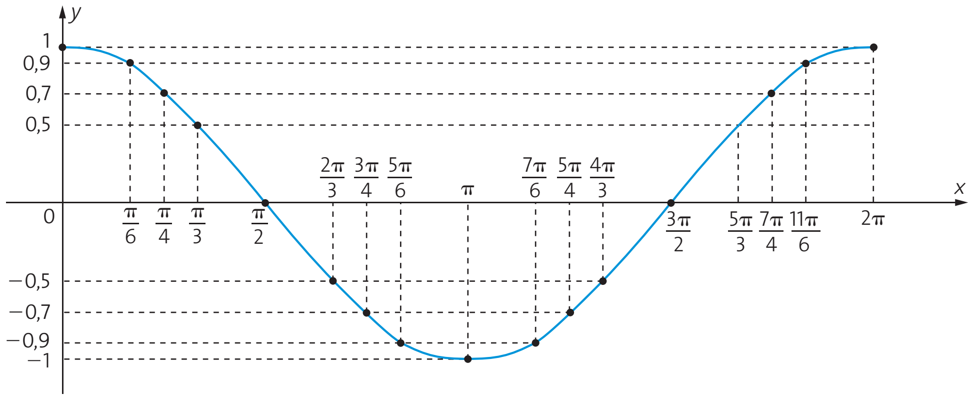
Gráfico da função cosseno

Vamos construir o gráfico da função $f(x) = \cos x$, inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$ e depois para $x \in \mathbb{R}$. Alguns valores de $\cos x$ serão aproximados.

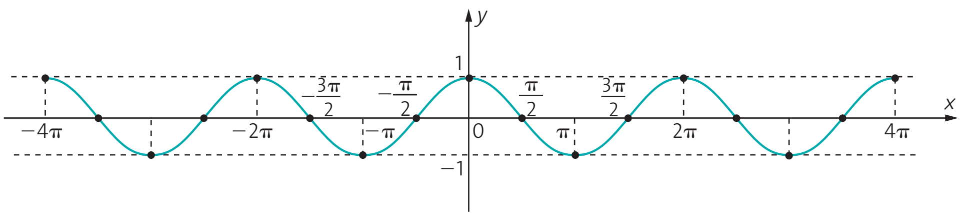
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\cos x$	1	0,9	0,7	0,5	0	$-0,5$	$-0,7$	$-0,9$	-1

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	$-0,9$	$-0,7$	$-0,5$	0	0,5	0,7	0,9	1

Veja o gráfico inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$ e depois para $x \in \mathbb{R}$.



Como a função $f(x) = \cos x$ é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é $\mathbb{R}$, a curva pode ser estendida para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$, é a curva chamada **cossenoide**, que tem o seguinte aspecto:



Fique atento!
O gráfico de $f(x) = \cos x$ é simétrico em relação ao eixo y.

Observações sobre a função cosseno:

1ª) A cossenoide **não** é uma nova curva, e sim uma senoide transladada $\frac{\pi}{2}$ unidade para a direita. Observe na senoide da página 45 que, se colocarmos o eixo y no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{2}$ teremos exatamente o gráfico da cossenoide. Isso faz com que a maioria dos aspectos relevantes da função cosseno seja a mesma da função seno.

2ª) O domínio é o mesmo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ tem $D = \mathbb{R}$.

3ª) A imagem é a mesma: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ tem $Im = [-1, 1]$.

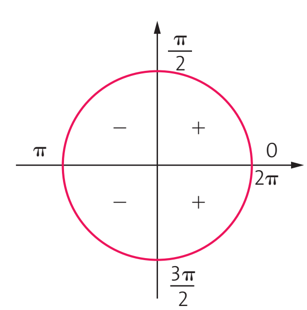
4ª) O período é o mesmo: a função cosseno é periódica de período $p = 2\pi$.

5ª) A função cosseno também não é nem injetiva nem sobrejetiva.

As diferenças entre a função cosseno e a função seno ficam por conta dos aspectos que dependem dos valores das imagens associados aos domínios, que transladam $\frac{\pi}{2}$ unidade. Por exemplo, a função seno é ímpar e a função cosseno é par, pois $\cos(-x) = \cos x$, para todo x do $D(f) = \mathbb{R}$.

Sinal da função cosseno

Observando o sinal da função $f(x) = \cos x$, vemos que a função cosseno é **positiva** para valores do 1º e 4º quadrantes e **negativa** para valores do 2º e 3º quadrantes.



Para refletir
Quais são os valores de $\cos x$ para $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$ e seus arcos côngruos?

Exercícios

14. Determine os valores reais de m para que exista um número real x que satisfaça as seguintes igualdades:
 a) $\cos x = 2m + 5$
 b) $\cos x = 3m + 4$
 c) $\cos x = 1 - m^2$
 d) $\cos x + 5m = 6$

15. Considerando f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$:
 a) calcule $f(\pi)$, $g(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{g\left(\frac{\pi}{6}\right)}$, $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ e $g\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;
 b) determine $x \in [0, 2\pi]$ tal que $f(x) = g(x)$;
 c) determine se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $f(x) = g(x)$ (justifique sua resposta).

16. Veja como determinar os valores máximo e mínimo da função $y = 2 + 3 \cdot \text{sen } x$.
 Para sen $x = -1$, que é o valor mínimo de sen x, temos:
 $y = 2 + 3(-1) = -1$
 Para sen $x = 1$, que é o valor máximo de sen x, temos:
 $y = 2 + 3 \cdot 1 = 5$
 Logo, $y_{\text{mín}} = -1$ e $y_{\text{máx}} = 5$.
 Agora é com você: Determine os valores máximo e mínimo de y em cada item:
 a) $y = \text{sen } x - 10$
 b) $y = 6 - 10 \cdot \cos x$
 c) $y = 3 \cdot \cos^2 x + 1$
 d) $y = \text{sen } x + \cos x$

17. DESAFIO Seja $f(x) = \text{sen } x + \cos x$. Calcule o valor de $\sqrt{6} \cdot f\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

8 Senoides

Além das funções trigonométricas estudadas existem outras que envolvem seno e cosseno, que chamaremos **senoides**. Por exemplo, as funções f e g tal que:

a) $f(x) = 2 + \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = \text{sen } 2x$, com $x \in \mathbb{R}$.

As senoides e os fenômenos periódicos

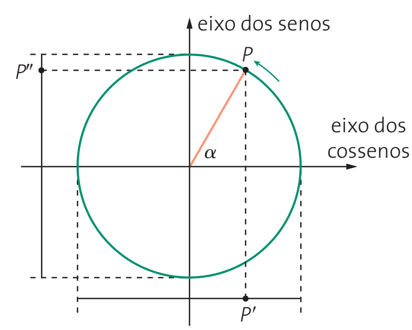
A natureza está repleta de fenômenos físicos ditos periódicos, ou seja, que se repetem sem alteração cada vez que transcorre um intervalo de tempo determinado (período). Por exemplo, os movimentos das marés, da radiação eletromagnética, da luz visível, dos pêndulos, das molas, são todos periódicos.

As funções trigonométricas, principalmente as senoides, são excelentes para descrever tais fenômenos, uma vez que são funções periódicas. A maneira mais básica de associar as senoides a um movimento periódico é imaginar um ponto percorrendo toda a circunferência trigonométrica. A projeção desse ponto no eixo dos senos ou no eixo dos cossenos descreve um movimento periódico.

A projeção do ponto $P(x, y)$ sobre o eixo dos cossenos descreve um movimento cuja **equação** é do tipo $x = \cos \alpha$, e sobre o eixo dos senos é $y = \text{sen } \alpha$.

Equação: sentença matemática que apresenta o sinal de igualdade (=) e uma ou mais incógnitas que representam números desconhecidos.

Dessa forma podemos associar a qualquer movimento periódico uma função senoidal do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen } (cx + d)$ ou $f(x) = a + b \cdot \cos (cx + d)$, cuja imagem é dada por $[a - |b|, a + |b|]$, e cujo período é dado por $\dfrac{2\pi}{|c|}$. Na descrição dos fenômenos periódicos, em geral se opta por valores b e c positivos, de forma que a imagem da senoide nesses casos passa a ser $[a - b; a + b]$ e o período fica sendo $\dfrac{2\pi}{c}$.



passo a passo: exercício 6

Exercícios resolvidos

3. Sendo $f(x) = 2 + \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = \text{sen } 2x$, com $x \in \mathbb{R}$, determine $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Resolução:

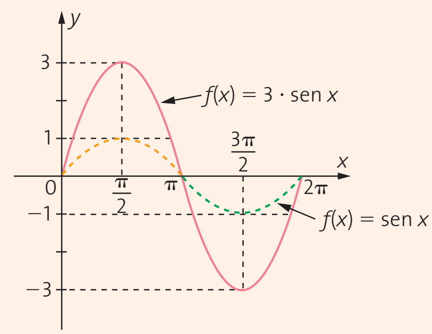
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + \cos\frac{\pi}{3} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\pi = 0$$

4. Construa e analise os gráficos da função $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$ dando seu domínio, sua imagem e seu período. (Construa apenas um período completo.)

Resolução:

Fique atento!
Verifique que mudanças ocorreram nos gráficos de: $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$ com relação a $f(x) = \text{sen } x$.

x	sen x	$3 \cdot$ sen x	$y = f(x)$
0	0	$3 \cdot 0 = 0$	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$3 \cdot 1 = 3$	3
π	0	$3 \cdot 0 = 0$	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$3(-1) = -3$	-3
2π	0	$3 \cdot 0 = 0$	0

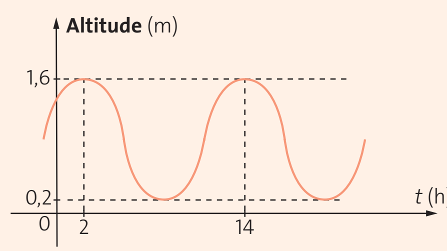


$D = \mathbb{R}$, $Im = [-3, 3]$, $p = 2\pi$

5. Descreva com uma senoide a altitude do mar em um dia em determinado local sabendo que nesse dia, na maré alta, a altitude do mar foi 1,6 m e na maré baixa foi 0,2 m. As marés altas ocorrem às 2h e às 14h, e as marés baixas ocorrem às 8h e às 20h. Considere a contagem do tempo em horas a partir da meia-noite.

Resolução:

O texto pode ser resumido pelo gráfico ao lado.



Então, precisamos obter as constantes a, b, c e d em $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$ ou em $f(x) = a + b \cdot \cos\,(cx + d)$. Optaremos por $h(t) = a + b \cdot \text{sen}\,(ct + d)$ sem que haja motivo específico para isso. Optaremos também por b e c positivos, que é o mais comum.

Assim, temos:

$$\begin{cases} a + b = 1{,}6 \\ a - b = 0{,}2 \end{cases} \Rightarrow a = 0{,}9 \text{ e } b = 0{,}7$$

O período das marés é de $14 - 2 = 12$ h. Então: $\frac{2\pi}{c} = 12 \Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$

Existe deslocamento horizontal da senoide. Então, para obter a constante d, percebemos que nesse caso o máximo seno ocorre quando $t = 2$; como já sabemos que $c = \frac{\pi}{6}$, temos:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2 + d\right) = 1 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + d\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} + d = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Variando k, encontramos os possíveis valores de d, que são $\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, etc. Optaremos por $d = \frac{\pi}{6}$.

Assim, nesse dia e nesse local, a altitude do mar pode ser descrita por $h(t) = 0{,}9 + 0{,}7 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

» Resolvido passo a passo

6. (FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800 \text{ sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right)$, onde $f(x)$ é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um inteiro tal que $0 \leq x \leq 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a:

a) 600.
b) 800.
c) 900.
d) 1500.
e) 1600.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada uma função senoide para que o aluno obtenha as informações de que precisa a partir da interpretação dessa função.

b) O que se pede?

Pede-se a estimativa da máxima quantidade de pessoas no supermercado, durante as 24 horas em que ele fica aberto, e também a estimativa da mínima quantidade. Feito isso, pede-se a diferença entre esses dois valores.

2. Planejando a solução

Precisamos do valor máximo e do mínimo da função, obtendo depois a diferença. Lembrando que $-1 \leq \text{sen } a \leq 1$, para obter o máximo e o mínimo valor de uma senoide, basta calcular o valor de $f(x)$ para quando o seno valer 1 e -1. Depois, comparamos os dois valores para estabelecer qual é o mínimo e qual é o máximo.

3. Executando o que foi planejado

Quando tivermos $\text{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right) = 1$, $f(x)$ valerá $900 - 800 \cdot 1 = 100$; portanto, a estimativa é de que teremos 100 pessoas no supermercado.

Quando tivermos $\text{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right) = -1$, $f(x)$ valerá $900 - 800 \cdot (-1) = 1700$, portanto a estimativa é de que teremos 1700 pessoas no supermercado.

Logo, o mínimo estimado são 100 pessoas e o máximo são 1700 pessoas. A diferença procurada é 1600 pessoas.

4. Emitindo a resposta

Alternativa **e**.

5. Ampliando o problema

Nos itens **a**, **b** e **c** abaixo, considere que o valor de x seja exatamente o horário durante o dia, contado desde 0h (meia-noite de um dia) até 24h (meia-noite do dia seguinte).

a) Nesse supermercado, em que horário do dia se estima ter o maior número de clientes?

b) E em que horário do dia a estimativa é de se ter o menor número de clientes?

c) Em que horário do dia a estimativa é de se ter 1300 clientes?

d) *Discussão em equipe*

Troque ideias com seus colegas sobre o fluxo de clientes em supermercados, bancos, lojas, restaurantes. Vocês acham que existem horários do dia em que é possível prever que haverá mais gente, e que isso aconteça regularmente todos os dias? Ou isso muda de dia para dia? Comparem suas conclusões com os valores obtidos nos itens **a** e **b** e analisem se a função dada no enunciado é coerente com a visão que a equipe tem da realidade.

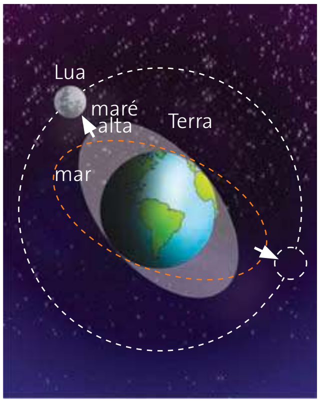
Você sabia?

Os movimentos periódicos de elevação e abaixamento da superfície dos oceanos, mares e lagos são provocados pela força gravitacional da Lua e do Sol sobre a Terra. As marés ocorrem a intervalos regulares de 6 horas e 12 minutos. Portanto, a cada 24 horas e 48 minutos, o mar sobe e desce duas vezes, constituindo o fluxo e refluxo das águas. À medida que a Terra gira, outras regiões passam a sofrer elevações, como se a subida de nível se deslocasse, seguindo a Lua.

No lado oposto da Terra dá-se o mesmo: as águas também se erguem, de forma que uma elevação compensa a outra. Assim, nas regiões da costa, essas elevações das águas correspondem às marés altas.

Enquanto o nível das águas sobe em dois lados opostos na Terra, em outras duas regiões do globo (também diametralmente opostas) ele desce: é a maré baixa.

A diferença entre a maré baixa e a maré alta é denominada **amplitude das marés**, medida por meio de uma régua graduada ou marégrafo. Como o movimento das marés é periódico, as funções trigonométricas são amplamente utilizadas para se fazer uma modelagem matemática desse fenômeno.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

Matemática e tecnologia

Gráfico de funções trigonométricas no computador

Agora, vamos aprender, ou relembrar, como construir gráficos de funções quadráticas usando o *software* livre **Geogebra**.

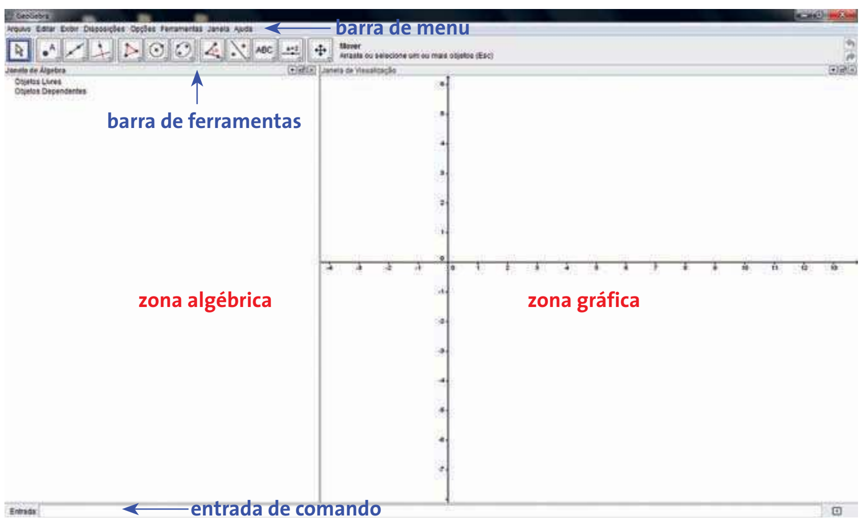
Trata-se de um *software* matemático, criado por Markus Hohenwarter, que reúne Álgebra e Geometria. Ele pode ser utilizado em todos os níveis de ensino e já recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

A instalação desse *software* é simples:

- Acesse o *site* <www.geogebra.org/cms/pt_BR> e clique em “Download”;
- Clique em “Webstart”, faça o *download* e siga os passos automáticos de instalação do programa.

Depois disso, você já pode usá-lo.

Ao abrir o programa, você verá a seguinte tela:



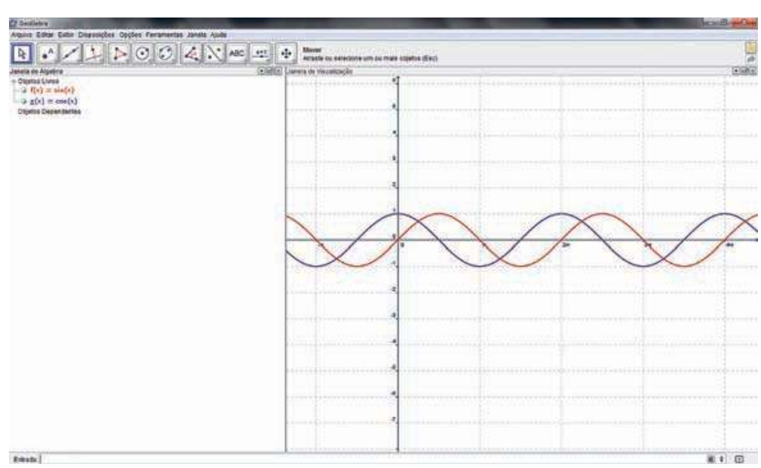
Fotos: Reprodução/<www.geogebra.org>

Depois de ter o programa instalado, faça os exercícios a seguir.

1. Construa o gráfico das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$, como a seguir. Para isso siga os passos:

1º passo: No campo “Entrada” (situado na parte inferior da tela) insira a função:

$f(x) = \sin x$ e tecle “Enter”. Em seguida, no mesmo campo digite $g(x) = \cos x$ e tecle “Enter”. Observe que $f(x) = \sin x$ é o mesmo que $f(x) = \text{sen } x$.



2º passo: Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do *mouse* sobre o gráfico da função seno e abrirá uma aba com a opção “Propriedades...”; clique sobre ela. Assim, abrirá uma janela com várias opções; clique na aba “Cor” e escolha uma nova cor para o seu gráfico. Em seguida, clique na aba “Estilo” e coloque a espessura da linha igual a 5. Feche a janela e observe que o gráfico ficou destacado. Faça o mesmo com a função cosseno.

3º passo: Na barra de ferramentas (parte superior da tela) clique na aba “Exibir” e depois em “Malha”. Para colocar o eixo x na escala de π radianos, clique na aba “Opções” e em seguida em “Configurações”. Abra a aba “Janela de visualização”. Clique sobre “Eixo X” e selecione em “Unidade” a opção π. A opção “Distância” não deve estar selecionada.

Fique atento!

Você pode mover, ampliar ou reduzir sua imagem utilizando  da barra de tarefas. Outra opção para aumentar ou diminuir o *zoom* é utilizar o *scroll* do *mouse* (aquela “bolinha” que fica na parte superior da maioria dos *mouses*).
Salve sua construção.

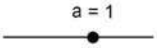
Agora, de acordo com a construção, responda às questões:

a) Qual a imagem das funções f e g?

b) Qual o período das funções f e g?

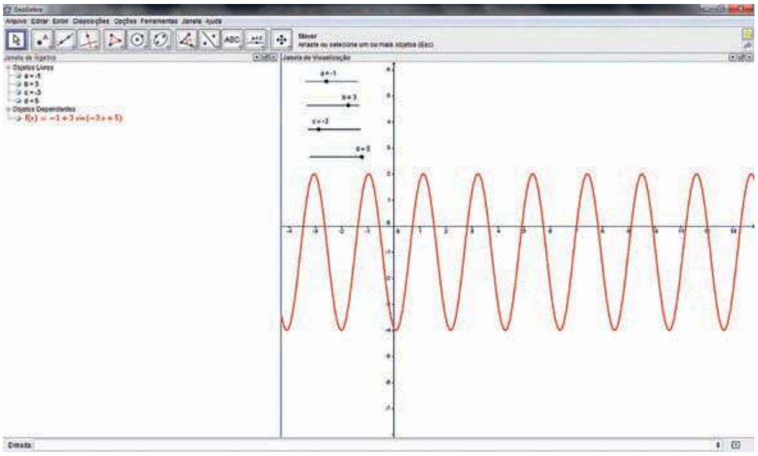
c) Quantos pontos de intersecção existem entre as funções f e g no intervalo $[0, 2\pi]$?

2. Abra um novo documento e siga os passos a seguir:

1º passo: Na barra de ferramentas clique com o botão esquerdo do *mouse*, inicialmente na opção “controle deslizante”  e, em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização (Zona gráfica) e tecle “Enter”. Nesse momento aparecerá o parâmetro a (com valor inicial igual a 1) 

.
Repita a operação e insira novos parâmetros (b, c e d).

2º passo: No campo “Entrada” (situado na parte inferior da tela) insira a função: $f(x) = a + b$*sin(c*$x + d$) e tecle “Enter”. Observe que “*” significa a operação de multiplicação. Dessa forma você terá o gráfico da função $f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$. Siga o 2º passo do exercício anterior e troque a cor e a espessura da curva.



Fotos: Reprodução/<www.geogebra.org>

3º passo: Agora, você poderá observar significados importantes para os coeficientes a, b, c, e d. Para isso clique na bolinha do controle deslizante de a e altere o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados). Observe o que acontece com o gráfico da senoide. Repita a operação para os controles deslizantes de b, c e d (utilize um controle deslizante por vez).

a) Qual o efeito do parâmetro a no gráfico da função?

b) Qual o efeito do parâmetro b no gráfico da função?

c) Qual o efeito do parâmetro c no gráfico da função?

d) Qual o efeito do parâmetro d no gráfico da função?

e) Utilizando o controle deslizante e fazendo $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 1{,}6$, você terá aproximadamente o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Essa última função é equivalente a uma função conhecida. Qual é essa função?

Exercícios

18. Considere as funções f e g definidas por:

- $f(x) = \text{sen } 4x$
- $g(x) = 1 - \cos x$

Determine:

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) $g(\pi)$

c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

d) $D(g)$

e) $Im(g)$

f) $x \in [0, 2\pi]$ tal que $f(x) = 1$

19. Construa o gráfico (um período completo) e dê o domínio, a imagem e o período de cada função. (Sugestão: para construí-lo, reveja os gráficos de seno e cosseno.)

a) f tal que $f(x) = \cos 3x$

b) g tal que $g(x) = |\text{sen } x|$

c) f tal que $f(x) = 2 \text{ sen } x$

20. Determine o período das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{sen } 7x$

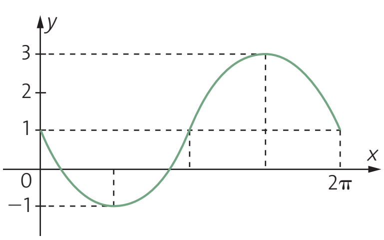
b) $f(x) = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

d) $f(x) = 1 + 4 \cdot \tan\left(\pi x - \frac{1}{2}\right)$

e) $f(x) = 1 + \text{sen }(\pi x - 3)$

21. (UFRGS-RS) Se $f(x) = \alpha + b \cdot \text{sen } x$ tem como gráfico:



Então:

a) $a = -2$ e $b = 1$.

b) $a = -1$ e $b = 2$.

c) $a = 1$ e $b = -1$.

d) $a = 1$ e $b = -2$.

e) $a = 2$ e $b = -1$.

22. (UEL-PR) Uma bomba de água aspira e expira água a cada três segundos. O volume de água da bomba varia entre um mínimo de 2 litros e um máximo de 4 litros. Dentre as alternativas a seguir, assinale a expressão algébrica para o volume (y) de água na bomba, em função do tempo (t).

a) $y = 2 + 2\text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot t\right]$

b) $y = 2 + 2\text{ sen}\left[\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot t\right]$

c) $y = 3 + \text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot t\right]$

d) $y = 3 + \text{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot t\right]$

e) $y = -3 + 2\text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot t\right]$

23. (Vunesp-SP) Uma máquina produz diariamente x dezenas de certo tipo de peças. Sabendo-se que o custo de produção $C(x)$ e o valor de venda $V(x)$ são dados, $C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)$ e $V(x) = 3\sqrt{2}\text{ sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right), 0 \leqslant x \leqslant 6$.

O lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é:

a) 500.

b) 750.

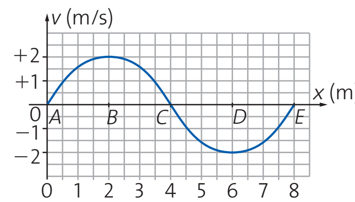
c) 1000.

d) 2000.

e) 3000.

24. ATIVIDADE EM EQUIPE *Física*

O gráfico representa, em um dado instante, a velocidade transversal dos pontos de uma corda na qual se propaga uma onda senoidal na direção do eixo x.



Por esse instante, determinem uma senoide que relaciona a velocidade v com a posição x dos pontos da corda.

25. ATIVIDADE EM EQUIPE *Física*

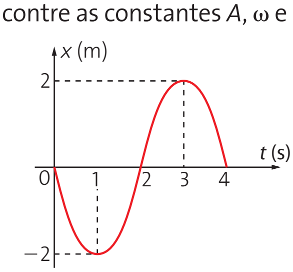
Utilizando um pequeno bastão e uma tigela com água, uma pessoa produz na superfície da água ondas circulares, como mostra a figura ao lado.

Dam d'Souza/Arquivo da editora

Sabendo que a distância entre duas cristas consecutivas das ondas produzidas é de 2 cm, e a amplitude das ondas é de 0,3 cm, obtenham uma função relacionando a altitude h da superfície da água (em relação ao nível da água em repouso) para o momento em que em $x = 0$ temos $h = 0$ e a função seja crescente em $x = 0$.

26. (UFG-GO) *Física*

O gráfico a seguir mostra a posição em função do tempo de uma partícula em movimento harmônico simples (MHS) no intervalo de tempo entre 0 e 4s. A equação da posição em função do tempo para este movimento harmônico é dada por $x = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$. A partir do gráfico, encontre as constantes A, ω e ϕ.



CAPÍTULO 4

Relações trigonométricas

O exercício do encadeamento lógico é a característica fundamental da Matemática.

Embora os vários campos da Matemática tenham surgido da necessidade do ser humano de resolver questões práticas, eles se desenvolveram naturalmente e a mente humana encontrou ambiente para generalizações.

As **relações trigonométricas**, por exemplo, são generalizações que derivam umas das outras por raciocínio dedutivo.

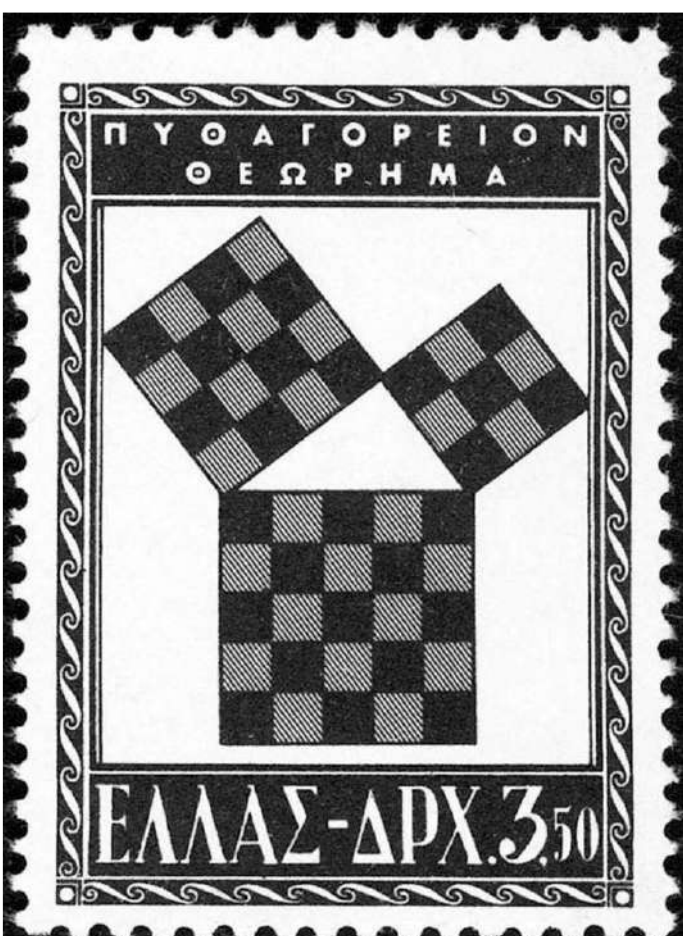
O termo **identidade** refere-se a uma **relação de igualdade** verdadeira, independentemente de qualquer contexto e dos valores assumidos por suas variáveis. Representa um caso geral e pode resultar em uma propriedade ou princípio.

A principal identidade da Trigonometria ($\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2\, \alpha = 1$) deriva do teorema de Pitágoras, cujo enunciado é:

> "Em todo triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".

As identidades acrescentam ao estudo da Trigonometria um repertório de relações que são aplicadas em seguida nas equações trigonométricas. É isso o que faremos neste capítulo.

Wikimedia Commons/Arquivo da editora



Selo editado na Grécia, em 1955, simbolizando o célebre teorema de Pitágoras.

1 Relações fundamentais

Além de seno, cosseno e tangente, há outras três funções trigonométricas, importantes mais pelo seu valor histórico do que por qualquer outro motivo. São elas: secante (sec), cossecante (csc) e cotangente (cot).

As relações entre os valores das funções trigonométricas de um mesmo arco são denominadas **relações trigonométricas**. Já conhecemos duas delas, consideradas fundamentais:

$$\boxed{\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}\text{, para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}}\text{, para todo } x \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Existem outras relações fundamentais:

$$\boxed{\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x}}\text{, para todo } x \cdot \; k\pi$$

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}\text{, para todo } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\boxed{\csc x = \frac{1}{\text{sen } x}}\text{, para todo } x \cdot \; k\pi$$

Fique atento!
Para simplificar as expressões, consideramos o fator $k \in \mathbb{Z}$, sempre que não especificado.

» Agora, você vai descobrir algumas relações trigonométricas que podem ser obtidas a partir das relações dadas. Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) A partir de $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, dividam tudo por $\text{sen}^2 x$. Que relação vocês encontraram?

b) Agora, dividam $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ e escrevam a nova relação encontrada.

Comparem os resultados obtidos com as demais duplas da classe.

Exercício resolvido

1. Sendo $\text{sen } x = -\frac{1}{4}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine $\tan x$ e $\sec x$.

Resolução:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como x é do 3º quadrante, $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Então:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow \sec x = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

2 Identidades trigonométricas

Toda igualdade que envolve funções trigonométricas verificada para todos os valores do domínio dessas funções é uma **identidade trigonométrica**.

Por exemplo, considerando o domínio das funções, a igualdade $\text{sen}\, x \cdot \sec x = \tan x$ é uma identidade trigonométrica, pois, independentemente do valor de x, ela se verifica. Para $x \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos:

$$\text{sen}\, x \cdot \sec x = \text{sen}\, x \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \tan x$$

Fique atento!
As relações fundamentais são identidades trigonométricas.

Já a igualdade $\text{sen}\, x + \cos x = 1$, para $x \in \mathbb{R}$, não é uma identidade, pois ela não é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\text{sen}\, x + \cos x = 1$ é uma **equação trigonométrica**.

Para demonstrar que uma igualdade é uma identidade, há vários caminhos. Vejamos isso nos exercícios resolvidos, em que apresentamos três maneiras diferentes.

Para refletir
Verifique o que acontece com $\text{sen}\, x + \cos x = 1$, para $x = \frac{\pi}{2}$ e para $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercícios resolvidos

2. Demonstre que $(1 - \cos^2 x)(\cot^2 x + 1) = 1$, para $x \cdot\ k\pi$, é uma identidade.

Resolução:

Consideramos que o primeiro membro da igualdade é $f(x)$ e o segundo membro é $g(x)$ e procuramos simplificar o primeiro membro, expressando-o em função de sen x e de cos x:

$$(1 - \cos^2 x)\left(\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2\, x} + 1\right) = \underbrace{(1 - \cos^2 x)}\underbrace{\left(\frac{\cos^2 x + \text{sen}^2\, x}{\text{sen}^2\, x}\right)} = \underbrace{\cancel{\text{sen}^2\, x}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\cancel{\text{sen}^2\, x}}} = 1$$

Fique atento!
Partindo de $f(x) = (1 - \cos^2 x)(\cot^2 x + 1)$, chegamos a $g(x) = 1$.
Logo, $f(x) = g(x)$.

3. Demonstre que $\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\text{sen}\, x}{\sec x}$ é uma identidade para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Resolução:

Vamos simplificar isoladamente cada membro:

- $$f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{\sec^2 x} = \frac{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\text{sen}\, x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cos^{\cancel{2}} x = \text{sen}\, x \cdot \cos x$$

- $$g(x) = \frac{\text{sen}\, x}{\sec x} = \frac{\text{sen}\, x}{\frac{1}{\cos x}} = \text{sen}\, x \cdot \cos x$$

Fique atento!
Partindo separadamente de $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$ e $g(x) = \frac{\text{sen}\, x}{\sec x}$, chegamos ao mesmo valor. Logo, $f(x) = g(x)$.

4. Demonstre a identidade $\sec^2 x - \text{sen}^2 x = \tan^2 x + \cos^2 x$.

Resolução:

Considerando $\sec^2 x - \text{sen}^2 x$ com $f(x)$ e $\tan^2 x + \cos^2 x$ como $g(x)$, podemos fazer:

$f(x) - g(x) = \sec^2 x - \text{sen}^2 x - \tan^2 x - \cos^2 x = (\sec^2 x - \tan^2 x) - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = 1 - 1 = 0$

Se $f(x) - g(x)$, então $f(x) = g(x)$ ou $\sec^2 x = \tan^2 x + \cos^2 x$.

3 Fórmulas de adição

Vamos comparar sen (60° + 30°) e sen 60° + sen 30°:

$\text{sen } (60° + 30°) = \text{sen } 90° = 1$

$$\text{sen } 60° + \text{sen } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Logo, sen (60° + 30°) $\neq$ sen 60° + sen 30°.

> **Para refletir**
> Compare também:
> a) cos (60° + 30°) e cos 60° + cos 30°
> b) tan (60° − 30°) e tan 60° − tan 30°
> c) sen (90° + 0°) e sen 90° + sen 0°

De modo geral, podemos verificar que:

- $\text{sen } (a + b) \neq \text{sen } a + \text{sen } b$
- $\text{sen } (a - b) \neq \text{sen } a - \text{sen } b$
- $\cos (a + b) \neq \cos a + \cos b$
- $\cos (a - b) \neq \cos a - \cos b$

Veremos agora como é possível expressar sen ($a \pm b$) e cos ($a \pm b$) em função de sen a, sen b, cos a e cos b, sendo a e b dois números reais quaisquer. Veremos também tan ($a \pm b$) em função de tan a e tan b.

Adição e subtração de arcos

É possível demonstrar que:

1) $\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

2) $\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$

3) $\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

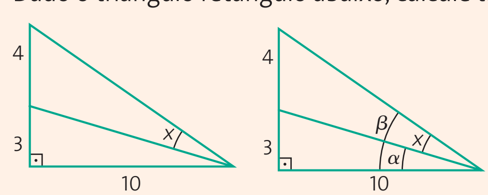
4) $\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

5) $\tan (a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$ (para os arcos em que a tangente for definida)

6) $\tan (a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$ (para os arcos em que a tangente for definida)

Exercícios resolvidos

5. *Aplicação na Geometria*
Dado o triângulo retângulo abaixo, calcule tan x.



Resolução:

Temos:

$$\tan \alpha = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$\tan \beta = \frac{3 + 4}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Mas:

$\beta = \alpha + x \Rightarrow x = \beta - \alpha$

> **Para refletir**
> Use a tabela da página 23 e verifique qual destes é o valor mais próximo de x: 18°, 20° ou 25°?

Logo:

$$\tan x = \tan (\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = \frac{0{,}7 - 0{,}3}{1 + 0{,}7 \cdot 0{,}3} = \frac{0{,}4}{1 + 0{,}21} = \frac{0{,}4}{1{,}21} = \frac{40}{121} \simeq 0{,}33$$

6. Calcule $\cos 15°$ e $\cos(\pi - x)$.

Resolução:

- $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\, 45° \cdot \text{sen}\, 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\cos(\pi - x) = \cos\pi \cdot \cos x + \text{sen}\,\pi \cdot \text{sen}\, x = (-1) \cdot \cos x + 0 \cdot \text{sen}\, x = -\cos x$

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Determine os valores das demais funções trigonométricas de um arco x quando:
   a) $\text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
   b) $\cos x = \frac{1}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$
   c) $\csc x = -\sqrt{2}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
   d) $\tan x = \sqrt{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$

2. Sendo $\cos x = \frac{4}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de $\text{sen}^2 x - 3 \cdot \text{sen}\, x$.

3. Simplifique as expressões:
   a) $y = \frac{\sec x - \csc x}{1 - \cot x}$
   b) $y = (\sec x - \cos x)(\csc x - \text{sen}\, x)(\tan x + \cot x)$

4. Determine o valor de $A = \frac{\cot x - 1}{\csc x - \sec x}$, dado $\cos x = \frac{1}{2}$.

5. ATIVIDADE EM DUPLA Demonstrem as seguintes identidades trigonométricas:
   a) $\cos x \cdot \tan x \cdot \csc x = 1$
   b) $\tan^2 x \cdot \csc^2 x = 1 + \tan^2 x$
   c) $(\tan x + 1)(1 - \tan x) = 2 - \sec^2 x$
   d) $(\tan x - \text{sen}\, x)^2 + (1 - \cos x)^2 = (\sec x - 1)^2$
   e) $\csc^2 x \cdot \tan x = \cot x \cdot \sec^2 x$
   f) $\sec^2 x \cdot \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

Fique atento!
As demonstrações das identidades podem ser vistas como um exercício de quebra-cabeça trigonométrico.

6. ATIVIDADE EM DUPLA Se $f(x) = \frac{\text{sen}\, x + \tan x}{\cot x + \csc x}$ e $g(x) = \text{sen}\, x \cdot \tan x$, provem que $f(x) = g(x)$.

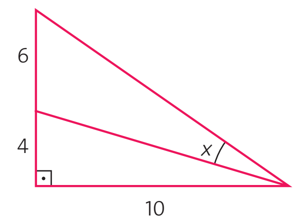
7. DESAFIO EM DUPLA Se $A = (\cos a + \cos b)(\cos a - \cos b) + (\text{sen}\, a + \text{sen}\, b)(\text{sen}\, a - \text{sen}\, b)$, provem que $A = 0$.

8. ATIVIDADE EM DUPLA Se $P = \frac{1}{1+\text{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x} + \frac{1}{1+\csc^2 x}$, demonstrem que $P = 2$.

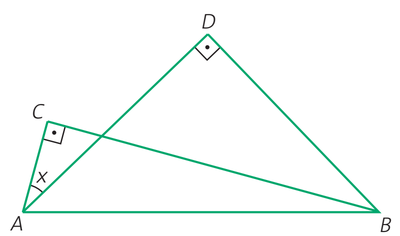
9. ATIVIDADE EM DUPLA Usando as fórmulas de adição, determinem:
   a) $\tan 15°$
   b) $\text{sen}\, 15°$
   c) $\cos 75°$
   d) $\tan 75°$
   e) $\text{sen}\, 105°$
   f) $\cos 195°$

10. Sabe-se que $\text{sen}\, a = \frac{4}{5}$ e $\text{sen}\, b = \frac{12}{13}$, com $0 < a < \frac{\pi}{2}$ e $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Determine, então, $\text{sen}(a + b)$, $\cos(a - b)$ e $\tan(a + b)$.

11. Dado o triângulo retângulo abaixo, calcule $\tan x$.



12. (Fuvest-SP) Nos triângulos retângulos da figura, $AC = 1$ cm, $BC = 7$ cm, $AD = BD$. Sabendo que $\text{sen}(a - b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b - \cos a \cdot \text{sen}\, b$, o valor de $\text{sen}\, x$ é:



   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   b) $\frac{7}{\sqrt{50}}$.
   c) $\frac{3}{5}$.
   d) $\frac{4}{5}$.
   e) $\frac{1}{\sqrt{50}}$.

4 Fórmulas do arco duplo e do arco metade

Veremos agora as expressões das funções trigonométricas dos arcos duplos, ou seja, dos arcos de medida $2a$. Trata-se de um caso particular das fórmulas de adição, sendo suficiente fazer $b = a$.

Retomando e desenvolvendo as fórmulas da adição, temos:

- $\text{sen } 2a = \text{sen } (a + a) = \text{sen } a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$

  Assim:

$$\boxed{\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a}$$

- $\cos 2a = \cos (a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \text{sen } a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

  Assim:

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a}$$

Além dessa fórmula, para $\cos 2a$ podemos obter mais duas fórmulas alternativas apenas combinando a relação fundamental com ela:

$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$ (I)

ou

$\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a$ (II)

Substituindo (I) em $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, temos:

$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \Rightarrow \boxed{\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1}$

Substituindo (II) em $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, temos:

$\cos 2a = (1 - \text{sen}^2 a) - \text{sen}^2 a \Rightarrow \boxed{\cos 2a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a}$

Assim, podemos escrever:

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a}$$

$$\boxed{\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1}$$

$$\boxed{\cos 2a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a}$$

- $\tan 2a = \tan (a + a) = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a} = \dfrac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$, válida para quando existirem as tangentes envolvidas.

  Portanto:

$$\boxed{\tan 2a = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}}$$

Observação: Para se obter o arco metade de senos e cossenos não é necessário memorizar novas fórmulas. Basta usar adequadamente as fórmulas alternativas de $\cos 2a$, apenas lembrando que, se $2a$ é o arco duplo de a, então a é o arco metade de $2a$. O arco metade de tangentes é obtido a partir da própria fórmula da tangente.

Fique atento!
Numericamente é simples verificar, por exemplo, que dado arco de 30° os valores de seno, cosseno e tangente de 60° não é o dobro dos valores do arco de 30°.

Exercícios resolvidos

7. Dado $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine $\text{sen } 2x$, $\cos 2x$ e $\tan 2x$ usando as fórmulas do arco duplo.

Resolução:

Vamos calcular $\cos x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$:

Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos $x = \frac{\pi}{3}$.

Daí, $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Vamos calcular $\tan x$:

Como $x = \frac{\pi}{3}$, então $\tan x = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Determinamos, agora, $\text{sen } 2x$, $\cos 2x$ e $\tan 2x$:

- $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$

  $= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$
- $\tan 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} =$

  $= \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{-2}} = -\sqrt{3}$

Fique atento!

Como $x = \frac{\pi}{3}$, podemos também determinar $\text{sen } 2x$, $\cos 2x$ e $\tan 2x$ calculando $\text{sen } \frac{2\pi}{3}$, $\cos \frac{2\pi}{3}$, e $\tan \frac{2\pi}{3}$ por meio da circunferência trigonométrica.

Resolvido passo a passo

8. (UFTM-MG) A figura ilustra recomendações dos especialistas em visão para o posicionamento correto de um indivíduo diante da tela do computador:

$60 \leqslant d \leqslant 65$ (em cm)
$10° \leqslant \alpha \leqslant 20°$

Seguindo-se tais recomendações e admitindo-se $\cos 10° = k$, todos os comprimentos possíveis da linha de visada (v), em cm, estão no intervalo:

a) $\frac{60}{k} \leqslant v \leqslant \frac{65}{2k^2 - 1}$.

b) $\frac{60}{k} \leqslant v \leqslant \frac{65}{2 - k^2}$.

c) $\frac{65}{2k} \leqslant v \leqslant \frac{60}{k}$.

d) $\frac{60}{k} \leqslant v \leqslant \frac{65}{k^2}$.

e) $\frac{30}{k} \leqslant v \leqslant \frac{65}{2k}$.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dados os limites de variação de d e α e um esquema mostrando o correto posicionamento de uma pessoa em relação ao monitor do computador (relacionando v, d e α). Também é dado que $\cos 10° = k$.

b) O que se pede?

Pede-se o intervalo de variação da linha de visada v, entre o olho do usuário e a tela do computador, de acordo com os limites dados no enunciado.

2. Planejando a solução

Precisamos de duas estratégias, uma para cada parte da resolução. Primeiro, devemos conseguir estabelecer limites máximos e mínimos para o valor v da linha de visada. Depois, usaremos os conhecimentos trigonométricos para colocar a resposta em função de k.

O esquema mostrando o correto posicionamento de uma pessoa em relação ao monitor do computador é um triângulo retângulo, e portanto podemos usar trigonometria básica (cosseno) para relacionar v, d e α. Depois, usando os limites dados para d e α, vamos determinar o intervalo de variação de v.

Para colocar os valores em função de k, precisamos usar uma das fórmulas de arco duplo para transformar o cosseno de 20° em cosseno de 10° [$\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$].

3. Executando o que foi planejado

Do esquema dado, temos que

$\cos \alpha = \frac{d}{v} \Rightarrow v = \frac{d}{\cos \alpha}$.

Para estabelecer os limites máximo e mínimo de v, precisamos obter o maior e o menor resultado possível para a razão $\dfrac{d}{\cos\alpha}$.

- A maior razão $\dfrac{d}{\cos\alpha}$ acontecerá com o maior d e o menor $\cos\alpha$.
- A menor razão $\dfrac{d}{\cos\alpha}$ acontecerá com o menor d e o maior $\cos\alpha$.

Para estabelecer qual é o maior cosseno, basta perceber que no 1º quadrante o cosseno é decrescente, ou seja, quanto maior o ângulo, menor o cosseno (lembre-se de que $\cos 0° = 1$ e $\cos 90° = 0$). Logo, como $20° > 10°$, $\cos 20° < \cos 10°$.

Assim, a maior razão $\dfrac{d}{\cos\alpha}$ ocorrerá com $d = 65$ cm e $\cos 20°$, e a menor razão ocorrerá com $d = 60$ cm e $\cos 10°$.

Portanto, $\dfrac{60}{\cos 10°} \leqslant v \leqslant \dfrac{65}{\cos 20°}$.

Perceba que isso ainda não é suficiente para escolhermos a resposta correta na questão.

Agora, precisamos escrever $\cos 20°$ em função de $\cos 10°$. Para isso, devemos perceber que $20°$ é o arco duplo de $10°$, e portanto podemos usar a fórmula $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$, com $\alpha = 10°$.

$\cos(20°) = \cos(2 \cdot 10°) = 2 \cdot \cos^2 10° - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 20° = 2k^2 - 1$

Assim, $\dfrac{60}{\cos 10°} \leqslant v \leqslant \dfrac{65}{\cos 20°}$ equivale a

$\dfrac{60}{k} \leqslant v \leqslant \dfrac{65}{2k^2 - 1}$.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

a) Refaça o exemplo acima para $10° \leqslant \alpha \leqslant 20°$ e $60 \leqslant v \leqslant 70$ (em cm), obtendo os limites para o valor d. Considere novamente $\cos 10° = k$.

b) *Discussão em equipe*

A Ergonomia visa a qualidade da adaptação de um dispositivo a seu operador e à tarefa que ele realiza. Assim, é a ciência que se preocupa, entre muitas outras coisas, em promover a melhor interação homem-computador, de modo a otimizar o bem-estar humano e o desempenho geral do processo como um todo.

Converse com seus colegas e discutam se faz alguma diferença, na qualidade do trabalho do ser humano na frente de um computador, o respeito a alguns requisitos como: distância correta entre a pessoa e a tela do computador, altura dos olhos em relação ao monitor, altura, tipo e posicionamento da cadeira, existência de descanso para o pulso, e uma série de outras preocupações.

Exercícios

13. Se $\operatorname{sen} x = m$ e $\cos x = n$, determine $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$ e $\tan 2x$ em função de m e n.

14. Se $\tan x = \dfrac{1}{4}$, calcule o valor de $\tan 2x$.

15. Dado $\operatorname{sen} a = \dfrac{2}{3}$, com $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, determine $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$ e $\tan 2a$.

16. Simplifique a expressão $A = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.

17. DESAFIO EM DUPLA (FEI-SP) Calculem $\operatorname{sen} 2x$, sendo dado $\tan x + \cot x = 3$.

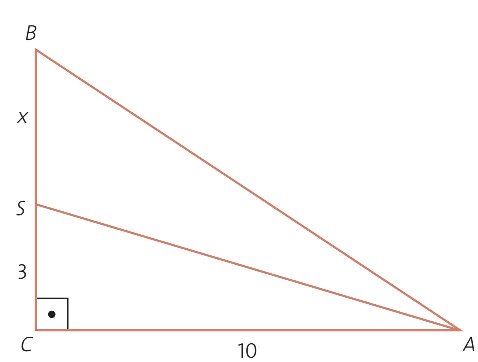
18. ATIVIDADE EM DUPLA Demonstrem que:

a) $\operatorname{sen} 3a = 3 \cdot \operatorname{sen} a - 4 \cdot \operatorname{sen}^3 a$. (*Sugestão:* Faça $3a = 2a + a$.)

b) $\cos 3a = 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$.

19. ATIVIDADE EM DUPLA Mostrem que, se $\operatorname{sen} x + \cos x = m$, então $\operatorname{sen} 2x = m^2 - 1$.

20. ATIVIDADE EM DUPLA Determinem $BS = x$ sabendo que $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo A no triângulo retângulo ABC.



5 Equações trigonométricas

No capítulo 3 já aprendemos a resolver equações trigonométricas simples, da forma sen $x = a$, cos $x = a$ ou tan $x = a$. Agora vamos aprender alguns artifícios que nos permitem resolver outras equações trigonométricas.

Equações resolvidas com alguns artifícios

Quando não for explicitado o conjunto universo, devemos considerar $U = \mathbb{R}$.

Exercício resolvido

9. Resolva as equações:

a) $\text{sen } 2x = 1$

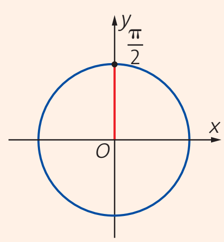
b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

d) $2 \cdot \text{sen}^2 x + 3 \cdot \text{sen } x - 2 = 0$

Resolução:

a) $\text{sen } 2x = 1$

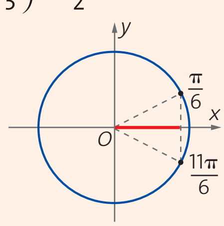


Como $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$, temos:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Como na 1ª determinação $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ têm cosseno igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou $x - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$

côngruo a $\frac{\pi}{6}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

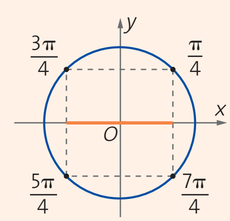
$$\Rightarrow x = \frac{13\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

c) $\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$$

d) $2 \cdot \text{sen}^2 x + 3 \cdot \text{sen } x - 2 = 0$

Fazendo $\text{sen } x = t$, ficamos com $2t^2 + 3t - 2 = 0$:

$\Delta = 25$

$$t' = \frac{1}{2} \text{ e } t'' = -2 \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = -2\right)$$

Então:

$$\begin{cases} \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \text{sen } x = -2 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

Resolução de uma equação em intervalo dado

Para resolver uma equação trigonométrica em um determinado intervalo, fazemos o seguinte:

1º) Resolvemos normalmente a equação.

2º) Determinamos os valores da solução geral que pertencem ao intervalo dado. Esses valores vão constituir o **conjunto solução** da equação.

Conjunto solução: conjunto cujos elementos são as soluções de uma equação. Esse conjunto pode ser *vazio*, se o problema não tiver solução; *finito*, se houver um número finito de soluções; *unitário*, se houver apenas uma solução para o problema; ou *infinito*, se o número de soluções for infinito.

Exercícios resolvidos

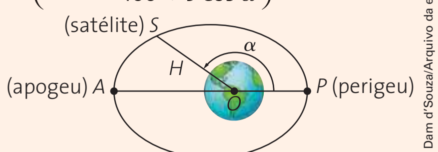
» passo a passo: exercício 10

» Resolvido passo a passo

10. (Vunesp-SP/modificado) *Física*

A figura abaixo mostra a órbita elíptica de um satélite S em torno do planeta Terra. Na elipse estão assinalados dois pontos: o ponto A (apogeu), que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra, e o ponto P (perigeu), que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra. O ponto O indica o centro da Terra e o ângulo $P\hat{O}S$ tem medida α, com $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$. A altura H, em km, do satélite à superfície da Terra, dependendo do ângulo α, é dada aproximadamente pela função:

$$H = \left(-64 + \frac{7\,980}{100 + 5\cos\alpha}\right) \cdot 10^2.$$



(Figura fora de escala.)

Determine os valores de α quando a altura H do satélite é de 1580 km.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dados uma função que relaciona a altura H do satélite (em km) com o ângulo α e o intervalo de variação de α, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$.

b) O que se pede?

Pede-se ao aluno que determine os valores do ângulo α no momento em que o satélite está a 1580 km de altura.

2. Planejando a solução

Para obter o valor de α, vamos usar a função dada, substituindo o valor de 1580 km em H, e depois resolver a equação trigonométrica resultante dessa substituição.

3. Executando o que foi planejado

Do enunciado sabemos que

$$H = \left(-64 + \frac{7\,980}{100 + 5\cos\alpha}\right) \cdot 10^2.$$

Para $H = 1580$ km:

$$1580 = \left(-64 + \frac{7\,980}{100 + 5\cos\alpha}\right) \cdot 10^2$$

Dividindo ambos os membros por 10^2 (ou seja, 100), temos:

$$15{,}80 = -64 + \frac{7\,980}{100 + 5\cos\alpha}$$

Vamos agora isolar $\cos\alpha$:

$$15{,}80 + 64 = \frac{7\,980}{100 + 5\cos\alpha} \Rightarrow 79{,}80 = \frac{7\,980}{100 + 5\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 79{,}80 \cdot (100 + 5\cos\alpha) = 7\,980 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 + 5\cos\alpha = \frac{7\,980}{79{,}80} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 + 5\cos\alpha = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$$

Com o cosseno isolado, podemos avaliar que valores de α são solução da equação $\cos\alpha = 0$. Considerando-se o intervalo dado no enunciado, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, esses valores são $\alpha = 90°$ ou $\alpha = 270°$.

4. Emitindo a resposta

Quando o satélite está a 1580 km de altura os valores de α são: $\alpha = 90°$ ou $\alpha = 270°$.

5. Ampliando o problema

a) Usando uma tabela trigonométrica ou uma calculadora científica, estime os valores do ângulo α para quando a altura do satélite for de 1500 km.

b) *Discussão em equipe*

Os satélites artificiais são empregados em um grande número de atividades atualmente. Converse com seus colegas e tentem indicar o maior número possível de utilidades dos satélites artificiais.

c) *Pesquisa*

Qual foi o primeiro satélite artificial do mundo a ser lançado no espaço, quem o lançou e quando isso ocorreu?

11. Resolva a equação $\cos x \cdot \tan x - \cos x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Resolução:

$\cos x \cdot \tan x - \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \cdot (\tan x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = 0$ ou $\tan x = 1$

- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Mas como a tan x não é definida para $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, esses valores não servem.

- $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$, pois $x \in [0, 2\pi]$

Exercícios

21. Determine o valor de x:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\tan x = -\sqrt{3}$

c) $2 \cdot \operatorname{sen} x = -1$, para $0 < x < 2\pi$

d) $1 + \cos x = 0$, para $-\pi < x < \pi$

e) $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}$

f) $\sec x = \sqrt{2}$

22. Resolva as equações trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} 3x = 1$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

c) $\tan 5x = 0$, sendo $0 < x < 2\pi$

d) $\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos 2x = 0$

f) $3 \cdot \tan 2x - \sqrt{3} = 0$, com $0 < x < 3\pi$

g) $\sec 2x = \sqrt{2}$, com $-2\pi < x < 2\pi$

h) $\csc\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$

23. ATIVIDADE EM DUPLA Resolva as equações para $0 < x < 2\pi$:

a) $2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos x = 0$

b) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

c) $\tan^2 x = 3$

d) $2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$

e) $2 \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$

f) $4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sec x = 8$

24. ATIVIDADE EM DUPLA Resolva as equações:

a) $\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} x + 1 = 0$

b) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

c) $\sec x = -2$

d) $\cot x = \sqrt{3}$

25. ATIVIDADE EM DUPLA Resolva a equação $\operatorname{sen} x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$.

26. Determine o domínio da função

$f(x) = \sqrt{2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1}$.

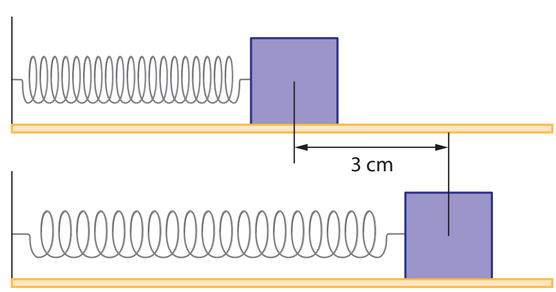
27. DESAFIO EM DUPLA Resolvam a inequação trigonométrica

$|\operatorname{sen} x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

28. Demonstre a identidade $\frac{\operatorname{sen} x}{\csc x - \cot x} = 1 + \cos x$, válida para todo x em que as funções envolvidas estão definidas.

29. DESAFIO EM DUPLA *Física*

Um dos principais movimentos periódicos oscilatórios é o movimento harmônico simples (MHS). Um objeto se move sobre uma reta de modo que a intensidade da força exercida sobre ele aumenta e diminui de forma periódica. Esse tipo de movimento está presente em diversas ocasiões na natureza.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

O objeto acima se desloca de tal modo que sua posição x (em centímetros) em função do tempo t (em segundos), com $t \leqslant \pi$ é dada pela função $x(t) = 4 + 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$.

A soma dos valores de t quando $x(t) = 1$ cm e $x(t) = 7$ cm é numericamente igual a:

a) $\frac{\pi}{2}$.

b) π.

c) $\frac{3\pi}{2}$.

d) 2π.

e) $\frac{5\pi}{2}$.

Pensando no ENEM

1. O arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907-2012) é considerado um dos maiores gênios da arquitetura moderna. Suas obras estão espalhadas por diversas cidades do Brasil e do mundo, e uma das características dessas obras é a grande quantidade de linhas curvas. Ele justificou o uso dessas linhas dizendo:

   Não é o ângulo reto que me atrai, nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e sensual, a curva que encontro nas montanhas do meu país, no curso sinuoso dos seus rios, nas ondas do mar, no corpo da mulher preferida. De curvas é feito todo o Universo, o Universo curvo de Einstein.

   Uma das homenagens a Niemeyer é o centro cultural que leva seu nome, localizado em Goiânia, GO, inaugurado em 30 de março de 2006. O conjunto de prédios da obra compreende teatro, museu, biblioteca, palácio de música e um monumento aos direitos humanos, e ocupa 17 mil metros quadrados.

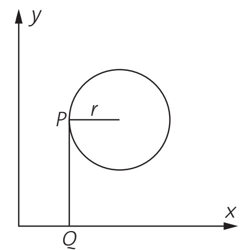
   Jacek/kino.com.br

Centro Cultural Oscar Niemeyer, em Goiânia, GO. O projeto arquitetônico é do próprio Niemeyer.

   Observe na fotografia como as formas dos prédios são variadas. O prédio pintado em vermelho é o Monumento aos Direitos Humanos e tem a forma de uma pirâmide de 75 m de altura, oca por dentro. A fachada é formada por um triângulo, em que dois dos lados desse triângulo medem 50 m e 100 m, e o ângulo entre eles é de 60°. O perímetro do triângulo, em metros, é um número compreendido entre:

   a) 200 e 220.
   b) 220 e 240.
   c) 240 e 260.
   d) 260 e 280.
   e) 280 e 300.

2. (Enem) Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leqslant r$ sobre a circunferência.



   Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por:

   a) $r\left(1-\operatorname{sen}\dfrac{d}{r}\right)$
   b) $r\left(1-\cos\dfrac{d}{r}\right)$
   c) $r\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{d}{r}\right)$
   d) $r\operatorname{sen}\left(\dfrac{r}{d}\right)$
   e) $r\cos\left(\dfrac{r}{d}\right)$

3. *Física*

   (Enem) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por:

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \times \cos(0{,}06t)}$$

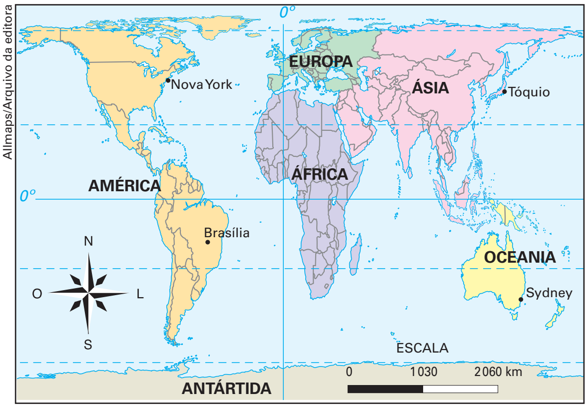
   Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r no apogeu e no perigeu, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

   a) 12 765 km.
   b) 12 000 km.
   c) 11 730 km.
   d) 10 965 km.
   e) 5 865 km.

Utilize o texto abaixo como base para responder às questões 4 e 5.

O mapa-múndi, também conhecido como planisfério, é um mapa que representa o globo terrestre planificado. A linha equatorial divide o mapa-múndi em dois hemisférios (norte e sul), e o meridiano de Greenwich divide o mapa-múndi em outros dois hemisférios (oriental e ocidental). Juntos, a linha equatorial e o meridiano de Greenwich dividem o mapa-múndi em 4 quadrantes, como mostra a figura da página seguinte.

Allmaps/Arquivo da editora



Fonte: Adaptado de *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. Disponível em: <http://atlasescolar.ibge.gov.br/images/atlas/mapas_mundo/mundo_planisferio_politico_a3.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2012.

Se fizermos uma analogia entre o mapa-múndi e a circunferência trigonométrica, poderemos dizer que a Ásia situa-se no 1º quadrante e a cidade de Moscou é um ponto do 1º quadrante, de modo que o "seno de Moscou" é um número positivo.

4. As cidades de Brasília, Nova York, Sydney e Tóquio estão respectivamente nos:

a) 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes.

b) 2º, 1º, 4º e 3º quadrantes.

c) 3º, 2º, 1º e 4º quadrantes.

d) 3º, 2º, 4º e 1º quadrantes.

e) 3º, 4º, 1º e 2º quadrantes.

5. De acordo com a analogia proposta no texto, seria correto dizer que:

a) "seno de Brasília" é um número positivo.

b) "cosseno de Brasília" é um número positivo.

c) "tangente de Brasília" é um número positivo.

d) "cosseno de Nova Iorque" é um número positivo.

e) "tangente de Nova Iorque" é um número positivo.

6. Em diversas situações, o estudo dos fenômenos físicos requer a presença de um plano inclinado, seja para o cálculo de um coeficiente de atrito, seja por necessidades técnicas de construção, necessidades físicas e biológicas ou mesmo para experimentos laboratoriais.

Para esse estudo pode ser adotado como referência um sistema de coordenadas, sendo o mais comum o sistema cartesiano, com os eixos ortogonais na horizontal e vertical. Porém, para facilitar os cálculos, pode-se fazer uma rotação desses eixos de acordo com a inclinação desejada. Veja ao lado a rotação do ponto $A(x, y)$ para $A'(x', y')$ em torno da origem do sistema de eixos, no sentido anti-horário: $\overrightarrow{Ox}$ e $\overline{OA}$ formam o ângulo α. Sendo $r = AO = OA'$, temos:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \alpha \\ y = r \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cdot \cos (\alpha + \beta) \\ y' = r \cdot \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \end{cases}$$

Sabendo que:

- $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$ e
- $\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha$,

então é correto afirmar que:

a) $x' = x \cdot \cos \beta + y \cdot \operatorname{sen} \beta$

b) $x' = x \cdot \cos \beta - y \cdot \operatorname{sen} \beta$

c) $y' = x \cdot \operatorname{sen} \beta + y \cdot \operatorname{sen} \beta$

d) $y' = x \cdot \operatorname{sen} \beta - y \cdot \cos \beta$

e) $x' = x \cdot \cos \beta + y \cdot \cos \beta$

7. *Física*

O movimento das marés é um movimento periódico motivado pelas forças de atração gravitacional exercidas pelo Sol e pela Lua. Por ser um movimento periódico, pode ser modelado aproximadamente pela função $h(t) = a + b \cdot \operatorname{sen} (c \cdot t)$, em que $h(t)$ representa a altura da maré em metros no tempo t e a, b e c são constantes reais positivas. Em certa manhã, um estudante olhou no jornal a tábua das marés que apresentava as seguintes informações:

Horário	Altura da maré
0h	1,0 m
3h	1,6 m
6h	1,0 m
9h	0,4 m
12h	1,0 m
15h	1,6 m
18h	1,0 m

Sabendo que ele irá à praia pela manhã após as 9h e que não entra na água se a maré estiver acima de 0,7 m, responda: A que horas, no máximo, o estudante pode chegar à praia de tal maneira que ele possa entrar na água ainda pela manhã?

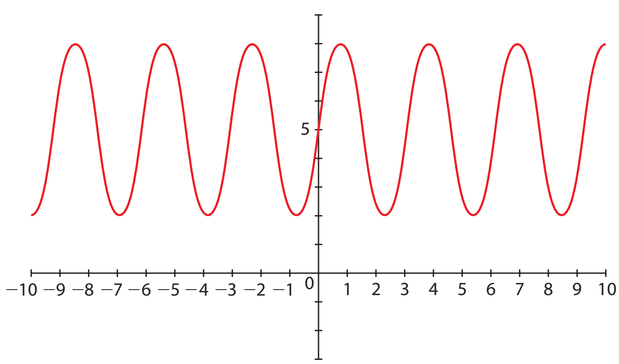
a) 9h30min
b) 10h
c) 10h30min
d) 11h
e) 11h30min

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. (UFPA) Considere as seguintes informações:
– De dois pontos, *A* e *B*, localizados na mesma margem de um rio, avista-se um ponto *C*, de difícil acesso, localizado na margem oposta;
– Sabe-se que *B* está distante 1 000 metros de *A*;
– Com o auxílio de um teodolito (aparelho usado para medir ângulos) foram obtidas as seguintes medidas: $B\hat{A}C = 30°$ e $A\hat{B}C = 80°$.
Deseja-se construir uma ponte sobre o rio, unindo o ponto *C* a um ponto *D* entre *A* e *B*, de modo que seu comprimento seja mínimo. Podemos afirmar que o comprimento da ponte será de aproximadamente:
a) 524 metros.
b) 532 metros.
c) 1 048 metros.
d) 500 metros.
e) 477 metros.
Dados: sen 80° = 0,985, sen 70° = 0,940, cos 80° = = 0,174 e cos 70° = 0,340.

2. (UFPA) Considere o gráfico da função trigonométrica abaixo, no qual $f(\pi) = 5$:

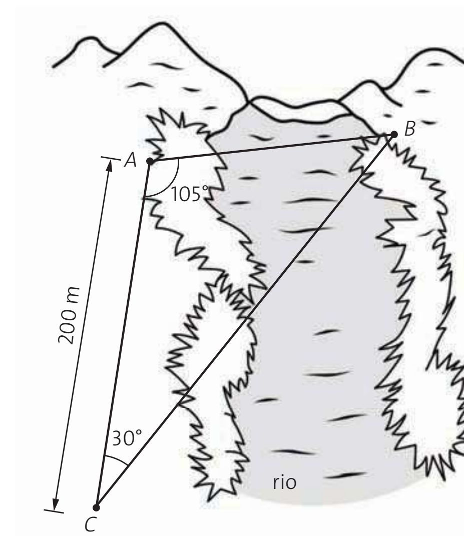


Interpretando o gráfico, podemos concluir que $f(3\pi)$ é igual a:
a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

3. (Ufam) Quando simplificamos a expressão
$\frac{\cos x}{1+\text{sen } x} + \frac{1+\text{sen } x}{\cos x}$ vamos obter:
a) 2 sec *x*.
b) 2 csc *x*.
c) $2 \sec^2 x$.
d) 2 cos *x*.
e) cos *x*.

Região Nordeste

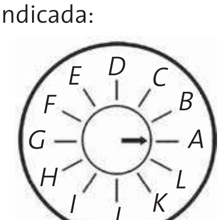
4. (UFPB) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, *A* e *B*, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, *C*, distante 200 m do ponto *A* e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto *A*. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos *ACB* e *BAC* mediam, respectivamente, 30° e 105°, conforme ilustrado na figura abaixo.



Ilustrações: Dam d'Souza/Arquivo da editora

Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto *A* ao ponto *B* é de:
a) $200\sqrt{2}$ m.
b) $180\sqrt{2}$ m.
c) $150\sqrt{2}$ m.
d) $100\sqrt{2}$ m.
e) $50\sqrt{2}$ m.

5. (Unifor-CE) O dispositivo de segurança de um cofre tem o formato da figura abaixo, onde as 12 letras *A*, *B*, ..., *L* estão igualmente espaçadas (o ângulo central entre duas letras vizinhas é o mesmo) e a posição inicial da seta, quando o cofre se encontra fechado, é a indicada. Para abrir o cofre, são necessárias três operações (o segredo), girando o disco menor (onde a seta está gravada), de acordo com as seguintes instruções, a partir da posição indicada:
1) $\frac{2}{3}\pi$ no sentido anti-horário;
2) $\frac{3}{2}\pi$ no sentido horário;
3) $\frac{3}{4}\pi$ no sentido anti-horário.



Pode-se, então, afirmar corretamente que o cofre será aberto quando a seta estiver:

a) no ponto médio entre *L* e *A*.

b) na posição *B*.

c) na posição *K*.

d) em algum ponto entre *J* e *K*.

e) na posição *H*.

6. *Biologia*

(UFPE) Admita que a pressão arterial $P(t)$ de uma pessoa no instante t, medido em segundos, seja dada por $P(t) = 96 + 18\cos(2\pi t)$, $t \geqslant 0$. Considerando esses dados, analise a veracidade das seguintes afirmações.

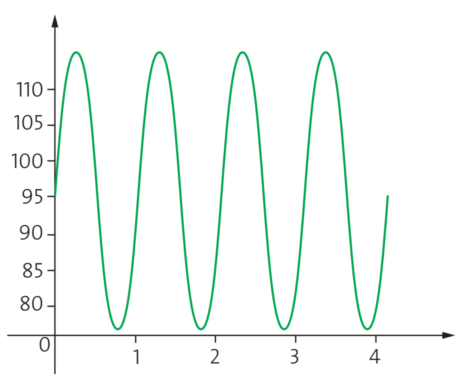
a) O valor máximo da pressão arterial da pessoa é 114.

b) O valor mínimo da pressão arterial da pessoa é 78.

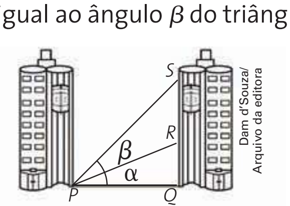
c) A pressão arterial da pessoa se repete a cada segundo, ou seja, $P(t + 1) = P(t)$, para todo $t \geqslant 0$.

d) Quando $t = \frac{1}{3}$ de segundo, temos $P\left(\frac{1}{3}\right) = 105$.

e) O gráfico de $P(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 4$ é



7. (UFRN) Um observador, situado no ponto *P* de um prédio, vê três pontos, *Q*, *R* e *S*, numa mesma vertical, em um prédio vizinho, conforme esquematizado na figura abaixo. *P* e *Q* estão num mesmo plano horizontal, *R* está 6 metros acima de *Q*, e *S* está a 24 metros acima de *Q*. Verifica-se que o ângulo α do triângulo *QPR* é igual ao ângulo β do triângulo *RPS*.



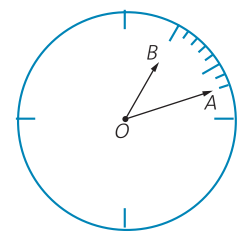
O valor, em metros, que mais se aproxima da distância entre *P* e *Q* é:

a) 8,5. c) 9,4. e) 11,5.

b) 8,8. d) 10,2.

Região Centro-Oeste

8. (UFG-GO) O mostrador do relógio de uma torre é dividido em 12 partes iguais (horas), cada uma das quais é subdividida em outras 5 partes iguais (minutos). Se o ponteiro das horas (*OB*) mede 70 cm e o ponteiro dos minutos (*OA*) mede 1 m, qual será a distância *AB*, em função do ângulo entre os ponteiros, quando o relógio marcar 1 hora e 12 minutos?



9. (UFGD-MS) Um dispositivo mecânico pode girar no sentido horário e anti-horário e um contador registra o ângulo, em graus, que mede o quanto o dispositivo girou em relação ao ponto de partida. Se o contador marca um ângulo de 5 000° negativos, o ângulo positivo correspondente é:

a) 32°. d) 40°.

b) 320°. e) 328°.

c) 13°.

10. (Unemat-MT) Um estudante, ao resolver uma questão de Trigonometria, chegou à seguinte expressão: $\dfrac{\text{sen } 150° + \cos 135°}{\text{sen } 210°}$. Com base nisso, julgue os itens.

1) O valor da expressão equivale a $\sqrt{2} - 1$.

2) A expressão $\cos(-x) = \cos x$ é válida para todo x pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$.

3) O valor da expressão $\text{sen } y + \cos x$ é sempre menor ou igual a 2, independente dos valores de x e de y.

11. (UFG-GO) Certas combinações entre as funções e^x e e^{-x} (onde "e" é o número de Euler, $x \in \mathbb{R}$) surgem em diversas áreas, como Matemática, Engenharia e Física. O seno hiperbólico e o cosseno hiperbólico são definidos por $\text{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Então, $\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x)$ é igual a:

a) 0. d) 1.

b) $\frac{1}{4}$. e) -1.

c) $-\frac{1}{4}$.

Região Sudeste

12. (Uerj) A extremidade A de uma planta aquática encontra-se 10 cm acima da superfície da água de um lago (fig. 1).

Quando a brisa a faz balançar, essa extremidade toca a superfície da água no ponto B, situado a $10\sqrt{3}$ cm do local em que sua projeção ortogonal C, sobre a água, encontrava-se inicialmente (fig. 2). Considere $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{BC}$ segmentos de retas e o arco AB uma trajetória do movimento da planta.

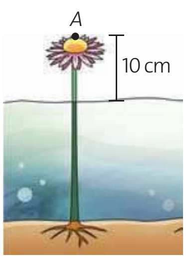


Fig. 1

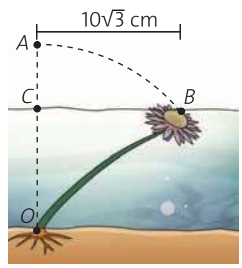


Fig. 2

Dam d'Souza/Arquivo da editora

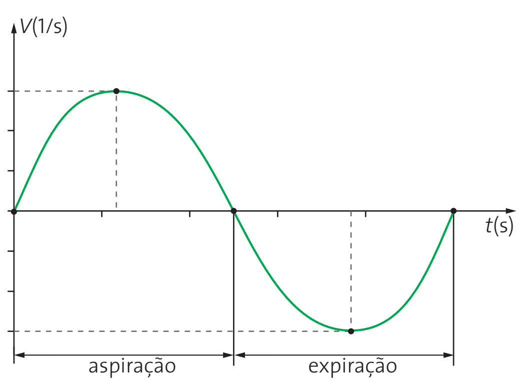
Determine:

a) a profundidade do lago no ponto O em que se encontra a raiz da planta;

b) o comprimento, em cm, do arco $\overset{\frown}{AB}$.

13. *Biologia*

(Vunesp-SP) Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.



Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 m/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é:

a) $V(t) = \frac{2\pi}{5}\,\text{sen}\left(\frac{3}{5}t\right)$.

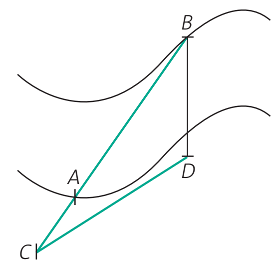
b) $V(t) = \frac{3}{5}\,\text{sen}\left(\frac{5}{2\pi}t\right)$.

c) $V(t) = 0{,}6\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

d) $V(t) = 0{,}6\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

e) $V(t) = \frac{5}{2\pi}\cos(0{,}6t)$.

14. (Vunesp-SP) Para calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos A e B, um observador que se encontra junto a A afasta-se 20 m da margem, na direção da reta AB, até o ponto C e depois caminha em linha reta até o ponto D, a 40 m de C, do qual ainda pode ver as árvores. Tendo verificado que os ângulos $C\hat{D}B$ e $B\hat{D}C$ medem, respectivamente, cerca de 15° e 120°, que valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação $\sqrt{6} \simeq 2{,}4$?

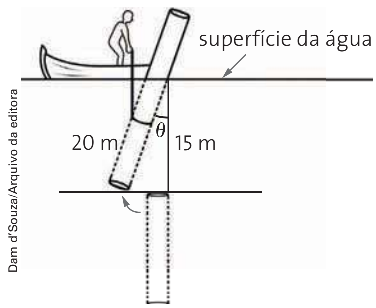


15. (PUCC-SP) Leia o texto:

Construída a toque de caixa pelo regime militar, Tucuruí inundou uma área de 2 000 km², sem que dela se retirasse a floresta. A decomposição orgânica elevou os níveis de emissão de gases, a ponto de fazer da represa, nos anos 1990, a maior emissora de poluentes do Brasil. Ganhar a vida cortando árvores submersas exige que um mergulhador desça a mais de 20 metros, com praticamente zero de visibilidade e baixas temperaturas. Amarrado ao tronco da árvore, maneja a motosserra.

Adaptado de *Veja*, ano 37. n. 23. ed. 1857. São Paulo: Abril. p. 141.

Uma vez serrada, a árvore é puxada e amarrada a pedaços de madeira seca.



No instante em que o tronco de madeira de 20 m de comprimento forma um ângulo θ com a vertical de 15 m, o valor de cos 2θ é igual a:

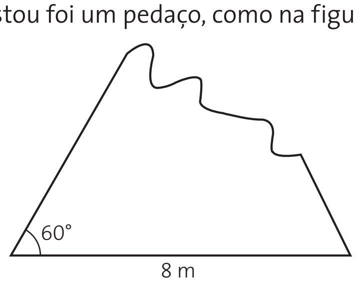
a) $\frac{3}{2}$.
c) $\frac{9}{16}$.
e) $\frac{1}{8}$.
b) $\frac{9}{8}$.
d) $\frac{7}{16}$.

16. (Fatec-SP) Em uma região plana de um parque estadual, um guarda florestal trabalha no alto de uma torre cilíndrica de madeira de 10 m de altura. Em um dado momento, o guarda, em pé no centro de seu posto de observação, vê um foco de incêndio próximo à torre, no plano do chão, sob um ângulo de 15° em relação à horizontal. Se a altura do guarda é 1,70 m, a distância do foco ao centro da base da torre, em metros, é aproximadamente: $\left(\text{Use } \sqrt{3} = 1{,}7.\right)$

a) 31. b) 33. c) 35. d) 37. e) 39.

Região Sul

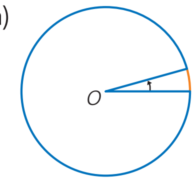
17. (UEM-PR) Um engenheiro precisa conhecer a medida de cada lado de um terreno triangular cujo perímetro é 20 m, porém a planta do terreno foi rasgada e o que restou foi um pedaço, como na figura a seguir.

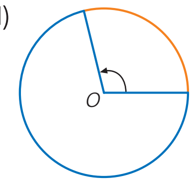


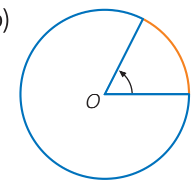
Os lados do triângulo que não aparecem totalmente na planta do terreno medem:

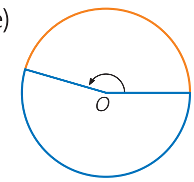
a) $3\sqrt{3}$ m e $\left(12 - 3\sqrt{3}\right)$ m.
b) 5 m e 7 m.
c) 4,5 m e 7,5 m.
d) 8 m e 4 m.
e) 3 m e 9 m.

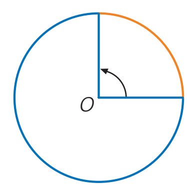
18. (UFRGS-RS) Dentre os desenhos abaixo, aquele que representa o ângulo que tem medida mais próxima de 1 radiano é:

a)


d)


b)


e)


c)


19. (UFPR) Suponha que o horário do pôr do sol na cidade de Curitiba, durante o ano de 2009, possa ser descrito pela função $f(t) = 18{,}8 - 1{,}3\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t\right)$, sendo t o tempo dado em dias e $t = 0$ o dia 1º de janeiro. Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

1. O período da função acima é 2π.
2. Foi no mês de abril o dia em que o pôr do sol ocorreu mais cedo.
3. O horário em que o pôr do sol ocorreu mais cedo foi 17h30.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

20. (UPF-RS) Considerando que $\text{sen}\, x = \frac{2}{3}$ e x pertence ao segundo quadrante, o valor de $\frac{\tan x + \cot x}{\sec x + \csc x}$ é:

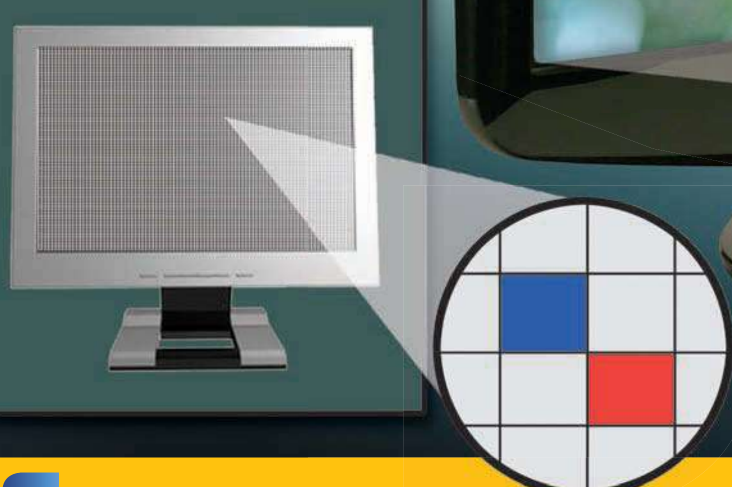
a) $-\text{sen}\, x$.
d) $-3\left(2 + \sqrt{5}\right)$
b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
e) $-6 + \sqrt{5}$
c) $\cos^2 x$

UNIDADE

2 Matrizes, determinantes e sistemas lineares

O monitor de computador funciona como uma matriz (tabela) com informações (pontos coloridos mostrados na tela, os *pixels*) armazenadas em linhas e colunas. Um *pixel* é o menor ponto que forma uma imagem digital, e o conjunto de milhares de *pixels*, ao qual é possível atribuir-se uma cor, forma a imagem inteira.

É comum que o monitor de 15 polegadas tenha resolução de 600 × 800 (600 linhas por 800 colunas) e o de 21 polegadas tenha resolução de 1 200 × 1 600 (1 200 linhas por 1 600 colunas).



A definição da imagem apresentada na tela está relacionada com a quantidade de linhas e colunas que a formam. Ela pode ser bem definida (alta resolução) ou distorcida (baixa resolução).

20 × 18 *pixels*

45 × 40 *pixels*

90 × 80 *pixels*

180 × 160 *pixels*

Foto: Mircea Bezergheanu/Shutterstock/Glow Images

1. Como é formada uma imagem digital?

2. A que está relacionada a definição da imagem digital?

CAPÍTULO

5

Matrizes e determinantes

A necessidade de se escrever mensagens sigilosas é muito antiga. Ao longo da história, reis, rainhas, generais, entre outros, buscaram meios eficientes de comunicação entre os seus aliados. O grande diferencial no tipo de comunicação que eles buscavam era o de não revelar segredos e estratégias aos inimigos. Esse contexto motivou o desenvolvimento de códigos e cifras, ou seja, técnicas para mascarar uma mensagem, de modo que apenas o destinatário consiga entender o conteúdo.

Bioraven/Shutterstock/Glow Images

A criptografia – do grego *kryptós* (escondido) e *gráphein* (escrita) – tem por objetivo codificar mensagens para assegurar a integridade e o sigilo da informação. Em vários momentos da história essa técnica ajudou a decidir os resultados de batalhas.

Atualmente, as informações também são muito valiosas e o processo de codificação de mensagens tem um papel cada vez maior na sociedade, principalmente no que se refere à internet. Na rede mundial de computadores muitas informações são trocadas e o grande desafio é manter o sigilo das informações, por exemplo, instituições financeiras, lojas e *sites* precisam manter as informações dos seus clientes em sigilo.

A criptografia utilizada por grandes empresas e governos realiza cálculos complexos para obtenção de um modelo seguro e quase indecifrável. Mas é possível utilizarmos conceitos simples da álgebra matricial como “chave codificadora/decodificadora”, tais como produto de matrizes, matriz identidade, matriz quadrada e matriz inversa, que devem ser do conhecimento tanto do remetente como do destinatário da mensagem. Neste capítulo você aprenderá essa técnica.

1 Introdução às matrizes

Atualmente, um dos bens mais desejados pelas empresas é a informação sobre os potenciais clientes. Algumas das empresas mais valiosas e lucrativas do mundo são detentoras de uma enorme quantidade dessas informações, como, por exemplo, alguns *sites* de busca e algumas redes sociais.

Essas informações, porém, não teriam valor algum se não fossem organizadas de forma lógica e não pudessem ser facilmente recuperadas e relacionadas. Essa organização é feita usando-se um banco de dados, que é uma coleção de tabelas relacionadas entre si.

As **matrizes** são tabelas que relacionam dados numéricos.

» Faça dupla com um colega e façam o que se pede.

As tabelas a seguir relacionam dados sobre o desempenho das equipes do grupo **B** da Liga Mundial de Vôlei, em 2012. Depois de analisar os dados das tabelas, construam uma tabela com a pontuação total dessas quatro equipes.

Alexandre Guzanshe/EM/D.A Press

Lance da partida entre Brasil e Polônia durante a Liga Mundial 2012 de vôlei masculino.

	Vitórias por 3×0 ou 3×1	Vitórias por 3×2	Derrotas por 3×0 ou 3×1	Derrotas por 3×2
Canadá	2	1	7	2
Finlândia	2	2	8	0
Brasil	7	0	1	4
Polônia	8	2	1	1

	Pontos obtidos pela equipe
Vitória por 3×0 ou 3×1	3
Vitória por 3×2	2
Derrota por 3×0 ou 3×1	0
Derrota por 3×2	1

Agora, acompanhe esta outra situação:

Em uma editora, a venda de livros de Matemática, Física e Química no primeiro trimestre de um ano pode ser expressa pela tabela a seguir.

	Janeiro	Fevereiro	Março
Matemática	20 000	32 000	45 000
Física	15 000	18 000	25 000
Química	16 000	17 000	23 000

Se quisermos saber:

- quantos livros de Matemática foram vendidos em fevereiro, basta olharmos o número que está na **primeira linha** e na **segunda coluna**;
- quantos livros de Física foram vendidos em janeiro, basta olharmos o número que está na **segunda linha** e na **primeira coluna**;
- quantos livros de Química foram vendidos em março, basta olharmos o número que está na **terceira linha** e na **terceira coluna**.

Uma tabela desse tipo, em que os números estão dispostos em 3 linhas e 3 colunas, denomina-se **matriz 3 × 3** (lê-se três por três) e podemos representá-la por:

$$\begin{bmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 17\,000 & 23\,000 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 17\,000 & 23\,000 \end{pmatrix}$$

Para refletir
Por que se diz "matriz três por três"?

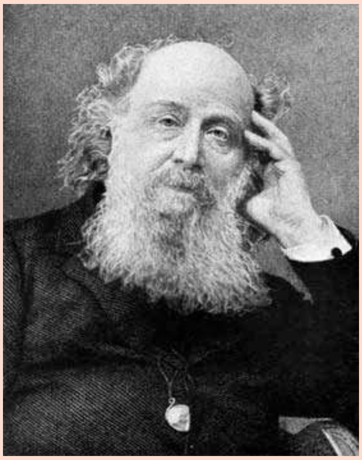
CURIOSIDADE

Historicamente, a representação de conjuntos de números em forma de matrizes aparece no século XIX, embora haja indícios de que por volta de 2500 a.C. os chineses já resolvessem alguns tipos de problemas com cálculos efetuados sobre uma tabela (apresentados em um dos nove capítulos do livro chinês *Chui-Chang Suan-Shu*, que trata da arte matemática). Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês, parece ter sido o primeiro a nomear essas configurações numéricas de *tableau* ('tabela', em francês), em 1826, e só em 1850, com o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897), é que esse tipo de configuração numérica recebeu o nome de matriz.

SPL/Latinstock

Augustin-Louis Cauchy

Bettmann/Corbis/Latinstock



James Joseph Sylvester

2 Definição de matriz

Sejam m e n dois números inteiros maiores ou iguais a 1.

> Denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) uma tabela retangular formada por $m \cdot n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas.

Dizemos que a matriz é do **tipo** $m \times n$ ou de **ordem** $m \times n$.

Exemplos:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×2 (dois por dois – duas linhas e duas colunas).

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -5 & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3 (dois por três – duas linhas e três colunas).

c) Quando $m = 1$, a matriz é chamada **matriz linha**. Por exemplo: $(1 \;\; 3 \;\; -2)$ é uma matriz linha do tipo 1×3.

Para refletir
Por que se diz "matriz linha" e "matriz coluna"?

d) Quando $n = 1$, a matriz é chamada **matriz coluna**. Por exemplo: $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna do tipo 4×1.

Quando temos matrizes linha ou matrizes coluna, também podemos chamá-las de **vetores**. Embora essa não seja uma denominação comum no Ensino Médio, é bastante utilizada no Ensino Superior, principalmente em Computação e Álgebra linear. É muito comum uma matriz linha como $[2 \;\; 0 \;\; 5]$ ser escrita como $(2, 0, 5)$ quando se trabalha com vetores.

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Escreva no caderno a matriz correspondente à tabela de notas de três alunos no primeiro bimestre:

	Matemática	Física	Química	Biologia
Ana	6	4	5	8
Antônio	5	7	5	5
Beatriz	5	6	7	4

2. Com relação à matriz do exercício 1, responda:
   a) O que significam os números da 1ª linha?
   b) O que significam os números da 2ª coluna?
   c) O que significa o número da 3ª linha e 3ª coluna?

3 Representação genérica de uma matriz

Os números que aparecem na matriz são chamados **elementos** ou **termos** da matriz.

Analisemos, por exemplo, a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & 10 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Nela, podemos observar que:

- o elemento 3 está na **1ª linha** e na **1ª coluna**; indica-se: a_{11} (lê-se a um um) $= 3$;
- o elemento -5 está na **2ª linha** e na **1ª coluna**; indica-se: a_{21} (lê-se *a* dois um) $= -5$;
- o elemento 6 está na **3ª linha** e na **1ª coluna**; indica-se: a_{31} (lê-se: *a* três um) $= 6$;
- o elemento 2 está na **1ª linha** e na **2ª coluna**; indica-se: a_{12} (lê-se: *a* um dois) $= 2$;
- o elemento $\sqrt{2}$ está na **3ª linha** e na **4ª coluna**; indica-se: a_{34} (lê-se: *a* três quatro) $= \sqrt{2}$.

Assim:

- para representar o elemento de uma matriz, usamos uma letra com dois índices: o primeiro indica em que **linha** o elemento se encontra, e o segundo indica em que **coluna**; por exemplo, a_{23} é o elemento que está na 2ª linha e na 3ª coluna;
- o elemento genérico de uma matriz A será indicado por a_{ij}, em que i representa a linha, e j representa a coluna na qual o elemento se encontra; ele é chamado ij-ésimo elemento da matriz;
- a matriz A, do tipo $m \times n$, será escrita, genericamente, do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ chama-se a i-ésima linha ou o i-ésimo vetor linha da matriz, enquanto $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$ chama-se a j-ésima coluna ou o j-ésimo vetor coluna da matriz.

De maneira abreviada, podemos escrever a matriz A na forma:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \text{ com } 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n \text{ e } i < j \in \mathbb{N}$$

Fique atento!
Podemos também escrever: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Lê-se: matriz A, dos elementos a_{ij}, do tipo $m \times n$.

Por exemplo, acompanhe como escrever a matriz $X = (a_{ij})$, com $1 \leqslant i \leqslant 3$ e $1 \leqslant j \leqslant 3$, tal que $\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ para } i = j \\ a_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j \end{cases}$.

A matriz deve ter 3 linhas e 3 colunas tal que:

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$

$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$

Assim, $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4 Matrizes especiais

Matriz quadrada

Consideremos uma matriz $m \times n$. Quando $m = n$ (o número de linhas é igual ao número de colunas), diz-se que a matriz é **quadrada** do tipo $n \times n$ ou simplesmente de ordem n.

Exemplos:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de **ordem 2** ($m = n = 2$).

b) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ -1 & -4 & 6 \\ \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de **ordem 3** ($m = n = 3$).

Fique atento!
Se $i = j$, então a_{ij} está na diagonal principal.
Se $i > j$, então a_{ij} está abaixo da diagonal principal.
Se $i < j$, então a_{ij} está acima da diagonal principal.

Em uma matriz quadrada de ordem n, os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ formam a **diagonal principal** da matriz (são os elementos a_{ij} com $i = j$).

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ diagonal principal

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -3 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ diagonal principal

Você sabia?
A outra diagonal da matriz quadrada, que vai do último elemento da 1ª linha até o 1º elemento da última linha, é conhecida como diagonal secundária.

Matriz identidade

A matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero é chamada **matriz identidade** e seu símbolo é I_n.

Exemplos:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_1 = [1]$$

Em uma matriz identidade temos: $\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ para } i = j \\ a_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j \end{cases}$.

Matriz nula

No conjunto das matrizes, a matriz que tem todos os elementos iguais a zero denomina-se **matriz nula**. Vamos simbolizar a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m \times n}$, e a matriz nula de ordem n por 0_n.

Exemplos:

$$0_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0_{1 \times 4} = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$$

Na matriz nula do tipo $m \times n$ temos $a_{ij} = 0$, quaisquer que sejam i e j, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

5 Igualdade de matrizes

Vamos considerar duas matrizes, A e B, de mesmo tipo, $m \times n$, no caso 3×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Em matrizes de mesmo tipo, os elementos que ocupam a mesma posição são denominados **elementos correspondentes**.

Então, nas matrizes A e B consideradas, são elementos correspondentes:

$$\begin{array}{ll} a_{11} \text{ e } b_{11} & a_{12} \text{ e } b_{12} \\ a_{21} \text{ e } b_{21} & a_{22} \text{ e } b_{22} \\ a_{31} \text{ e } b_{31} & a_{32} \text{ e } b_{32} \end{array}$$

Definimos:

> Duas matrizes, A e B, são iguais se, e somente se, têm o mesmo tipo e seus elementos correspondentes são iguais.
>
> Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos simbolicamente:
>
> $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$

Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \equiv 2 & 2 - 1 \\ 5 \cdot 1 & 4 + 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ as matrizes são quadradas de ordem 2 e os elementos correspondentes são iguais.

b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, então $A \neq B$, pois A e B não têm o mesmo tipo.

Exercício resolvido

1. Determine x e y para que sejam iguais as matrizes $\begin{pmatrix} 3x+2y & 2 \\ 2 & 3x-3y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -3y \end{pmatrix}$.

Resolução:

As duas matrizes têm a mesma ordem (2).

Para que as matrizes sejam iguais devemos ter ainda:

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 3x-3y=-3 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações do 1º grau, temos:

$$\begin{array}{r} \cancel{3x} + 2y = 7 \\ -\cancel{3x} + 3y = 3 \\ \hline 5y = 10 \end{array} \Rightarrow y = 2$$

$3x + 2y = 7 \Rightarrow 3x + 2(2) = 7 \Rightarrow 3x + 4 = 7 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

Portanto, $x = 1$ e $y = 2$.

6 Adição e subtração de matrizes

Acompanhe a seguinte situação:

O gerente de vendas de uma loja tem à sua disposição as tabelas de vendas mensais, em reais, dos seus três vendedores, por produto vendido. Veja:

	Vendas em janeiro (R$)	
Vendedor	**Geladeiras**	**Fogões**
Paulo	23 000,00	12 000,00
Germano	27 000,00	10 000,00
Rodolfo	19 000,00	15 000,00

	Vendas em fevereiro (R$)	
Vendedor	**Geladeiras**	**Fogões**
Paulo	21 000,00	10 000,00
Germano	16 000,00	6 000,00
Rodolfo	20 000,00	9 000,00

O gerente precisava saber as vendas do 1º bimestre, em reais por produto vendido, dos seus três vendedores. Nesse caso, ele somou os dados das duas tabelas (janeiro e fevereiro), obtendo a tabela dos dados bimestrais:

	Vendas no 1º bimestre (R$)	
Vendedor	**Geladeiras**	**Fogões**
Paulo	44 000,00	22 000,00
Germano	43 000,00	16 000,00
Rodolfo	39 000,00	24 000,00

Para refletir
Qual foi o melhor vendedor de geladeiras do bimestre? E de fogões?

Depois, o gerente precisava saber a evolução das vendas de janeiro para fevereiro: tiveram aumento? diminuíram? qual a diferença do faturamento entre janeiro e fevereiro?

Uma maneira de obter essas informações é calcular a diferença dos dados das duas primeiras tabelas (fevereiro e janeiro), obtendo a tabela da evolução das vendas de janeiro para fevereiro:

	Evolução das vendas de janeiro e fevereiro (R$)	
Vendedor	**Geladeiras**	**Fogões**
Paulo	−2 000,00	−2 000,00
Germano	−11 000,00	−4 000,00
Rodolfo	1 000,00	−6 000,00

Para refletir
Qual vendedor teve a maior queda de vendas de geladeira de janeiro para fevereiro?

Esse exemplo ilustra as operações de adição e subtração de matrizes.

Adição de matrizes

Consideremos duas matrizes, A e B, do tipo 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar uma matriz C tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ou seja, $A + B = C$:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}}^{A} + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{B} = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+(-4) & (-2)+(-1) \\ 2+7 & 8+0 & (-6)+2 \\ 1+3 & 4+1 & 2+0 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 9 & 8 & -4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}}^{C}$$

A matriz C assim obtida denomina-se **soma da matriz *A* com a matriz *B*** ou **soma das matrizes *A* e *B***. Assim:

Dadas duas matrizes, A e B, do mesmo tipo, $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B, que representamos por $A + B$, a matriz C do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B.

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes do tipo $m \times n$, a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times n$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ com } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant n$$

Para refletir

Escolha três matrizes, A, B e C, de mesma ordem e verifique que:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0 = 0 + A = A$, sendo 0 a matriz nula de mesma ordem
- $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Matriz oposta de uma matriz *A*

Denomina-se **matriz oposta** de uma matriz A (representa-se por $-A$) a matriz que somada com A resulta em uma matriz nula.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, então a matriz oposta de A é $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, pois:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matriz nula}}$$

Observação: Os elementos correspondentes de A e $-A$ são números opostos. Obtemos $-A$ mudando os sinais de todos os elementos de A.

Subtração de matrizes

Sendo A e B duas matrizes do tipo $m \times n$, denomina-se diferença entre A e B (representada por $A - B$) a soma da matriz A com a matriz oposta de B.

$$A - B = A + (-B)$$

Para refletir
Lembra-se da diferença entre números inteiros?
$3 - 4 = 3 + (-4)$

Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Podemos também definir $A - B$ assim:

> Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, $A - B = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, para $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Exercícios

3. Identifique os elementos a_{11}, a_{22} e a_{13} na matriz $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Escreva as matrizes:
a) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i^2 + j^2$.
b) $X = (a_{ij})_{4 \times 2}$ de modo que $a_{ij} = 2i^2 - j$.

5. Escreva a matriz quadrada:
a) de ordem 2, cujo elemento genérico é $a_{ij} = 4i - 2j + 3$;
b) de ordem 3 tal que $a_{ij} = i^3 - 2j$.

6. Seja a matriz quadrada $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$. Calcule a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

7. Sabendo que $\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ 2b & 2a-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$, determine a, b, c e d.

8. Escreva a matriz identidade de ordem 2 (I_2) e a matriz identidade de ordem 3 (I_3).

9. Determine m e n para que se tenha $\begin{pmatrix} m+n & m \\ 0 & n \end{pmatrix} = I_2$.

10. Determine a, b e c para que se tenha $\begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ a-3c & b \\ 2b & 0 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 2}$.

11. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcule:
a) $A + B - C$
b) $A - B + C$
c) $A - B - C$

12. Dadas as seguintes matrizes quadradas de ordem 2:
A com $a_{ij} = \begin{cases} i + 2j, \text{ para } i \geqslant j \\ 0, \text{ para } i < j \end{cases}$ e B com
$b_{ij} = \begin{cases} i^3, \text{ para } i \geqslant j \\ 0, \text{ para } i < j \end{cases}$, calcule $A + B$ e $B + A$.

13. A e B são duas matrizes quadradas de ordem 2, cujos elementos são dados por $a_{ij} = 3i - 2j$ e $b_{ij} = (a_{ij})^2$. Calcule:
a) $A - B$
b) $A + B$

14. Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij} = 2i + 3j - 5$, escreva a matriz oposta de A.

15. Se $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -10 & 7 \end{bmatrix} + 0$, escreva X sabendo que 0 é a matriz nula do tipo 2×3.

7 Multiplicação de número real por matriz

Vamos voltar à situação do gerente de vendas:

Suponha que a comissão dos vendedores seja de 5% sobre o total mensal de vendas, em cada tipo de produto. Dessa forma, o gerente pode desejar ter a informação sobre qual é o custo das comissões pagas aos vendedores, por tipo de produto vendido, em janeiro. Para obter tal informação, ele pode multiplicar cada valor da tabela das vendas de janeiro por 0,05 (pois 0,05 = 5%, que é o percentual pago de comissão pelas vendas). Assim, teríamos:

	Comissões pagas em janeiro (R$)	
Vendedor	**Geladeiras**	**Fogões**
Paulo	$23\,000,00 \cdot 0,05$	$22\,000,00 \cdot 0,05$
Germano	$43\,000,00 \cdot 0,05$	$16\,000,00 \cdot 0,05$
Rodolfo	$39\,000,00 \cdot 0,05$	$24\,000,00 \cdot 0,05$

Efetuados os cálculos, a tabela com a informação das comissões pagas em janeiro seria:

	Comissões pagas em janeiro (R$)	
Vendedor	**Geladeiras**	**Fogões**
Paulo	1150,00	1100,00
Germano	2150,00	800,00
Rodolfo	1950,00	1200,00

Esse exemplo ilustra a operação de multiplicar uma matriz por um número real.

Acompanhe outro exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, então $2A$:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 & 2 \cdot 8 & 2(-1) \\ 2(-4) & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 & -2 \\ -8 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Assim:

Se A é uma matriz $m \times n$, de elementos a_{ij}, e α é um número real, então αA é uma matriz $m \times n$ cujos elementos são αa_{ij}.

Para refletir

Sendo α e β números reais e A e B matrizes de mesma ordem, verifique que:

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

$1A = A$

8 Matriz transposta

O mesmo gerente citado anteriormente vai fazer uma apresentação para seus superiores e, entre outras coisas, deseja mostrar as vendas bimestrais dos três vendedores. Ao preparar a apresentação, ele percebe que a visualização da tabela ficaria melhor se os vendedores estivessem nas colunas e os produtos nas linhas da tabela. Em outras palavras, ele quer fazer o seguinte:

A tabela era assim:

	Vendas no 1º bimestre (R$)	
Vendedor	**Geladeiras**	**Fogões**
Paulo	44 000,00	22 000,00
Germano	43 000,00	16 000,00
Rodolfo	39 000,00	24 000,00

E vai ficar assim:

	Vendedor	Paulo	Germano	Rodolfo
Vendas no 1º bimestre (R$)	**Geladeiras**	44 000,00	43 000,00	39 000,00
	Fogões	22 000,00	16 000,00	24 000,00

A nova tabela do gerente é um exemplo de transposição de matriz.

Então:

Seja A uma matriz $m \times n$, denomina-se **matriz transposta** de A (indica-se por A^t) a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A.

Para refletir
Qual é o significado da palavra “ordenadamente” nessa definição?

Exemplos:

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 10 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

Notamos que, se $A = (a_{ij})$ é do tipo $m \times n$, então $A^t = (b_{ji})$ é do tipo $n \times m$ e $b_{ji} = a_{ij}$.

Exercícios

16. Escreva a matriz transposta das seguintes matrizes:

a) $A = (5\ 2\ 6)$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

17. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, determine:

a) $A + B$

b) $A - B$

c) $5A$

d) A^t

e) B^t

f) $A^t + B$

g) $A + B^t$

h) $3 \cdot A^t$

i) $(5A - B)^t$

j) $(3A)^t - 3A^t$

k) $-(A^t + B^t)$

18. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 cujos elementos são dados por $aij = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ i + j, \text{ se } i = j \end{cases}$, calcule:

a) A

b) $A + I_3$

c) $A + O_3$

d) $3A$

e) A^t

f) $A + A^t$

g) $A - A^t$

h) $2A + 3A^t - I_3$

19. DESAFIO EM DUPLA Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, mostrem que:

a) $(A^t)^t = A$

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

c) $(2A)^t = 2A^t$

d) $(A - B)^t = A^t - B^t$

Para refletir

Verifique que:
- $(A^t)^t = A$
- $(\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$

20. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, determine:

a) $A^t + B$

b) $(5A + B^t)$

21. DESAFIO EM DUPLA Uma equipe de criadores de jogos para celular acabou de lançar dois jogos, o "Avião Maluco" e o "Fura Bolo", nas versões **A** e **B**. As tabelas abaixo mostram o número de *downloads* de cada jogo, em cada tipo de versão, por dia:

	***Downloads* em 23 de outubro**	
Jogo	**Versão A**	**Versão B**
Avião Maluco	23	21
Fura Bolo	28	36

	***Downloads* em 24 de outubro**	
Jogo	**Versão A**	**Versão B**
Avião Maluco	67	89
Fura Bolo	122	104

De acordo com os dados das tabelas, façam o que se pede:

a) Elaborem a matriz A, quadrada de ordem 2, com os dados da tabela do dia 23 de outubro.

b) Elaborem a matriz B, quadrada de ordem 2, com os dados da tabela do dia 24 de outubro.

c) Elaborem a matriz $A + B$ e interpretem o que são os valores dessa matriz, de acordo com o contexto do enunciado.

d) Elaborem a matriz $B - A$ e interpretem o que são os valores dessa matriz, de acordo com o contexto do enunciado.

e) Exatamente 10% do total de usuários que fizeram o *download* dos jogos nesses dois dias avaliaram os jogos como sendo ótimos. Qual alternativa abaixo contém a operação matricial que gera a matriz C contendo a quantidade de usuários que nesses dois dias avaliou cada jogo, em cada versão, como sendo ótimo?

- $C = 0{,}1 \cdot A + B$
- $C = 0{,}1 \cdot A^t + B$
- $C = 0{,}1 \cdot (A + B)$
- $C = 0{,}1 \cdot (A^t + B)$

9 Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes não é uma operação tão simples como as outras já estudadas até aqui; não basta multiplicar os elementos correspondentes. Vamos introduzi-la por meio da seguinte situação:

Durante as Olimpíadas, realizadas em Londres em 2012, o grupo **C** do futebol masculino era formado por quatro países: Brasil, Egito, Bielorrússia e Nova Zelândia. Observe os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada um, registrados em uma tabela e em uma matriz A, do tipo 4×3:

	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	3	0	0
Egito	1	1	1
Bielorrússia	1	0	2
Nova Zelândia	0	1	2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pelo regulamento das Olimpíadas, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente (3 pontos, 1 ponto ou 0 ponto). Veja esse fato registrado em uma tabela e em uma matriz B, do tipo 3×1.

	Número de pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Terminada a primeira fase, foi verificado o total de pontos dos países participantes. Essa pontuação pode ser registrada em uma matriz que é representada por AB (produto de A por B). Veja como é obtida a matriz da pontuação dos países de cada grupo:

Brasil: $3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 9$

Egito: $1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$

Bielorrússia: $1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$

Nova Zelândia: $0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$

$$AB = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esse exemplo sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Observe a relação que existe entre as ordens das matrizes:

$$A_{4 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = AB_{4 \times 1}$$

Para refletir
Como é determinado cada elemento de AB?

Veja agora a definição matemática da multiplicação de matrizes:

> Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$ e uma matriz $B = (b_{ij})$ do tipo $n \times p$, o produto da matriz A pela matriz B é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times p$ tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos da coluna j, da matriz B, e somando-se os produtos obtidos. Para dizer que a matriz C é o produto de A por B, vamos indicá-la por AB.

Observe que só definimos o produto AB de duas matrizes quando o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B; além disso, notamos que o produto AB possui o número de linhas de A e o número de colunas de B:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = AB_{m \times p}$$

CONTEÚDO DIGITAL

Fique atento!
A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, ou seja, quando existirem os produtos, temos:
$A \cdot I = A$ e $I \cdot B = B$

» **passo a passo:** exercício 5

Exercícios resolvidos

2. Dadas as matrizes $A = (a_{11}, a_{12}, a_{13})_{1 \times 3}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}_{3 \times 1}$, determine AB:

Resolução:

$$AB = (a_{11}, a_{12}, a_{13})_{1 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}_{3 \times 1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

3. Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, determine AB.

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ é uma matriz } 2 \times 3 \\ B \text{ é uma matriz } 3 \times 2 \end{array}\right\} AB \text{ será uma matriz } 2 \times 2.$$

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

c_{11}: usa-se a **1ª linha** de A e a **1ª coluna** de B, multiplicando-se ordenadamente os elementos:
$1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 17$
c_{12}: usa-se a **1ª linha** de A e a **2ª coluna** de B: $1 \cdot 0 + 3(-2) + 2 \cdot 6 = 6$
c_{21}: usa-se a **2ª linha** de A e a **1ª coluna** de B: $0 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + (-1)1 = 19$
c_{22}: usa-se a **2ª linha** de A e a **2ª coluna** de B: $0 \cdot 0 + 5(-2) + (-1)6 = -16$

Concluindo: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}}_{A_{2\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}}_{B_{3\times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 19 & -16 \end{bmatrix}}_{AB_{2\times 2}}$

4. Dados $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, determine AB.

Resolução:

Como A é uma matriz 3×2 e B é uma matriz 2×2, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B; assim, está definido o produto AB, que será uma matriz 3×2, isto é:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 + 0 \cdot 6 & 5 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 15 & 5 \\ 27 & 9 \end{pmatrix}}_{3 \times 2}$$

» Resolvido passo a passo

5. *Biologia*

(UEL-PR) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz M fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por cada grama ingerida dos alimentos citados.

$$D = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{fruta} \\ \text{leite} \\ \text{cereais} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{fruta} & \text{leite} & \text{cereais} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{proteínas} \\ \text{gorduras} \\ \text{carboidratos} \end{array}$$

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é:

a) $\begin{bmatrix} 18{,}20 \\ 36{,}30 \\ 454{,}20 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 29{,}70 \\ 16{,}20 \\ 460{,}20 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 48{,}30 \\ 36{,}00 \\ 432{,}40 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 51{,}90 \\ 48{,}30 \\ 405{,}60 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} 75{,}90 \\ 21{,}50 \\ 411{,}00 \end{bmatrix}$.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dadas duas matrizes, uma delas com a quantidade mínima de frutas, leite e cereais necessária para uma alimentação sadia dos atletas de um time de futebol; e a outra com a quantidade de proteínas, gorduras e carboidratos obtida pela ingestão de cada grama de frutas, leite e cereais.

b) O que se pede?

Pede-se a matriz que contém como elementos a quantidade mínima diária de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão dos alimentos recomendados pela nutricionista do enunciado.

2. Planejando a solução

Podemos usar duas estratégias:

- *1ª estratégia*:
  Usando as matrizes apenas como fonte de informação e interpretando corretamente o texto, podemos determinar as quantidades pedidas, para posteriormente montar uma matriz com essas quantidades;
- *2ª estratégia*:
  Mais teórica, faz uso do conceito de multiplicação de matrizes. A matriz resposta será o produto da matriz M pela matriz D, nessa ordem, pois sabemos que na matriz resposta teremos as linhas sendo quantidade de proteínas, gorduras e carboidratos, como na matriz M. Assim, chamando de X a matriz resposta, teremos $X = M \cdot D$.

3. Executando o que foi planejado

- *1ª estratégia*:
  Basta interpretarmos adequadamente o conteúdo de cada matriz dada. Assim, para obter a quantidade diária mínima de proteína fornecida pela ingestão daqueles alimentos, basta sabermos a quantidade de cada alimento e quanto cada grama dele contém de proteína.

  Da matriz D sabemos que são 200 g de frutas; da matriz M sabemos que cada grama de fruta nos dá 0,006 g de proteína. Assim, o total de proteína obtido com a ingestão de frutas é $200 \cdot 0{,}006 = 1{,}2$ g.

  Da matriz D sabemos que são 300 g de leite; da matriz M sabemos que cada grama de leite nos dá 0,033 g de proteína. Assim, o total de proteína obtido com a ingestão de leite é $300 \cdot 0{,}033 = 9{,}9$ g.

  Da matriz D sabemos que são 600 g de cereais; da matriz M sabemos que cada grama de cereais nos dá 0,108 g de proteína. Assim, o total de proteína obtido com a ingestão de cereais é $600 \cdot 0{,}108 = 64{,}8$ g.

  Então, o total de proteína fornecido é $1{,}2 + 9{,}9 + 64{,}8 = 75{,}9$ g.

  É interessante notar que esse resultado já é suficiente para que possamos escolher adequadamente uma alternativa, no caso a alternativa **e**, pois é a única que contém 75,9 g de proteínas na matriz resposta.

  Outro ponto a salientar é que essa estratégia, embora correta, é trabalhosa, pois para obter toda a matriz resposta ainda faltaria fazer os cálculos para gorduras e carboidratos, de forma análoga ao que fizemos para o cálculo das proteínas.
- *2ª estratégia*:
  Se a matriz resposta será dada por $X = M \cdot D$, então:

$$X = \begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}006 \cdot 200 + 0{,}033 \cdot 300 + 0{,}108 \cdot 600 \\ 0{,}001 \cdot 200 + 0{,}035 \cdot 300 + 0{,}018 \cdot 600 \\ 0{,}084 \cdot 200 + 0{,}052 \cdot 300 + 0{,}631 \cdot 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75{,}90 \\ 21{,}50 \\ 411{,}00 \end{bmatrix}.$$

  A contrapartida dessa segunda estratégia, notadamente menos trabalhosa, é o saber teórico necessário para que se perceba que o problema pode ser resolvido pelo produto de matrizes. De forma geral, quanto mais conhecimento teórico reunimos sobre determinado assunto, menos trabalho será empregado na resolução dos problemas, pois será possível avaliar a melhor estratégia na hora da resolução.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **e**.

5. Ampliando o problema

a) Suponha que os atletas dessa equipe necessitem também de certa quantidade de vitamina C, e que essa vitamina é fornecida pelas frutas, leite e cereais em determinadas quantidades. Com essa introdução da necessidade de vitamina C, o que mudaria nas matrizes D e M para que a matriz resposta contenha também a quantidade de vitamina C, além de proteínas, gorduras e carboidratos?

b) DESAFIO EM EQUIPE A profissão de nutricionista está cada vez mais presente nos vários setores da vida cotidiana, seja preparando um plano de regime para pessoas que precisam controlar o "peso" ou têm problemas de saúde, seja estabelecendo cardápios adequados para atletas de várias modalidades esportivas. Converse com seus colegas e discutam se uma alimentação adequada influi na prática de esportes.

Exercícios

22. Só definimos o produto AB de duas matrizes quando o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Então, associe **V** ou **F** a cada uma das seguintes afirmações:

a) Se A é uma matriz 3×1 e B é uma matriz 1×2, existe o produto AB.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $B = (1\ 5\ 2)$, existe o produto AB.

c) Se A é uma matriz 4×3 e B é uma matriz 1×4, existe o produto AB.

d) Se A e B são matrizes quadradas de ordem 2, então o produto AB será, também, uma matriz quadrada de ordem 2.

23. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine:

a) AB

b) BA

24. Determine o produto AB, sendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 12 & -20 \end{pmatrix}$.

25. DESAFIO EM DUPLA Observem os resultados obtidos nos exercícios 23 e 24 acima e avaliem como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada sentença abaixo (considerem A e B matrizes quadradas, de mesma ordem):

a) $AB = BA$

b) Se $AB = 0$, então $A = 0$ e $B = 0$.

Para refletir

Dadas as matrizes quadradas A e B de mesma ordem, às vezes temos $AB = BA$, mas às vezes $AB \neq BA$.

Quando $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

Dadas $E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, verifique quais são as duas matrizes que comutam.

26. ATIVIDADE EM DUPLA Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determinem:

a) A^2, em que $A^2 = AA$;

b) B^2, em que $B^2 = BB$;

c) $(A + B)(A - B)$;

d) $A^2 - B^2$.

Fique atento!

Só podemos calcular A^2 quando A é matriz quadrada.

27. ATIVIDADE EM DUPLA Observando os resultados obtidos no exercício anterior, respondam: para essas matrizes, A e B, vale a igualdade $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

28. Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ e I_2 é a matriz identidade de ordem 2, determine:

a) $A \cdot I_2$

b) $I_2 \cdot A$

29. Determine os produtos:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}(2\quad 5\quad 0)$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

30. ATIVIDADE EM DUPLA Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para seus três modelos de caminhões, com a seguinte especificação:

Componentes/Modelo	*A*	*B*	*C*
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Para os dois primeiros meses do ano, a produção da fábrica deverá seguir a tabela abaixo:

Modelo/Meses	Janeiro	Fevereiro
A	30	20
B	25	18
C	20	15

Usando a multiplicação de matrizes, respondam: nessas condições, quantos eixos e quantas rodas são necessários em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção planejada?

10 Determinante de uma matriz

O determinante de uma matriz é um número real associado às matrizes quadradas. Toda matriz quadrada possui determinante.

Historicamente, o determinante surgiu para indicar sistemas determinados (sistemas que têm solução única, como estudaremos no próximo capítulo), mas ao longo do tempo tornou-se uma ferramenta matemática com diversas aplicações.

Estudaremos os determinantes mais usuais (os de ordem 2 e de ordem 3), aprendendo a determiná-los por meio de regras práticas. Veremos também algumas de suas propriedades mais relevantes. E, ao longo desta coleção, estudaremos a aplicação dos determinantes para classificar sistemas lineares, para calcular áreas de triângulos e para obter equação da reta, entre outras coisas.

» Junte-se com um colega e reflitam sobre que valor (ou valores) de x resolve(m) cada uma das equações abaixo. Depois, discutam com os colegas da classe os valores escolhidos.

a) $2x = 8$

b) $2x = 0$

c) $0x = 0$

d) $0x = 5$

O determinante de ordem 2

Vamos analisar a solução do seguinte sistema 2×2: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$

Isolando x na primeira equação, temos:

$$x = \frac{k_1 - a_{12}y}{a_{11}}$$

Substituindo na segunda equação, temos:

$$a_{21}\left(\frac{k_1 - a_{12}y}{a_{11}}\right) + a_{22}y = k_2 \Rightarrow a_{21}k_1 - a_{12}a_{21}y + a_{11}a_{22}y = a_{11}k_2 \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}k_2 - a_{21}k_1$$

Para que exista um único valor de y que satisfaça essa igualdade é necessário que $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ não seja nulo. Existindo um único valor de y, existirá um único valor de x, e o sistema terá solução (será determinado). Sendo assim, o número $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ é chamado de **determinante da matriz de ordem 2**, pois conforme seu valor sabemos de antemão se o sistema 2×2 é ou não é determinado.

Esse número pode ser obtido facilmente a partir de operações que envolvem os elementos da matriz dos coeficientes do sistema que está sendo analisado por meio de uma regra prática.

Por exemplo, para o sistema $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$ a matriz dos coeficientes é $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Observe que, se fizermos o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária, obteremos exatamente $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, que foi definido como o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Como essa matriz é de ordem 2, o determinante é dito de ordem 2.

Assim, dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, indicamos seu determinante deste modo:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Por exemplo, o determinante de matriz A (det A), sendo $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, é dado por:

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 = -24 - 6 = -30.$$

Fique atento!

É errado escrever $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = -30$, pois não é a matriz, e sim seu determinante, um número, que é -30. O correto é $\det A = -30$ ou $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -30$.

O determinante de ordem 3

De forma análoga, vamos analisar a solução do seguinte sistema 3×3: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{cases}$

Fazendo as operações adequadas, obtemos a seguinte equação na variável z:

$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})z =$
$= (a_{11}a_{22}k_3 + a_{12}k_2a_{31} + k_1a_{21}a_{32} - k_1a_{22}a_{31} - a_{11}k_2a_{32} - a_{12}a_{21}k_3)$

Da mesma forma que na equação obtida no sistema 2×2, para que exista um único valor de z, é necessário que

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})$$

não seja nulo. Então, o número

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})$$

é chamado **determinante da matriz de ordem 3**, e, conforme seu valor, sabemos se o sistema 3×3 é determinado ou não.

Consideremos a matriz genérica de ordem 3: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$.

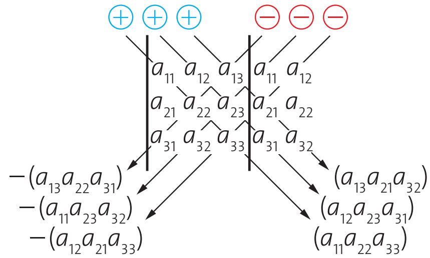
Define-se o determinante da matriz de ordem 3 ao número:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Fique atento!
Quando se diz determinante de ordem n, deve-se entender determinante de uma matriz de ordem n.

Podemos obter esses seis produtos de uma forma prática, conhecida como **regra de Sarrus**, fazendo o seguinte:

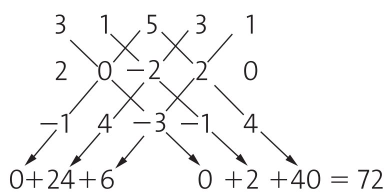
- repetimos as duas primeiras colunas à direita da matriz e efetuamos as seis multiplicações como indicado:



- os produtos obtidos na direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal;
- os produtos obtidos na direção da diagonal secundária mudam de sinal;
- o determinante é a soma dos valores assim obtidos.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$



> **Fique atento!**
> Os três produtos da esquerda já estão com o sinal trocado.

Portanto, det $A = 72$.

Teorema de Binet

> Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e AB a matriz produto, então det $(AB) = (\det A)(\det B)$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(AB) = 36 + 42 = 78$$

$$\det A \cdot \det B = (-3 - 10)(0 - 6) = (-13)(-6) = 78$$

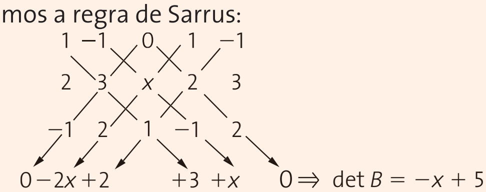
> **Para refletir**
> Calcule e compare: det $(A + B)$ e det A + det B.

Exercício resolvido

6. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de x para que se tenha det A = det B.

Resolução:

- A é matriz de ordem 2: $\det A = 2 \cdot 9 - 3x = 18 - 3x$
- B é matriz de ordem 3; usamos a regra de Sarrus:



$$\det A = \det B \Rightarrow 18 - 3x = 2x + 5 \Rightarrow -3x + x = 5 - 18 \Rightarrow -2x = -13 \Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{2}$$

Logo, $x = \dfrac{13}{2}$.

Exercícios

31. Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ a+b & a+b \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} \text{sen}\, x & \cos x \\ -\text{sen}\, y & \cos y \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} \cos a & \cos b \\ \text{sen}\, b & \cos a \end{vmatrix}$

32. Aplicando a regra de Sarrus, calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 7 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 8 & 10 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

33. DESAFIO EM DUPLA Calculem o determinante

$\begin{vmatrix} 1 & \sec^2 x & \text{cossec}^2 x \\ \text{sen}^2 x & 1 & 1 \\ \cos^2 x & \tan^2 x & \text{cotan}^2 x \end{vmatrix}$, para $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

34. ATIVIDADE EM DUPLA Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, determinem:

a) $A + B$

b) A^t

c) $A \cdot B$

d) det A

e) det A^t

f) det B

g) det $(A + B)$

h) det A + det B

i) det (AB)

j) det $A \cdot$ det B

35. Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, determine det (AB).

36. Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x-2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix} = 2$

37. Calcule o determinante das matrizes:

a) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

38. ATIVIDADE EM DUPLA Calculem o determinante das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

39. Se det $A = 5$ e det $B = 2$, determine:

a) det (AB)

b) det (A^2)

c) det (B^3)

40. ATIVIDADE EM DUPLA Lembrando que a matriz identidade I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, calculem o determinante de uma matriz identidade qualquer (ordem n), a partir do raciocínio abaixo: (A e I são da mesma ordem e det $a \neq 0$.)

$A \cdot I = A \Rightarrow \det(AI) = \det A \Rightarrow \det A \cdot \det I = \det A \Rightarrow \det I = ?$

Para refletir
Qual é o determinante de qualquer matriz identidade?

11 Matriz inversa de uma matriz dada

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, se X é uma matriz tal que $AX = I_n$ e $XA = I_n$, então x é denominada **matriz inversa** de A e é indicada por A^{-1}. Lembre-se de que I é a matriz identidade.

Quando existe a matriz inversa de A, dizemos que A é uma matriz invertível ou não singular. Isso ocorrerá sempre que $\det A \neq 0$.

Exemplo:

A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ é invertível, pois $\det A \neq 0$, e sua matriz inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Note que: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}$ e $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}$.

Então, A é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ou seja, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Para refletir
Verifique as multiplicações efetuadas.

Observação: Todo número real a diferente de zero possui o inverso multiplicativo a^{-1}, pois $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Dada uma matriz quadrada $n \times n$, nem sempre existe uma matriz B, do tipo $n \times n$, tal que $AB = BA = I_n$. É necessário que $\det A \neq 0$ para que exista essa matriz B, inversa de A.

Exercícios

41. Calcule o determinante de cada matriz abaixo e determine se elas são invertíveis ou não.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

42. Sejam A e B matrizes de ordem 3. Se $B = A^{-1}$, determine o produto AB.

43. ATIVIDADE EM DUPLA Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$:

a) determinem B sabendo que $AB = I_2$;
b) determinem A^{-1}.

44. ATIVIDADE EM DUPLA Sejam $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, determinem:

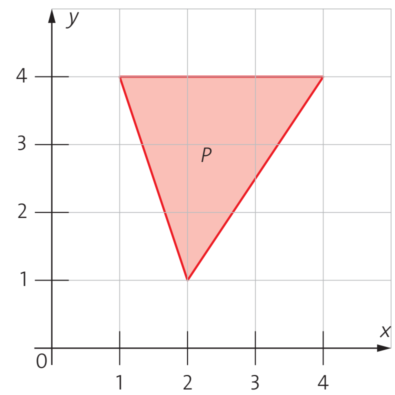
a) $\det A$
b) $\det A^{-1}$
c) $\det (AA^{-1})$

45. DESAFIO EM DUPLA Lembrando que se $AA^{-1} = I$ então $\det (AA^{-1}) = \det I$, calculem $\det A^{-1}$ sabendo que $\det A = 3$.

12 Aplicações de matrizes

Geometria e coordenadas

Observe a região triangular P no plano cartesiano a seguir.



Os vértices desse triângulo são descritos pelos pares ordenados: (1, 4); (4, 4) e (2, 1). Podemos escrever esses pares ordenados em colunas, formando uma matriz, veja:

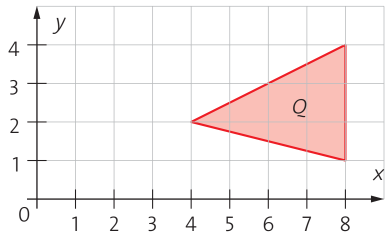
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercícios

46. Observe o triângulo Q no plano cartesiano ao lado e responda:

a) Escreva os pares ordenados que descrevem seus vértices.

b) Escreva esses pares ordenados formando uma matriz 2×3.



47. Escreva a matriz correspondente aos vértices de cada figura a seguir.

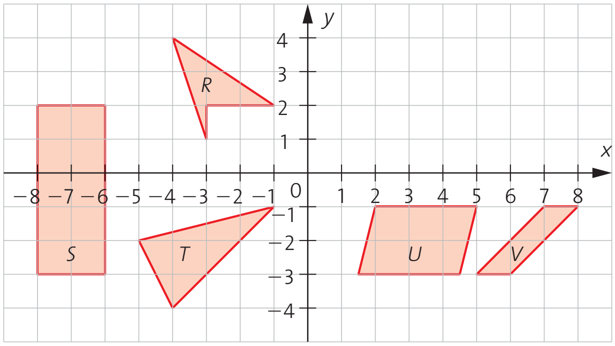
a) R

b) S

c) T

d) U

e) V



48. Coloque os pares ordenados de cada matriz a seguir no plano cartesiano. Ligue os pontos (em ordem) para formar uma figura.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Computação gráfica e transformações geométricas

Na abertura desta unidade vimos que as imagens em uma tela de computador ou televisão são na verdade formadas por pequenos pontos (*pixels*), elementos de uma matriz.

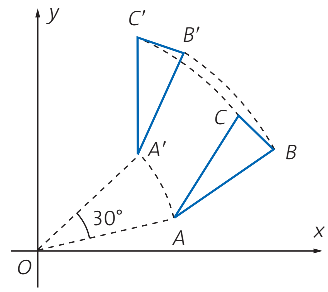
Por exemplo, uma imagem de resolução 800×600 tem $800 \cdot 600 = 480\,000$ *pixels* distribuídos em 800 colunas e 600 linhas.

Quando um programa gráfico altera a posição, reflete, rotaciona ou muda a escala da imagem, na verdade está mudando a posição dos *pixels* que a formam. Isso tudo é feito por operações de matrizes, em computação gráfica é o que se chama de **transformações geométricas**.

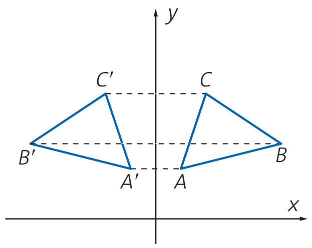
Basicamente, as transformações geométricas no plano são quatro: **rotação**, **reflexão**, **escala** e **translação**.

Observe nas figuras abaixo um $\triangle ABC$ sujeito a cada uma dessas transformações:

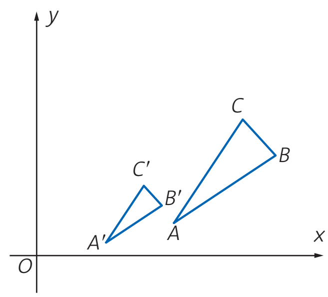
- Rotação do $\triangle ABC$, de 30° no sentido anti-horário, em torno da origem.



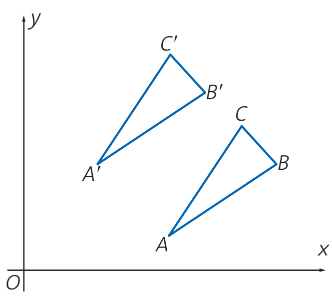
- Reflexão do $\triangle ABC$ em relação ao eixo *y*.



- Mudança de escala do $\triangle ABC$ em 50%.

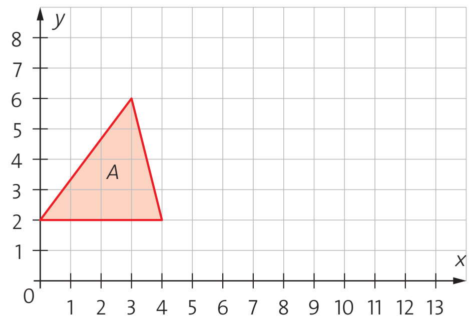


- Translação do $\triangle ABC$ com 2 unidades para a esquerda e 2 unidades para cima.

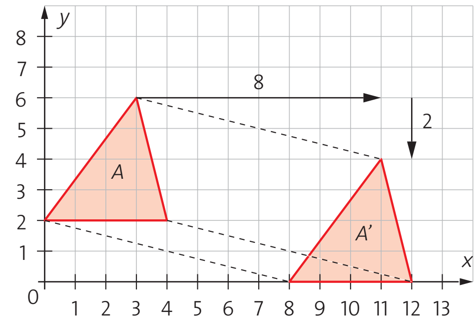


Translação

Observe as figuras abaixo.



Vértices da região triangular A: (0, 2); (3, 6) e (4, 2).



Vértices da região triangular A': (8, 0); (11, 4) e (12, 0).

As matrizes relacionadas às figuras acima são:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } A' = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A região triangular A sofreu uma translação dando origem à região triangular A'. Podemos descrever essa translação usando uma matriz coluna:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{movemos 8 unidades à direita ao longo do eixo } x\text{, e depois} \\ \rightarrow \text{movemos 2 unidades para baixo ao longo do eixo } y. \end{matrix}$$

Observe que:

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

De modo geral, para transladar um ponto $P(x, y)$ de a unidades para a direita e b unidades para cima, efetuamos a adição de matrizes:

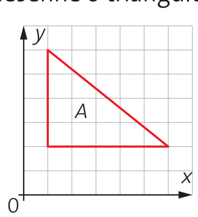
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$$

Exercícios

49. Escreva o que significa cada uma das translações dada pelas matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

50. Copie o diagrama abaixo em uma malha quadriculada. Translade o triângulo A de acordo com cada matriz coluna dada e desenhe o triângulo transladado.



a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo B.

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo C.

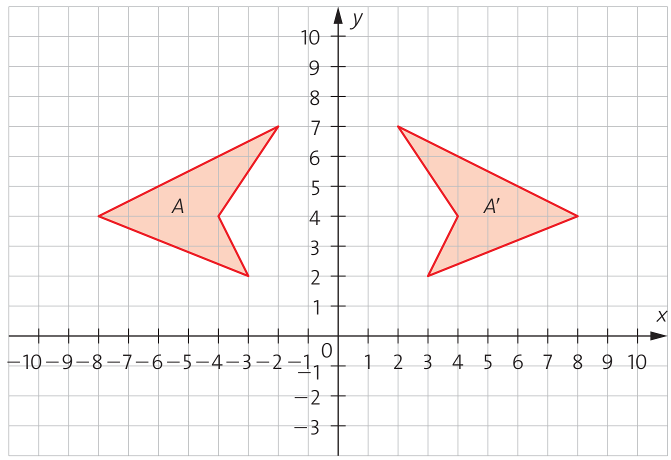
c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo D.

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo E.

e) Em cada caso, escreva a adição de matrizes correspondentes.

Reflexão

Observe o diagrama abaixo. A figura A sofreu uma reflexão em relação ao eixo y dando origem à figura A'.



Vértices da figura A: $(-3, 2), (-4, 4), (-2, 7), (-8, 4)$ Vértices da figura A': $(3, 2), (4, 4), (2, 7), (8, 4)$

Veja a matriz associada à cada figura:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

A reflexão que leva A em A' é indicada por:

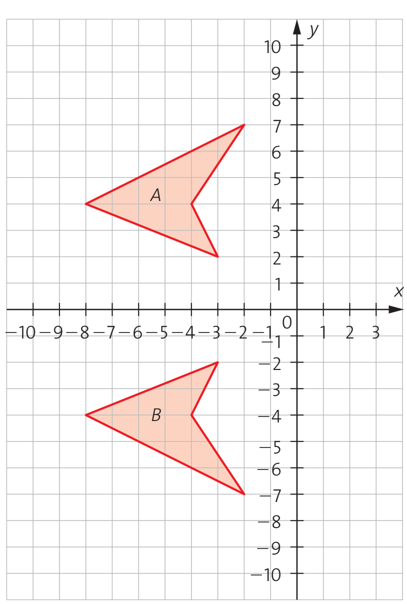
$$A \rightarrow A', \text{ ou seja, } \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Observe que neste caso a reflexão é em relação ao eixo y.

Podemos obter a matriz de A' multiplicando a matriz de A pela matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Agora, considere uma reflexão da figura A em relação ao eixo x, dando origem à figura B. Veja:



Vértices da figura A: $(-3, 2), (-4, 4), (-2, 7), (-8, 4)$

Matriz associada: $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Vértices da figura B: $(-3, -2), (-4, -4), (-2, -7), (-8, -4)$

Matriz associada: $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ -2 & -4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

Veja a matriz associada a essas figuras:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ -2 & -4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

A reflexão que leva *A* em *B* é indicada por:

$$A \rightarrow B, \text{ ou seja, } A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ -2 & -4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

Observe que neste caso a reflexão é em relação ao eixo *x*, podemos obter a matriz de *B* multiplicando a matriz de *A* pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ -2 & -4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

De modo geral, para se obter a reflexão em relação ao eixo *y* de uma figura cuja matriz associada é dada, por exemplo, por $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$, basta efetuar a multiplicação:

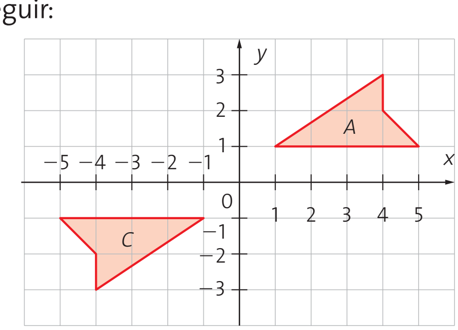
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$$

E, para se obter a reflexão em relação ao eixo *x* de uma figura cuja matriz associada é dada por $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$, basta efetuar a multiplicação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$$

Rotação

Observe a representação a seguir:



A figura *A* sofreu uma rotação de 180º no sentido anti-horário em torno da origem (0, 0), dando origem à figura *C*.

As matrizes associadas a cada uma dessas figuras são:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Indicamos a rotação que leva *A* em *C* por:

$$A \rightarrow C, \text{ ou seja, } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, obtemos a matriz associada à figura C, multiplicando a matriz associada à figura A pela matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que é correspondente a $\begin{pmatrix} \cos 180° & -\text{sen}\,180° \\ \text{sen}\,180° & \cos 180° \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

De modo geral, para se obter uma rotação de α graus no sentido anti-horário em torno da origem (0, 0), de uma figura cuja matriz associada é dada, por exemplo, por $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$, basta efetuar a multiplicação:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$$

Exercícios

51. Faça o que se pede para cada matriz a seguir:

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $Z = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Marque os pares ordenados em um plano cartesiano e ligue os pontos, em ordem, para formar uma figura.

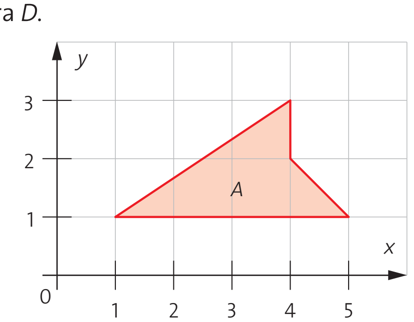
b) Efetue uma reflexão das figura em relação ao eixo x e escreva a matriz de cada figura refletida.

c) Constate que a matriz da figura refletida pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura pela matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

52. Repita o exercício anterior, usando uma reflexão em relação ao eixo y.

53. Considere a figura A e uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem (0, 0), originando uma figura D.



a) Obtenha a matriz associada à figura D.

b) Desenhe em um mesmo plano cartesiano as figuras A e D.

c) Verifique que a matriz associada pode ser obtida pelo produto $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen}\,90° \\ \text{sen}\,90° & \cos 90° \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

54. Faça o que se pede para cada matriz a seguir.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Coloque os pares ordenados de cada matriz no plano cartesiano e ligue os pontos em ordem para formar uma figura.

b) Na matriz A aplique uma rotação de 90°, em B uma rotação de 180° e em C uma rotação de 270°, no sentido anti-horário, em torno da origem (0, 0).

c) Em todos os casos escreva a matriz associada à figura final e desenhe-as em um mesmo plano cartesiano.

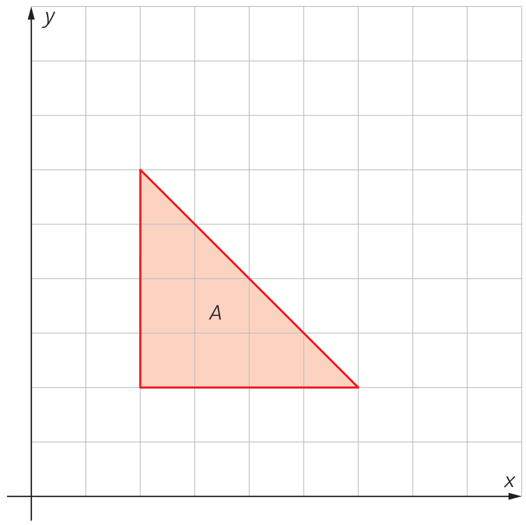
d) Verifique que a matriz associada pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura inicial por $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Escala

Nem todas as transformações geométricas preservam distâncias e forma como as estudadas até aqui, acompanhe o caso a seguir.

Consideremos uma mudança de escala de um ponto $P(x, y)$ em relação à origem, usando um fator multiplicativo S_x para a coordenada x e um fator multiplicativo S_y para a coordenada y. Assim, sendo a matriz $E = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}$ e a matriz $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, devemos ter $P' = E \times P$.

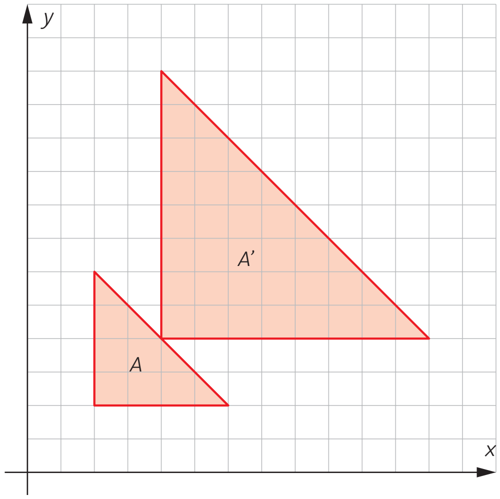
Por exemplo, observe a região triangular A a seguir:



Podemos aplicar a transformação escala a todos os pontos $P(x, y)$ dessa figura em 100%. Aumentar em 100% nas direções dos eixos O_x e O_y, é multiplicar por 2. Assim, $S_x = 2$ e $S_y = 2$. Logo,

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Verificando geometricamente, temos:

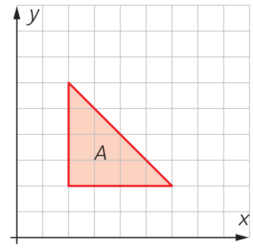


Matrizes associadas às figuras A e A':

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } A' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

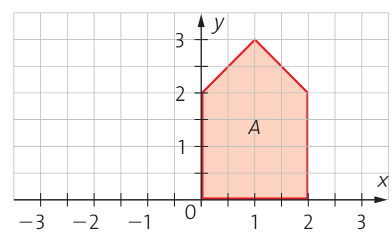
Exercícios

55. Considere o triângulo A a seguir. Aplique nele uma transformação escala segundo os fatores 3 e 1 nas direções dos eixos O_x e O_y, respectivamente. Faça a verificação geométrica.



56. ATIVIDADE EM DUPLA Transformem a figura a seguir usando a matriz de transformação escala:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



a) Qual é a área da figura A?

b) Qual é a área de cada figura transformada?

c) Qual é a relação entre a área da figura inicial A e a área de cada figura transformada? O que ocorreu com a figura A após sofrer cada transformação?

57. ATIVIDADE EM DUPLA Explorem, investiguem e respondam.

a) O que ocorre com uma figura quando aplicamos uma transformação escala do tipo $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para um número real k qualquer?

b) Qual é a relação entre a área da figura inicial e a área da figura transformada pela transformação escala do tipo $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para um real k qualquer?

Criptografia

Como dito anteriormente, podemos criptografar mensagens com o auxílio de matrizes. Uma técnica bastante simples utiliza como chave codificadora/decodificadora um par de matrizes quadradas (A e B) de elementos inteiros e inversas uma da outra e faz correspondência entre letras do alfabeto, símbolos e números.

Por exemplo, dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e a tabela:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	#
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Suponhamos que a mensagem a ser transmitida seja:

CRIPTOGRAFIA E MATRIZES.

De acordo com a tabela numérica temos os números: 3, 18, 9, 16, 20, 15, 7, 18, 1, 6, 9, 1, 28, 5, 28, 13, 1, 20, 18, 9, 26, 5, 19 e 27.

Devemos arrumar a sequência de números acima em uma matriz M de duas linhas.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 18 & 9 & 16 & 20 & 15 & 7 & 18 & 1 & 6 & 9 & 1 \\ 28 & 5 & 28 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 & 27 \end{bmatrix}$$

O remetente utiliza a matriz A para codificar a mensagem, fazendo: $N = AM$ e, desse modo, obtém a matriz N.

$$AM = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 18 & 9 & 16 & 20 & 15 & 7 & 18 & 1 & 6 & 9 & 1 \\ 28 & 5 & 28 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 & 27 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 37 & 59 & 55 & 61 & 61 & 65 & 39 & 63 & 29 & 23 & 46 & 30 \\ 90 & 51 & 102 & 71 & 43 & 90 & 68 & 63 & 80 & 27 & 75 & 83 \end{bmatrix} = N$$

Os elementos de N constituem a mensagem codificada: 37, 59, 55, 61, 61, 65, 39, 63, 29, 23, 46, 30, 90, 51, 102, 71, 43, 90, 68, 63, 80, 27, 75 e 83.

Quando esta mensagem codificada chega ao destinatário, ele utiliza a matriz decodificadora B para desfazer os procedimentos anteriores, sendo que já deve ter se estabelecido que:

$$BN = BAM = IM = M$$

Com os números da mensagem codificada recebida, o destinatário constrói uma matriz com duas linhas (N) e efetua o produto BN. Veja:

$$BN = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 37 & 59 & 55 & 61 & 61 & 65 & 39 & 63 & 29 & 23 & 46 & 30 \\ 90 & 51 & 102 & 71 & 43 & 90 & 68 & 63 & 80 & 27 & 75 & 83 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 18 & 9 & 16 & 20 & 15 & 7 & 18 & 1 & 6 & 9 & 1 \\ 28 & 5 & 28 & 13 & 1 & 20 & 18 & 9 & 26 & 5 & 19 & 27 \end{bmatrix} = M$$

Os elementos da matriz M obtida formam a sequência de números: 3, 18, 9, 16, 20, 15, 7, 18, 1, 6, 9, 1, 28, 5, 28, 13, 1, 20, 18, 9, 26, 5, 19 e, 27 cuja decodificação é:

3	18	9	16	20	15	7	18	1	6	9	1	28	5
C	R	I	P	T	O	G	R	A	F	I	A	#	E

28	13	1	20	18	9	26	5	19	27
#	M	A	T	R	I	Z	E	S	.

Exercício

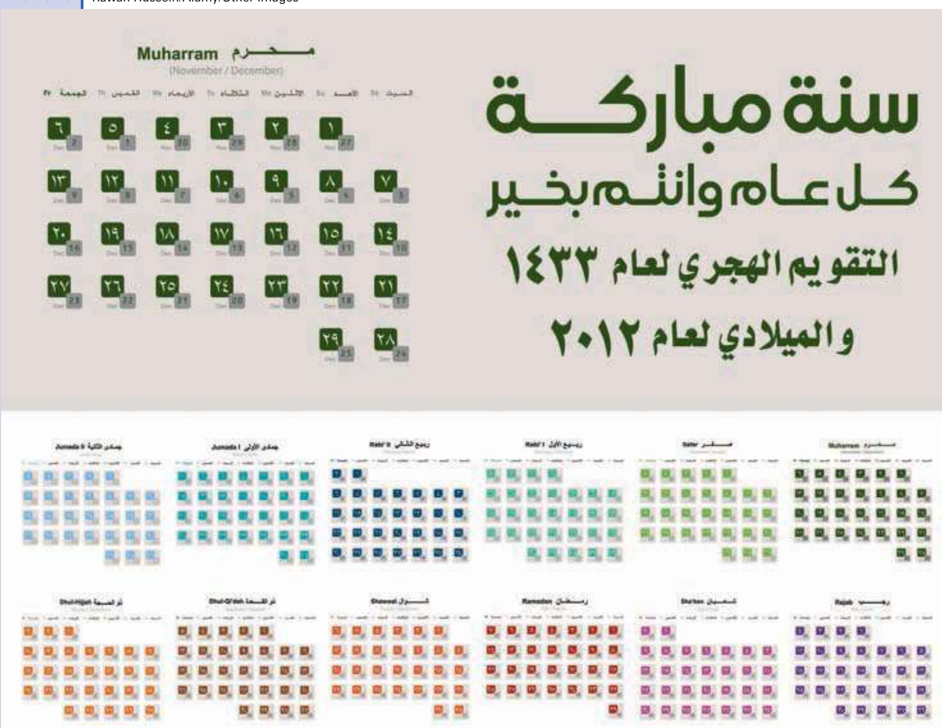
58. ATIVIDADE EM EQUIPE Codifiquem uma mensagem utilizando os códigos dados acima, depois entreguem para outro grupo decodificar.

Outros contextos

Calendário

Bases de um calendário

Rawan Hussein/Alamy/Other Images



O calendário islâmico, ou calendário hegírico, é um calendário baseado no ciclo lunar.

Um calendário é um sistema de organização das unidades de tempo, com o objetivo de contá-las por períodos longos, de modo a satisfazer as necessidades e preocupações de uma sociedade.

Os calendários sempre exerceram um papel importante para o planejamento de atividades agrícolas, de ciclos de migração e de eventos religiosos e civis.

Existem cerca de 40 calendários atualmente em uso em todo o mundo.

Para calendários com base astronômica, a unidade fundamental pode ser o dia (baseado na rotação da Terra em torno de seu eixo), o ano (baseado na revolução da Terra em torno do Sol) ou o mês (baseado na revolução da Lua em torno da Terra). A complexidade desses calendários é consequência do fato de que esses ciclos não são constantes nem comensuráveis uns em relação aos outros.

Os calendários também incorporam elementos não astronômicos, como ciclos numéricos, usos locais ou determinações de autoridades locais. No calendário gregoriano, a semana é um exemplo.

Adaptado de: TARSIA, Rodrigo Dias. O calendário gregoriano. *Revista Brasileira de Física*, vol. 17, n. 1, 1995. Disponível em: <www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/vol17a06.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2012.

Nosso calendário

O calendário gregoriano é utilizado na maior parte do mundo e em todos os países ocidentais. Foi promulgado pelo papa Gregório XIII em 24 de fevereiro de 1582 para substituir o calendário juliano.

Gregório XIII reuniu um grupo de especialistas para reformar o calendário juliano e, passados cinco anos de estudos, foi elaborado o calendário gregoriano, que foi sendo implementado lentamente em vários países. Oficialmente, o primeiro dia desse calendário foi 15 de outubro de 1582.

A reforma gregoriana tinha por finalidade fazer regressar o equinócio da primavera a 21 de março e desfazer o erro de 10 dias já existente. Para isso, a bula papal mandava que o dia imediato à quinta-feira, 4 de outubro, fosse designado por sexta-feira, 15 de outubro. Como se vê, embora houvesse um salto nos dias, manteve-se intacto o ciclo semanal.

Para evitar, no futuro, a repetição da diferença, foi estabelecido que os anos seculares só seriam bissextos se fossem divisíveis por 400. Seriam suprimidos, assim, 3 dias em cada 400 anos, razão pela qual o ano 1600 foi bissexto, mas não o foram os anos 1700, 1800 e 1900, que teriam sido segundo a regra juliana, por serem divisíveis por 4.

Album/akg-Images/Latinstock

Papa Gregório XIII (1572-1585)

A duração do ano gregoriano é, em média, de 365 d 05 h 49 min 12 s, isto é, tem atualmente mais 27 s do que o ano trópico. A acumulação dessa diferença ao longo do tempo representará um dia em cada 3 mil anos. É evidente que não valia a pena, aos astrônomos de Gregório XIII, atender a tão pequena e longínqua diferença, nem na atualidade ela tem ainda importância. Talvez lá pelo ano 5000 da nossa era, se ainda continuarmos com o mesmo calendário, seja necessário levar isso em consideração.

Adaptado de: Calendário gregoriano, Museu de Topografia Prof. Laureano Ibrahim Chaffe, Departamento de Geodésia – UFRGS. Texto original de autoria de: Manuel Nunes Marques, diretor do Observatório Astronômico de Lisboa.

Trabalhando com o texto

1. Qual é a relação entre o texto e o assunto estudado neste capítulo?

2. Há palavras no texto que você desconhece? Pesquise o significado delas.

3. Em nosso calendário os anos têm 365 dias, com exceção dos anos bissextos, que têm 366 dias. Um ano é bissexto quando é múltiplo de 4, mas não é múltiplo de 100, a menos que também seja múltiplo de 400. Quantos anos bissextos haverá no século XXI?

4. *História*
(Enem-adaptado) Existem muitas diferenças entre as culturas cristã e islâmica. Uma das principais diz respeito ao calendário. Enquanto o calendário cristão (gregoriano) considera um ano como o período correspondente ao movimento de translação da Terra em torno do Sol, aproximadamente 365 dias, o calendário muçulmano se baseia nos movimentos de translação da Lua em torno da Terra, aproximadamente 12 por ano, o que corresponde a anos intercalados de 354 e 355 dias. Considere que o calendário muçulmano teve início em 622 da era cristã e que cada 33 anos do calendário muçulmano correspondem a 32 anos do calendário cristão. O ano de 2013 no calendário muçulmano corresponderá a que ano no calendário cristão?

a) 2013 b) 2236 c) 2574 d) 2815 e) 3027

Pesquisando e discutindo

5. Pesquise características do calendário maia.

6. A data da Páscoa oscila entre 22 de março e 25 de abril. A Semana Santa tem uma grande influência para os cristãos, para o turismo e para a economia. Pesquise por que essa data é variável.

7. Pesquise quais outros calendários são utilizados atualmente no mundo.

Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações em jornais, revistas e nos *sites*:

- História dos calendários (clicar em “Visitas e curiosidades”): <www.ufrgs.br/museudetopografia/p_inicio.htm>.
- Calendários romanos: <www.infoescola.com/historia/calendarios-romanos/>.
- <http://educacao.uol.com.br/matematica/ult1705u36.jhtm>. Acessos em: 29 out. 2012.

CAPÍTULO

6 Sistemas lineares

Documentos históricos comprovam que antigas civilizações orientais, como a babilônica e a chinesa, já trabalhavam com equações lineares. Já o interesse dos matemáticos ocidentais pelo tema aprofundou-se apenas no século XVII, a partir de um artigo do alemão Gottfried W. Leibniz (1646-1716), que estabeleceu condições para associar o sistema de equações lineares a um determinante. Em 1858, o matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) notabilizou-se ao tratar de sistemas lineares representando, em forma de matrizes, os dados extraídos de sistemas de equações.

Do grego *systema* (*sy* significa ‘junto’ e *sta*, ‘permanecer’), sistema, em Matemática, é o conjunto de equações que devem ser resolvidas ao mesmo tempo, ou seja, os resultados devem satisfazê-las simultaneamente. O **sistema linear** é formado por equações cujas incógnitas são elevadas ao expoente 1.

A aplicação de sistemas lineares é fundamental na resolução de problemas que envolvem equações com muitas incógnitas. Problemas desse tipo se apresentam, por exemplo, na distribuição de energia elétrica, no gerenciamento das linhas de telecomunicações e na logística para transporte de mercadorias em uma região.

Nicku/Shutterstock/Glow Images

Gottfried W. Leibniz

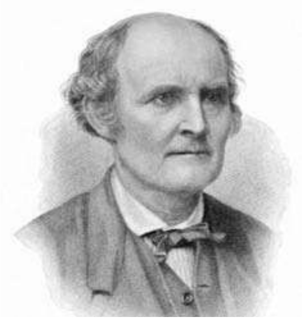


Photo Researchers/Latinstock

Arthur Cayley

Nair Bueno/Diário do Litoral/Futura Press

Os sistemas de equações lineares auxiliam a distribuir, do melhor modo possível, os contêineres nos navios. Esta fotografia mostra um navio porta-contêiner no Porto de Santos, em Santos, SP. Esse é o principal porto brasileiro, onde se verifica o maior movimento de contêineres da América Latina e do Caribe.

1 Sistemas lineares 2 × 2

Os sistemas lineares 2 × 2 são estudados desde os anos finais do Ensino Fundamental, provenientes de situações-problema, sejam matemáticas ou não. Neste capítulo avançaremos na teoria dos sistemas lineares e aprenderemos a resolver sistemas 3 × 3 ou maiores.

Antes disso, vamos retomar a resolução de sistemas lineares 2 × 2.

» Forme dupla com um colega e resolvam os sistemas a seguir pelo método que preferirem: adição, substituição, comparação ou fazendo a interpretação geométrica obtendo retas concorrentes, paralelas ou coincidentes. Você pode usar um método e seu colega usar outro, se preferirem.

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 10x + 10y = 30 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$

2 Equações lineares

Cada linha dos sistemas que resolvemos acima é uma equação linear. Veja outros exemplos:

a) $x + y = 10$ é uma **equação linear** nas incógnitas x e y;

b) $2x + 3y - 2z = 10$ é uma **equação linear** nas incógnitas x, y e z;

c) $x - 5y + z - 4t = 0$ é uma **equação linear** nas incógnitas x, y, z e t;

d) $4x - 3y = x + y + 1$ é uma **equação linear** nas incógnitas x e y.

De modo geral, denomina-se **equação linear** toda equação que pode ser escrita na forma geral:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

na qual:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são incógnitas;
- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados **coeficiente das incógnitas**;
- $\boldsymbol{b}$ é o termo independente.

Observação: As incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ geralmente aparecem como $x, y, z, \ldots$

Pela definição, **não** são equações lineares:

- $xy = 10$
- $x^2 + y = 6$
- $x^2 - xy - yz + z^2 = 1$

Para refletir
Por que as equações ao lado não são lineares?

Observe, agora, as seguintes equações lineares:

a) $3x + 2y = 18$
Dizemos que:
- o par ordenado (4, 3) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$;
- o par ordenado (6, 0) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18$;
- o par ordenado (5, 1) não é solução da equação, pois $3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \neq 18$.

Fique atento!
O par ordenado $\left(\alpha, \frac{18-3\alpha}{2}\right)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, é a solução geral da equação do item **a**.

b) $3x + y - 2z = 8$
Dizemos que:
- o terno ordenado (2, 4, 1) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 2 + 4 - 2 \cdot 1 = 8$;
- o terno ordenado (0, 6, −1) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 0 + 6 - 2 \cdot (-1) = 8$;
- o terno ordenado (5, −2, 3) não é solução da equação, pois $3 \cdot 5 + (-2) - 2 \cdot 3 \neq 8$.

Fique atento!
Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, o terno ordenado $\left(\alpha, \beta, \frac{-8+3\alpha+\beta}{2}\right)$ é a solução geral da equação do item **b**.

Generalizando, dada a equação linear:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

dizemos que a ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é solução da equação **se, e somente se**:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$$

Se, e somente se: expressão de uma relação de equivalência.

Observação:
Geometricamente:
a) cada par ordenado (x, y) de números reais representa um ponto no plano;
b) cada terno ordenado (x, y, z) de números reais representa um ponto no espaço.

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Resolva cada sistema linear abaixo pelo método que preferir:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+4y=14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 20x+10y=10 \\ x+y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x-y=-6 \\ 2x-3y=-3 \end{cases}$

2. Identifique com a letra **A** as equações lineares e com a letra **B** as equações que não são lineares:
a) $5x - 2y = 6$
b) $x + 4y - z = 0$
c) $x + y - z - t = 0$
d) $x^2 + y = 10$
e) $3xy = 10$
f) $x + y = z - 2$
g) $2x - y + xy = 8$
i) $2x + y + 5z = 15$
i) $2x + y + 5z = 15$
j) $3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$

3. Verifique se o par ordenado:
a) (6, 2) é uma solução da equação linear $4x - 3y = 18$.
b) (3, −5) é uma solução da equação linear $2x + 3y = 21$.

4. Verifique se o terno ordenado:
a) (1, 3, 2) é uma solução da equação linear $2x + y + 5z = 15$.
b) (0, 0, 0) é uma solução da equação linear $2x + 7y - 3z = 0$.

5. Calcule o valor de k para que o par ordenado $(3, k)$ seja uma solução da equação linear $3x - 2y = 5$.

6. O terno ordenado $(k, 2, k + 1)$ é uma das soluções da equação linear $4x + 5y - 3z = 10$. Determine k.

3 Sistemas de equações lineares

Denomina-se **sistema linear** $m \times n$ o conjunto de m equações lineares em n incógnitas, que pode ser representado assim:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Fique atento!
$m \times n$ se lê: m por n.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ é um sistema linear 2×2 (2 equações e 2 incógnitas) nas incógnitas x e y.

b) $\begin{cases} x - y = 3 - 2x \\ 2x + y = 12 + y \end{cases}$ é um sistema linear 2×2 nas incógnitas x e y, pois equivale a $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + 0y = 12 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - y + z = 8 \end{cases}$ é um sistema linear 3×3 (3 equações e 3 incógnitas) nas incógnitas x, y e z.

d) $\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases}$ é um sistema linear 2×3 (2 equações e 3 incógnitas) nas incógnitas x, y e z.

Solução de um sistema linear

Dizemos que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

Veja:

a) (5, 1) é solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13 \\ 3 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 10 \end{cases}$

b) (2, 3) não é solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \neq 10 \end{cases}$

c) (1, 3, −2) é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

Para refletir
Faça a verificação do exemplo **c**.

Fique atento!
Geometricamente:
a) cada equação do primeiro sistema representa os pontos de uma reta no plano;
b) cada equação do terceiro sistema representa os pontos de um plano no espaço.

Exercício

7. Verifique se:
   a) (3, −1) é uma solução do sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$
   b) (0, 0, 0) é uma solução do sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \\ 4x + 7y - 3z = 0 \end{cases}$
   c) (0, −1) é uma solução do sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

Classificação dos sistemas lineares

Observe, com bastante atenção, os três exemplos abaixo, todos eles sistemas 2×2 resolvidos pelo método da adição.

Fique atento!
Optamos pelos sistemas 2×2 porque já estudamos esse tipo de sistema desde o Ensino Fundamental. Entretanto, os resultados e as definições podem ser generalizados para quaisquer sistemas.

a) $\begin{cases} 3x - y = 10 \cdot (5) \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - \cancel{5y} = 50 \\ 2x + \cancel{5y} = 1 \end{cases}$

$$17x = 51 \Rightarrow x = \frac{51}{17} = 3 \text{ (valor único de } x\text{)}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \cdot (-2) \\ 2x + 5y = 1 \cdot (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{6x} + 2y = -20 \\ \cancel{6x} + 15y = 3 \end{cases}$$

$$17y = -17 \Rightarrow y = \frac{-17}{17} = -1 \text{ (valor único de } y\text{)}$$

Para refletir
Verifique se o par ordenado $(3, -1)$ é realmente solução do sistema dado.

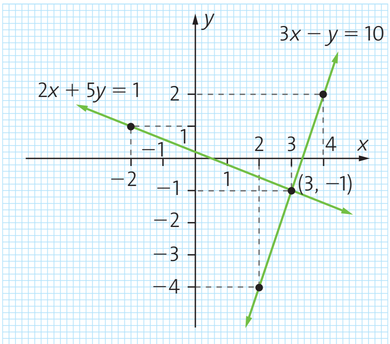
Então, $(3, -1)$ é o único par ordenado de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que é solução do sistema.

Dizemos então que o sistema tem como solução $S = \{(3, -1)\}$ e que ele é um **sistema possível e determinado** (tem uma única solução).

Interpretação geométrica: Para fazer a representação gráfica desse sistema, devemos perceber que cada equação linear dele pode ser reescrita como uma função afim, cujo gráfico é uma reta.

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \rightarrow y = 3x - 10 \\ 2x + 5y = 1 \rightarrow y = \dfrac{-2x + 1}{5} \end{cases}$$

Traçando o gráfico dessas duas retas no mesmo plano cartesiano, temos:



Fique atento!
Os pares ordenados de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam no gráfico uma reta. A intersecção das duas retas das equações do sistema determina sua solução, se existir.

As retas concorrentes indicam que existe um único par ordenado que é solução do sistema (sistema possível e determinado).

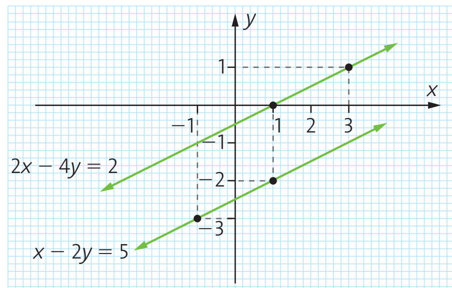
b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \;\; \cdot (-2) \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x} + 4y = -10 \\ \cancel{2x} - 4y = 2 \end{cases}$

$$0y = -8$$

Se em $0y = -8$ não existe valor real para y, então não existe par ordenado de números reais que seja solução do sistema.

Dizemos que o sistema tem como solução $S = \varnothing$ e que ele é um **sistema impossível** (não tem nenhuma solução).

Interpretação geométrica: Veja a representação gráfica desse sistema: $\begin{cases} x-2y=5 \rightarrow y=\dfrac{x-5}{2} \\ 2x-4y=2 \rightarrow y=\dfrac{x-1}{2} \end{cases}$



Fique atento!

$\begin{cases} x-2y=5 \rightarrow (1,-2), (-1,-2), \ldots \\ 2x-4y=2 \rightarrow (1,0), (3,1), \ldots \end{cases}$

As retas paralelas e distintas indicam que não existe par ordenado que seja solução do sistema (sistema impossível).

c) $\begin{cases} 2x-6y=8 \cdot (3) \\ 3x-9y=12 \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{6x}-18y=24 \\ -\cancel{6x}+18y=-24 \end{cases}$

$$0y=0$$

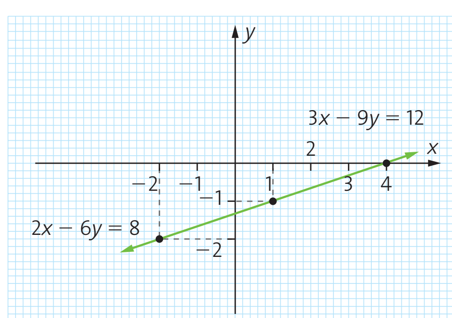
Se $0y = 0$, a incógnita y pode assumir qualquer valor real. Fazendo $y = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, e substituindo em uma das equações do sistema, temos:

$$2x - 6y = 8 \Rightarrow 2x - 6\alpha = 8 \Rightarrow 2x = 8 + 6\alpha \Rightarrow x = \frac{8+6\alpha}{2} = 4 + 3\alpha$$

O par ordenado $(4 + 3\alpha, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, é a solução geral do sistema. Para cada valor de α, temos uma solução para o sistema, por exemplo: (7, 1), (4, 0), (1, −1), conforme α seja respectivamente 1, 0 ou −1.

Dizemos que o sistema tem solução $S = \{4 + 3\alpha, \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ e que ele é um **sistema possível e indeterminado** (tem infinitas soluções).

Interpretação geométrica: Observe a representação gráfica desse sistema: $\begin{cases} 2x-6y=8 \rightarrow y=\dfrac{x-4}{3} \\ 3x-9y=12 \rightarrow y=\dfrac{x-4}{3} \end{cases}$

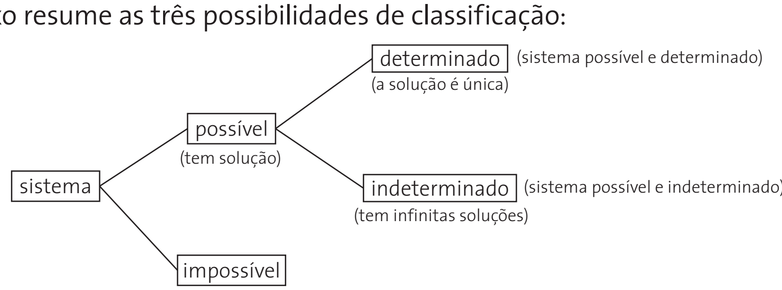


Fique atento!

$\begin{cases} 2x-6y=8 \rightarrow (4,0), (1,-1), \ldots \\ 3x-9y=12 \rightarrow (1,-1), (4,0), \ldots \end{cases}$

As retas coincidentes indicam que existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema (sistema possível e indeterminado).

O esquema abaixo resume as três possibilidades de classificação:



Matrizes, sistemas lineares e determinantes

Qualquer sistema linear $n \times n$ pode ser escrito como um produto de matrizes.

Exemplos:

a) o sistema $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$ pode ser escrito como $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

b) o sistema $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{cases}$ pode ser escrito como $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$

No capítulo anterior, ao justificarmos o cálculo do determinante das matrizes 2×2 e 3×3, mostramos que um determinante não nulo indica um sistema determinado. Agora, sabemos com mais precisão o que é um sistema possível e determinado e o que são sistemas não determinados. Assim, se D for o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema, então o sistema será determinado se $D \neq 0$. E se $D = 0$ o sistema será indeterminado ou impossível. Isso significa que usar o determinante para classificar o sistema **não é** um modo eficaz.

Entretanto, conhecendo-se o tipo de sistema, é plenamente possível prever o resultado do determinante D da matriz dos coeficientes do sistema:

- sistemas possíveis e determinados sempre têm determinante não nulo ($D \neq 0$);
- sistemas possíveis e indeterminados ou impossíveis sempre têm determinante nulo ($D = 0$).

Exercício resolvido

1. Determine o valor de k para que o sistema $\begin{cases} kx - y = 2 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$ seja impossível.

Resolução:

Se o sistema é impossível, então $D = 0$.

Assim:

$\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5k + 1 = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{1}{5}$

Exercícios

8. DESAFIO Resolvam cada sistema abaixo pelo método que preferirem e depois classifiquem-nos:

a) $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + 4 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

9. DESAFIO EM DUPLA Façam a representação gráfica de cada sistema do exercício anterior e verifiquem se estão de acordo com a classificação feita.

10. Escreva os sistemas abaixo na forma de um produto matricial e verifique se eles são determinados ou não.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = -4 \end{cases}$

11. ATIVIDADE EM DUPLA Determinem m para que o sistema linear $\begin{cases} 2x + my = 3 \\ mx + 8y = 6 \end{cases}$ tenha uma única solução.

Escalonamento de sistemas lineares

Acompanhe um método para classificar, resolver e discutir sistemas lineares de quaisquer ordens, chamado **método de escalonamento**.

» Junte-se com um colega e tentem resolver o sistema 4×4 abaixo. Prestem atenção nos detalhes!

$$\begin{cases} x + y + z + t = 8 \\ 2y + z + t = 2 \\ 2z + t = 5 \\ 2t = 6 \end{cases}$$

Esse sistema está escalonado, e, por isso, é simples resolvê-lo. Vamos, então, estudar o método de escalonamento.

Inicialmente é necessário saber o que é um sistema linear escalonado.

Considerando um sistema genérico $m \times n$, dizemos que ele está escalonado quando a matriz dos coeficientes tiver, em cada uma de suas linhas, o primeiro elemento não nulo situado à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte. Além disso, linhas com todos os elementos nulos devem estar abaixo de todas as outras. Observando as equações do sistema escalonado, percebe-se que, em cada linha considerada, a primeira incógnita com coeficiente não nulo está sempre à esquerda da primeira incógnita com coeficiente não nulo da linha seguinte.

São exemplos de sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} x - 2y + 5z = 7 \\ 3y + 2z = 1 \\ 4z = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 11 \\ 4x_2 + 5x_3 = -4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 11 \\ 4x_2 + 5x_3 = -4 \\ 0x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2x + z + t = 9 \\ 4z + 5t = -0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 2y + z + t = 9 \\ 0y + 4z + 5t = 10 \\ 0z + 0t = 0 \\ 0t = 0 \end{cases}$

Classificação e resolução de sistemas lineares escalonados

Para classificar um sistema escalonado, basta observar a última linha. Mas é preciso estar atento, pois a última linha em um sistema de n incógnitas é a enésima linha, que, se não existir, deve ser considerada totalmente nula ($0x + 0y + 0z + ... = 0$, que equivale a $0 = 0$), como mostram os exemplos **b** e **c** acima.

Generalizando a última linha de um sistema escalonado:

$$a_n \cdot x_n = k_n$$

em que a_n é o coeficiente, x_n é a incógnita e k_n é o termo independente, podemos ter três situações:

- se $a_n \neq 0$, então a solução é única: sistema possível e determinado;
- se $a_n = 0$ e $k_n = 0$, então temos infinitas soluções: sistema possível e indeterminado;
- se $a_n = 0$ e $k_n \neq 0$, então não temos soluções: sistema impossível.

Se o sistema é possível, basta resolvê-lo de baixo para cima, como veremos nos exemplos a seguir.

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -6 \\ 4y - 2z = 0 \\ 5z = 10 \end{cases}$

Sistema 3×3 já escalonado (número de equações = número de incógnitas).
Da 3ª equação tiramos $z = 2$.
Da 2ª equação, fazendo $z = 2$, temos $4y - 2 \cdot 2 = 0$ e daí $y = 1$.
Fazendo $y = 1$ e $z = 2$ na 1ª equação, temos $3x - 2(1) + 2 = -6$ e daí $x = -2$.
Podemos concluir que o sistema é possível e determinado, com $S = \{(-2, 1, 2)\}$.

b) $\begin{cases} 9x - 2y + 3z - w = 1 \\ y - 2z + 4w = 6 \\ 5z + 2w = 3 \\ 0w = 9 \end{cases}$

Sistema 4×4 já escalonado.
A 4ª equação permite dizer que o sistema é impossível, logo $S = \varnothing$.

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y - 6z = 0 \end{cases}$

Sistema 2×3 já escalonado (número de equações < número de incógnitas).
Quando um sistema escalonado tem mais incógnitas do que equações e pelo menos um coeficiente não nulo em cada equação, ele é possível e indeterminado, pois as equações que faltam podem ser consideradas $0 = 0$.
A incógnita que não aparece no começo das equações é chamada **incógnita livre**.
Nesse exemplo, z é a incógnita livre. Fazendo $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, para descobrir a solução geral do sistema.
Da 2ª equação, temos:
$3y - 6k = 0 \Rightarrow y = 2k$
Usando $z = k$ e $y = 2k$, temos:
$x + 2k + k = 0 \Rightarrow x = -3k$
Portanto, o sistema é possível e indeterminado e sua solução geral é $(-3k, 2k, k)$.

Fique atento!
No exemplo **c** dizemos que o grau de indeterminação é 1 $(3 - 2)$ e que temos uma incógnita livre.
- para $k = 0$, a solução é $(0, 0, 0)$;
- para $k \neq 0$, as soluções podem ser $(-3, 2, 1)$, $(-15, 10, 5)$ e outras.

d) $\begin{cases} 2x - y + z - t = 2 \\ 2z + 3t = 1 \end{cases}$

Aqui o sistema é possível e indeterminado (está escalonado e tem duas equações e quatro incógnitas) e são duas as incógnitas livres (y e t).
Fazemos $y = \alpha$ e $t = \beta$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.
Substituindo nas equações:

$$2z + 3\beta = 1 \Rightarrow 2z = 1 - 3\beta \Rightarrow z = \frac{1 - 3\beta}{2}$$

$$2x - \alpha + \frac{1 - 3\beta}{2} - \beta = 2 \Rightarrow 4x = 2\alpha - 1 + 3\beta + 2\beta + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = 2\alpha + 5\beta + 3 \Rightarrow x = \frac{2\alpha + 5\beta + 3}{4}$$

Solução geral: $\left(\frac{2\alpha + 5\beta + 3}{4}, \alpha, \frac{1 - 3\beta}{2}, \beta\right)$.

Fique atento!
No exemplo **d** o grau de indeterminação é 2 $(4 - 2)$ e são duas as incógnitas livres.
O sistema tem infinitas soluções e duas delas são $(2, 0, -1, 1)$ e $\left(\frac{11}{2}, 2, -4, 3\right)$.

Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Por exemplo, os sistemas $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x+2y=26 \\ 2x-5y=-8 \end{cases}$ são equivalentes, pois, resolvidos, ambos apresentam como solução $S = \{(6, 4)\}$.

Exercício resolvido

2. Calcule a e b para que os sistemas $\begin{cases} x-y=9 \\ x+y=5 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax+y=12 \\ 2x+by=20 \end{cases}$ sejam equivalentes.

Resolução:

Primeiramente, resolvemos o sistema $\begin{cases} x-y=9 \\ x+y=5 \end{cases}$.

$$\begin{array}{l} x-y=9 \\ \underline{x+y=5} \\ 2x=14 \Rightarrow x=7 \end{array}$$

$7 - y = 9 \Rightarrow y = 7 - 9 \Rightarrow y = -2$

Para que os sistemas sejam equivalentes, $S = \{(7, -2)\}$ também deve ser o conjunto solução do outro sistema dado, então:

$ax + y = 12 \Rightarrow a \cdot (7) + (-2) = 12 \Rightarrow 7a - 2 = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7a = 14 \Rightarrow a = 2$

$2x - by = 20 \Rightarrow 2 \cdot (7) - b \cdot (-2) = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 14 + 2b = 20 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Portanto, para os sistemas serem equivalentes devemos ter $a = 2$ e $b = 3$.

Exercícios

12. Verifique se os sistemas abaixo são equivalentes:

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ y=2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+2y=8 \\ x=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=10 \\ y+2z=5 \\ z=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y-z=7 \\ x+y=8 \\ x=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \\ z=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y=1 \\ x=0 \end{cases}$

13. Classifique e resolva os sistemas lineares escalonados.

a) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 2y-z=1 \\ 2z=-6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x-2y+z=3 \\ 4y-z=5 \\ 0z=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=2 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+z-w=0 \\ y+z+w=5 \\ -z-2w=1 \\ -w=2 \end{cases}$

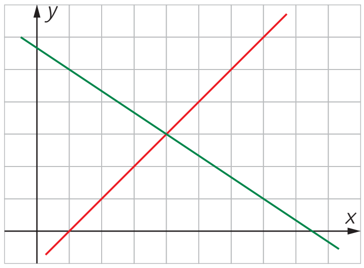
e) $\begin{cases} a+2b-c+d=2 \\ c-d=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x-5y=6 \\ 2y=1 \end{cases}$

14. Os sistemas $\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=4 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax+2y=32 \\ 3x-by=20 \end{cases}$ são equivalentes.

Calcule a e b.

15. DESAFIO EM DUPLA Observem os dois planos cartesianos abaixo, cada um contendo a representação gráfica de um sistema linear 2×2. É possível afirmar que esses sistemas lineares são equivalentes? Argumente defendendo sua resposta.



Processo para escalonamento de um sistema linear

Quando o sistema linear não está escalonado, podemos obter um sistema equivalente a ele, que esteja escalonado, por meio de algumas operações elementares. Para transformar um sistema não escalonado em um sistema equivalente escalonado, alguns procedimentos podem ser feitos:

- Podemos trocar a posição das equações. Exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

- Podemos multiplicar todos os termos de uma equação pelo mesmo número real diferente de zero:

$3x - y + z = 5 \Rightarrow 6x - 2y + 2z = 10$

- Podemos multiplicar os dois membros de uma equação por um mesmo número real diferente de zero e somar os resultados aos membros correspondentes da outra equação. Exemplo:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 7 \quad \cdot(-3) \\ 3x - 5y + 9z = 25 \quad + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = 7 \\ \quad\;\; y - 3z = 4 \end{cases}$$

- Se no processo de escalonamento obtivermos uma equação com todos os coeficientes nulos e o termo independente diferente de zero, essa equação será suficiente para afirmar que o sistema é impossível, isto é, tem $S = \varnothing$.

  Exemplo:

  $0x + 0y + 0z = 7 \Rightarrow S = \varnothing$

Vejamos agora alguns exemplos nos quais os sistemas são escalonados e depois classificados e resolvidos.

a) $$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \quad \cdot(-2) \quad \cdot 3 \\ 2x + 7y + z = 21 \quad + \\ -3x - 5y + 2z = -8 \quad + \end{cases}$$

Para anular os coeficientes de x na 2ª e na 3ª equações, podemos:

- multiplicar a 1ª por -2 e somar com a 2ª;
- multiplicar a 1ª por 3 e somar com a 3ª.

Depois, podemos trocar as posições das duas últimas equações para que o coeficiente de y seja 1 na 2ª equação.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ \quad 3y - z = 7 \\ \quad y + 5z = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ \quad y + 5z = 13 \quad \cdot(-3) \\ \quad 3y - z = 7 \quad + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ \quad y + 5z = 13 \\ \quad -16z = -32 \end{cases}$$

Fique atento!
É conveniente, mas não obrigatório, que o 1º coeficiente da equação que vai ser multiplicada seja 1 ou -1.

O sistema obtido está escalonado e é equivalente ao sistema dado.

Podemos agora resolver:

- $z = \dfrac{-32}{-16} = 2$
- $y + 5 \cdot 2 = 13 \Rightarrow y = 13 - 10 = 3$
- $x + 2 \cdot 3 + 2 = 7 \Rightarrow x = 7 - 6 - 2 = -1$

Sistema possível e determinado, com $S = \{(-1, 3, 2)\}$.

b) $\begin{cases} x+2y-\ \ z=3 & \cdot(-3)\cdot(-2) \\ 3x-\ \ y+\ \ z=1 & + \\ 2x+4y-2z=6 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-\ \ z=2 \\ -7y+4z=-8 \\ 0x+0y-0z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-\ \ z=7 \\ -7y+4z=-8 \\ 0z=0 \end{cases}$

Sistema possível e indeterminado (escalonamento e 2×3).
Dizemos que z é uma incógnita livre, ou seja, o valor de z pode ser qualquer número real.

- $z=\alpha \Rightarrow -7y+4\alpha=-8 \Rightarrow -7y=-8-4\alpha \Rightarrow y=\dfrac{8+4\alpha}{7}$
- $x+2\cdot\dfrac{8+4\alpha}{7}-\alpha=3 \Rightarrow 7x+16+8\alpha-7\alpha=21 \Rightarrow 7x=5-\alpha \Rightarrow x=\dfrac{5-\alpha}{7}$

Fique atento!
y também poderia ser a incógnita livre.

Solução geral: $\left(\dfrac{5-\alpha}{7}, \dfrac{8+4\alpha}{7}, \alpha\right)$.

c) $\begin{cases} 2x-4y+10z=6 & :(2) \\ 3x-6y+15z=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+5z=3 & \cdot(-3) \\ 3x-6y+15z=11 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+5z=3 \\ 0x+0y+0z=2 \end{cases}$

Sistema impossível, portanto $S=\varnothing$.

d) $\begin{cases} 3x-2y=-5 \\ x+3y=2 \\ -x+4y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=2 & \cdot(-3) \quad \cdot 1 \\ 3x-2y=-5 & + \\ -x+4y=5 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ -11y=-1 \\ 7y=7 \end{cases}$

Fique atento!
Dividir todos os termos de uma igualdade por 2 equivale a multiplicar por $\frac{1}{2}$.

Esse sistema tem o número de equações maior do que o número de variáveis (3×2).
As duas primeiras equações obtidas formam um sistema escalonado, que, resolvido, nos dá:

- $y=\dfrac{-11}{-11}=1$

e

- $x=2-3\cdot 1=-1$

O valor $y=1$ satisfaz também a 3ª equação ($7y=7$).
Logo, o sistema dado é possível e determinado e tem $S=\{(-1, 1)\}$.

e) $\begin{cases} x-2y=4 & \cdot(-4) \quad \cdot(-6) \\ 4x-6y=10 & + \\ 6x-9y=0 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ 2y=-6 \\ 3y=-24 \end{cases}$

- $2y=-6 \Rightarrow y=-3$
- $3y=-24 \Rightarrow y=-8$

Logo, o sistema é impossível, pois não podemos ter, simultaneamente, $y=-3$ e $y=-8$.
Portanto, $S=\varnothing$.

f) $\begin{cases} 3x-9y=6 & :(3) \\ 5x-15y=10 \\ -2x+6y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=2 & \cdot(-5) \quad \cdot(+2) \\ 5x-15y=10 & + \\ -2x+6y=-4 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=2 \\ 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=2 \\ 0y=0 \end{cases}$

A incógnita y é livre.
Para $y=\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:
$x-3\alpha=2 \Rightarrow x=2+3\alpha$
Logo, o sistema é possível e indeterminado, com solução geral $(2+3\alpha, \alpha)$.

Exercício resolvido

Resolvido passo a passo

3. (FGV-SP-modificado) As livrarias A, B, C e D de uma cidade vendem livros de Matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, de uma mesma coleção, com preço comum estabelecido pela editora. Os dados de vendas diárias são os seguintes:

Livraria	Número de livros vendidos				Valor total recebido (R$)
	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	
A	2	2	3	2	563,10
B	2	1	2	4	566,10
C	0	5	0	0	304,50
D	3	2	5	1	687,90

Qual é o preço de venda de cada um dos livros da coleção?

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada uma tabela contendo o valor total recebido por cada livraria na venda de certas quantidades diárias de livros de uma coleção. Por exemplo, segundo a tabela, a livraria A recebeu R$ 563,10 pela venda de 2 livros do 6º ano, 2 do 7º ano, 3 do 8º ano e 2 do 9º ano.

b) O que se pede?

Pede-se o preço de venda de cada um dos livros da coleção: do livro do 6º ano, do livro do 7º ano, do livro do 8º ano e do livro do 9º ano.

2. Planejando a solução

Devemos montar um sistema de equações com os dados da tabela e resolvê-lo. O sistema terá quatro equações e quatro incógnitas, e o ideal é resolvê-lo por escalonamento. Convém notar que a terceira linha terá apenas uma incógnita, que pode ser obtida imediatamente e, se substituída no sistema, o reduz para um sistema de três equações e três incógnitas.

3. Executando o que foi planejado

Vamos chamar de x, y, z e w os valores do livro do 6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano respectivamente. Assim, montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 2w = 563{,}10 \\ 2x + y + 2z + 4w = 566{,}10 \\ 5y = 304{,}50 \\ 3x + 2y + 5z + w = 687{,}90 \end{cases}$$

Da terceira linha temos:

$5y = 304{,}50 \Rightarrow y = 60{,}90$

Substituindo esse valor nas outras três linhas, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3z + 2w = 441{,}30 \\ 2x + 2z + 4w = 505{,}20 \\ 3x + 5z + w = 566{,}10 \end{cases}$$

Dividimos a segunda linha por 2 e invertemos a posição da segunda linha com a primeira linha:

$$\begin{cases} 2x + 3z + 2w = 441{,}30 \\ x + z + 2w = 252{,}60 \\ 3x + 5z + w = 566{,}10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z + 2w = 252{,}60 \\ 2x + 3z + 2w = 441{,}30 \\ 3x + 5z + w = 566{,}10 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira linha por -2 e somamos com a segunda linha; também multiplicamos a primeira linha por -3 e somamos com a terceira linha, eliminando a incógnita x dessas linhas:

$$\begin{cases} x + z + 2w = 252{,}60 \\ z - 2w = -63{,}90 \\ 2z - 5w = -191{,}70 \end{cases}$$

Agora, multiplicamos a segunda linha por -2 e somamos com a terceira linha, eliminando a incógnita z da terceira linha:

$$\begin{cases} x + z + 2w = 252{,}60 \\ z - 2w = -63{,}90 \\ -w = -63{,}90 \end{cases}$$

Da terceira linha temos que $w = 63{,}90$. Substituindo esse valor na segunda linha, temos:

$z - 2 \cdot 63{,}90 = 263{,}90 \Rightarrow z = 63{,}90$

Substituindo z e w na primeira linha, temos:

$x + 63{,}90 + 2 \cdot 63{,}90 = 252{,}60 \Rightarrow x = 60{,}90$

Portanto, $x = y = 60{,}90$ e $z = w = 63{,}90$.

4. Emitindo a resposta

Os preços de venda dos livros são: 6º e 7º anos, R$ 60,90 cada; 8º e 9º anos, R$ 63,90 cada.

5. Ampliando o problema

a) (FGV-SP-modificado) Quantas coleções completas (do 6º ao 9º ano) são vendidas diariamente em cada uma das livrarias?

b) (FGV-SP-modificado) Quando uma livraria compra 100 coleções completas (do 6º ao 9º ano), a editora emite uma fatura no valor de R$ 22 963,20. Qual é a porcentagem de desconto que a livraria recebe nesse caso?

16. Escalone, classifique e resolva os sistemas lineares abaixo:

a) $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ 3x-3y+z=8 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 2x+3y-z=8 \\ x-14z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+y-z=10 \\ 2x-y-7z=0 \end{cases}$

17. Classifique e resolva o sistema: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \\ 3x+3y=8 \end{cases}$.

18. Resolva a equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

19. (Unicamp-SP) Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

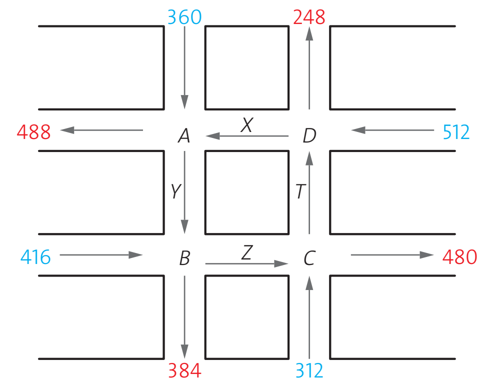
$$\begin{cases} 2x+y+z+w=1 \\ x+2y+z+w=2 \\ x+y+2z+w=3 \\ x+y+z+2w=4 \end{cases}$$

20. DESAFIO EM DUPLA (UFG-GO) Roberto gosta de fazer caminhadas em uma pista próxima a sua casa. Ao longo da pista existem uma lanchonete, um posto médico e uma banca de revistas. Fazendo o mesmo caminho diariamente, Roberto constatou que, da lanchonete à banca de revistas, passando pelo posto médico, caminhou 1 000 passos. Do posto médico à lanchonete, passando pela banca de revistas, caminhou 800 passos, e da banca de revistas ao posto médico, passando pela lanchonete, caminhou 700 passos. Considerando que cada um dos passos de Roberto mede 80 cm, qual é o comprimento da pista?

21. ATIVIDADE EM DUPLA Tenho 156 moedas que pesam ao todo meio quilo e totalizam R$ 34,00. Sabendo que dentre elas há as de 1 real, que pesam 10 g cada, as de 50 centavos, que pesam 8 g cada, e as de 10 centavos, que pesam 2 g cada, quantas são as moedas de cada tipo?

22. ATIVIDADE EM DUPLA O controle do fluxo de veículos nas ruas de mão única no horário do *rush* no centro de uma cidade pode ser compilado e estudado com auxílio de um sistema de equações lineares. A figura a seguir representa dois conjuntos de ruas de mão única que se cruzam no centro de uma cidade.

Observação: As ruas na direção horizontal formam um conjunto e as ruas na direção vertical formam outro conjunto.



número dos carros que entram

número dos carros que saem

A média do número de veículos por hora que entram e a média dos que saem de uma seção durante o horário de *rush* estão informadas na figura. O número de veículos que entram tem de ser igual ao número de veículos que saem. Levem em consideração as setas indicadas pela figura e os dados nela mostrados. Sabendo que em *T* a média é de 160 veículos por hora, determinem a média em *X*, *Y* e *Z*.

Analisem as afirmações abaixo e indiquem qual é a verdadeira, sabendo que em *T* a média é de 160 veículos por hora:

a) Em *Z* a quantidade de veículos é igual a 348.

b) Na passagem de *A* para *B* temos 240 veículos.

c) Entre os cruzamentos *A* e *B* temos mais veículos que entre os cruzamentos *B* e *C*.

d) Entre os cruzamentos *D* e *A*, temos 424 veículos.

e) Entre *B* e *C* temos 428 veículos.

Atividade elaborada pelos professores Letícia M. Panciera e Márcio V. Ferreira, da Unifra-RS.

23. DESAFIO EM DUPLA *Química*

Considerem a reação química não balanceada:

$$\underset{\text{cálcio}}{\underset{\downarrow}{Ca}} + \underset{\text{ácido fosfórico}}{\underset{\downarrow}{H_3PO_4}} \rightarrow \underset{\text{fosfato de cálcio}}{\underset{\downarrow}{Ca_3P_2O_8}} + \underset{\text{gás hidrogênio}}{\underset{\downarrow}{H_2}}$$

Essa equação pode ser balanceada fazendo:

$x\text{Ca} + y\text{H}_3\text{PO}_4 \Rightarrow z\text{Ca}_3\text{P}_2\text{O}_8 + w\text{H}_2$

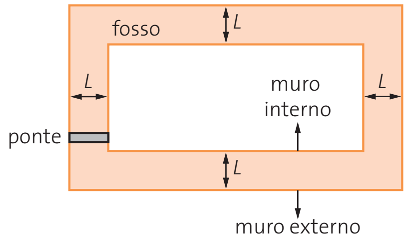
dando origem ao sistema $\begin{cases} x=3z \\ 3y=2w \\ y=2z \\ 4y=8z \end{cases}$

a) Resolvam o sistema.

b) Determinem o menor número inteiro de átomos de cálcio, hidrogênio, fósforo e oxigênio, com o qual ocorre o balanceamento.

24. ATIVIDADE EM DUPLA (Fuvest-SP) Um senhor feudal construiu um fosso, circundado por muros, em volta de seu castelo, conforme a planta a seguir, e uma ponte para atravessá-lo. Em um certo dia, ele deu uma volta completa no muro externo, atravessou a ponte e deu uma volta completa no muro interno. Esse trajeto foi completado em 5 320 passos. No dia seguinte, ele deu duas voltas completas no muro externo, atravessou a ponte e deu uma volta completa no muro interno, completando esse novo trajeto em 8 120 passos. Pode-se concluir que a largura *L* do fosso, em passos, é:

a) 36.
b) 40.
c) 44.
d) 48.
e) 50.



25. ATIVIDADE EM DUPLA Há alguns anos, o modo de atender os clientes nos bancos era muito diferente do atual. Por exemplo, cada caixa atendia uma fila formada diante de seu guichê de trabalho. A tabela abaixo simula uma situação de atendimento ao público para cada um dos caixas: caixa 1, caixa 2 e caixa 3, de acordo com a experiência e habilidade no trabalho de cada profissional, referente à quantidade total de clientes que devem ser atendidos por ele em sua jornada de trabalho.

Caixa	**Classificação** (clientes/hora)			**Total** (clientes/dia)
	Geral	**Idosos**	**PNE*/ Gestantes**	
1	10	8	5	51
2	6	6	4	34
3	8	7	5	43

* PNE é a sigla de Portador de Necessidades Especiais.

Com base na tabela acima, e sabendo que as quantidades de horas por dia que cada caixa gasta com cada uma das classes de clientes são *x*, *y* e *z*, para as classes Geral, Idosos e PNE/Gestantes, respectivamente, determinem o número de clientes idosos atendidos por dia pelos três caixas.

26. ATIVIDADE EM DUPLA O sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ 5x + 12y + 5z = 66 \\ x - y + 12z = 47 \end{cases}$ é determinado e sua solução é {(2, 3, 4)}. Inventem um enunciado, criando uma situação que possa ser representada por ele.

27. ATIVIDADE EM DUPLA *Biologia*
O organismo humano, bem como o de outros animais, para seu bom funcionamento necessita de vários tipos de substâncias, sais minerais, vitaminas, proteínas, etc. Vamos supor que uma pessoa necessita fazer uma receita de modo que a quantidade de cada alimento a ser ingerido corresponda às necessidades diárias de vitamina C, cálcio e magnésio. Ela se alimentará de três diferentes ingredientes, e cada um deles possui uma determinada quantidade de nutrientes (expressa em miligramas) por unidade de ingrediente (por exemplo, por colher), conforme apresentado na tabela a seguir.

Nutriente	**Tipo de alimento**			**Total necessário de nutrientes** (mg)
	1	**2**	**3**	
Vitamina C	10	20	30	100
Cálcio	40	40	10	210
Magnésio	20	10	30	110

Os dados da tabela são meramente ilustrativos.

Analisem os dados da tabela em relação às quantidades *x*, *y* e *z* de unidades dos ingredientes 1, 2 e 3, respectivamente, e indiquem a afirmação verdadeira.

a) A quantidade necessária de unidades do ingrediente 1 é o dobro da quantidade de unidades do ingrediente 2.
b) Para que a receita satisfaça as necessidades de vitamina C, cálcio e magnésio, são necessárias 3 unidades do ingrediente 2.
c) A quantidade de unidades do ingrediente 2 é o dobro da quantidade de unidades do ingrediente 3.
d) O ingrediente 1 deve contribuir com 40% do total necessário de vitamina C, cálcio e magnésio necessários à dieta alimentar do paciente.
e) O ingrediente 2 contribuirá com 50 mg de cálcio para que a receita alcance o resultado desejado.

28. Se em um sistema linear todos os termos independentes são nulos, o sistema é denominado sistema linear homogêneo. Resolva os sistemas homogêneos abaixo e classifique-os.

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases}$

29. Como em qualquer sistema homogêneo todos os termos independentes são nulos, ao escalonarmos um sistema homogêneo, a última linha sempre será algo do tipo $a_n \cdot x_n = 0$, em que $a_n \neq 0$ ou $a_n = 0$. O que isso significa em termos de classificação de um sistema homogêneo quanto ao número de soluções?

Discussão de um sistema linear

Observe o sistema:

$$\begin{cases} 3x + \ \ y = b \\ ax + 2y = 4 \end{cases}$$

Nesse sistema de incógnitas x e y, o coeficiente a e o termo independente b são chamados **parâmetros**; seus valores não estão estabelecidos.

Discutir um sistema significa descobrir para que valores dos parâmetros ele é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

Para saber em que condições o sistema é possível e determinado, podemos calcular o determinante da matriz dos coeficientes do sistema.

No sistema dado acima, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 6 - a$$

- Quando $a \neq 6$, teremos $D \neq 0$, e poderemos garantir que o sistema é possível e determinado, independentemente do valor de b.
- Quando $a = 6$, teremos $D = 0$, portanto não poderemos classificar o sistema sem escaloná-lo.

Substituindo $a = 6$ no sistema, teremos:

$$\begin{cases} 3x + \ \ y = b \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 3x + y = b \\ \quad 0y = 4 - 2b \end{cases}$$

Se $4 - 2b = 0$, teremos $0y = 0$ e o sistema será possível e indeterminado.
Se $4 - 2b \neq 0$, teremos um sistema impossível.
Assim:
$4 - 2b = 0 \Rightarrow b = 2$

Logo, a discussão do sistema será:
- para $a \neq 6$, temos um sistema possível e determinado (para qualquer $b \in \mathbb{R}$);
- para $a = 6$ e $b = 2$, temos um sistema possível e indeterminado;
- para $a = 6$ e $b \neq 2$, temos um sistema impossível.

Observação: Para discutir um sistema qualquer $n \times n$, é conveniente utilizar o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes aliado ao escalonamento.
Primeiramente calcula-se o determinante de modo que seu valor não seja nulo, obtendo então as condições dos parâmetros para que o sistema seja sistema possível e determinado.
Depois, com o mesmo determinante, impõe-se que seu valor seja nulo para então substituirmos no sistema os valores obtidos a partir dessa condição (se houver mais de um valor para o mesmo parâmetro, teremos mais de um sistema a ser considerado).
Em seguida, escalona(m)-se o(s) sistema(s) até a última linha e, a partir dela, pode ser concluída a discussão do sistema de acordo com as classificações possíveis dos sistemas lineares escalonados.

Exercícios resolvidos

4. Discuta o sistema $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$.

Resolução:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

Se $D \neq 0 \Rightarrow a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$, teremos sistema possível e determinado.
Para $D = 0 \Rightarrow a = 2$, é preciso escalonar.

Substituindo $a = 2$, temos $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$.

Escalonando, obtemos: $\begin{cases} x + y = b \\ 0y = 1 - 2b \end{cases}$.

Se $1 - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$, o sistema será sistema possível e indeterminado. Senão, será sistema impossível.

Portanto:

- $a \neq 2 \rightarrow$ sistema possível e determinado
- $a = 2$ e $b = \frac{1}{2} \rightarrow$ sistema possível e indeterminado
- $a = 2$ e $b \neq \frac{1}{2} \rightarrow$ sistema impossível

5. Discuta o sistema $\begin{cases} x - 2y + az = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = b \end{cases}$ em função dos parâmetros a e b.

Resolução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = a - 2$$

Para $D \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ (sistema possível e determinado).
Com $a = 2$, temos $D = 0$.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = b \end{cases} \rightarrow \text{escalonando} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ 0 = b + 1 \end{cases}$$

Observando a última linha, teremos uma igualdade verdadeira se $b + 1 = 0$, portanto, $b = -1$ (sistema possível e indeterminado).
A igualdade será falsa para $b + 1 \neq 0$ ou $b \neq -1$ (sistema impossível).

Portanto:

- $a \neq 2 \rightarrow$ sistema possível e determinado
- $a \neq 2$ e $b = -1 \rightarrow$ sistema possível e indeterminado
- $a \neq 2$ e $b \neq -1 \rightarrow$ sistema impossível

Exercícios

30. Discuta os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + my = 3 \\ mx - 8y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + \lambda z = 0 \\ 3x + 3y + \lambda z = 0 \end{cases}$

31. Para que valores de a o sistema:

$$\begin{cases} 2x - ay + z = -7 \\ 4x + y + 2z = 13 \\ x - y + az = 3 \end{cases}$$

é possível e determinado?

32. Determine k para que o sistema:

$$\begin{cases} -3x + 2y = 3 - k \\ 4x - 2z = 2 \\ -4y + 3z = 1 \end{cases}$$

seja possível e indeterminado.

33. ATIVIDADE EM DUPLA Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x + 4y + 3z = b \\ 5x + 7y + az = 8 \end{cases}$$

Calculem os valores de a e b para que o sistema seja impossível.

34. ATIVIDADE EM DUPLA Verifiquem se o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

é determinado ou indeterminado.

35. ATIVIDADE EM DUPLA (Unicamp-SP) Encontre o valor de a para que o sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ x + 2y - z = 3 \\ 7x - 4y + 3z = 13 \end{cases}$ seja possível.

Para o valor encontrado de a ache a solução geral do sistema, isto é, ache expressões que representem todas as soluções do sistema. Explicite duas dessas soluções.

Um pouco mais...

Programação linear e a otimização de funções

As equações e inequações lineares, bem como os sistemas de equações e inequações simultâneas, são bastante úteis na resolução de problemas de economia, transporte, alimentação (dietas), etc. Em problemas como esses é comum precisarmos saber os valores máximo ou mínimo de uma função cujas variáveis estão sujeitas a certas desigualdades. Em muitos deles a função que se quer otimizar (ou seja, da qual se quer encontrar o máximo ou o mínimo) é uma função linear, e as desigualdades a que estão sujeitas suas variáveis também são lineares. Quando isso ocorre, dizemos então que estamos diante de um problema de **programação linear**.

O método gráfico

Consideremos a seguinte situação-problema:

Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro abaixo. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

	P	**Q**	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

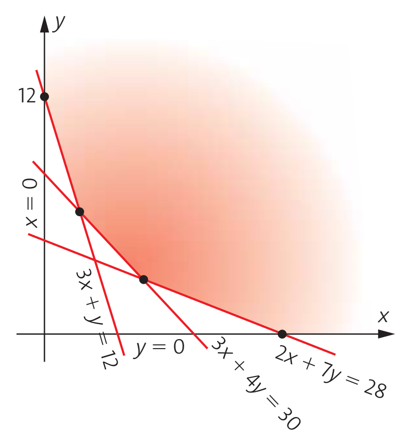
Diante de um problema de programação linear, consideramos as seguintes orientações para resolvê-lo:

1. Estabelecemos a **função objetivo**, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar.
2. Transformamos as restrições impostas no problema em um sistema de inequações lineares.
3. Traçamos o gráfico da região poligonal convexa correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices.
4. Calculamos os valores da função objetivo em cada um dos vértices.
5. Constatamos que o maior desses valores é o máximo e o menor é o mínimo da função objetivo. Voltamos ao problema e damos a sua solução.

Acompanhe cada passo na resolução da nossa situação-problema:

Seja x a quantidade do produto P, e y a quantidade do produto Q nas condições do problema.

1. Função objetivo:
   O custo é dado por $C = 3x + 2y$, o qual queremos minimizar.
2. Restrições:
   As condições impostas pelo problema são $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $3x + y \geqslant 12$, $3x + 4y \geqslant 30$ e $2x + 7y \geqslant 28$.
3. Gráfico:



Nesse caso, a região de possibilidades é a parte do plano limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $3x + y = 12$, $3x + 4y = 30$ e $2x + 7y = 28$. Os vértices são dados pelas soluções dos sistemas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 12)$$

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 6)$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{98}{13}, \frac{24}{13}\right)$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (14, 0)$$

4. Valores que a função objetivo assume nos vértices:

Vértice	Valor da função $C = 3x + 2y$
(0, 12)	$C = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 24$
(2, 6)	$C = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18 \leftarrow$ mínimo
$\left(\frac{98}{13}, \frac{24}{13}\right)$	$C = 3 \cdot \frac{98}{13} + 2 \cdot \frac{24}{13} = 26{,}3$
(14, 0)	$C = 3 \cdot 14 + 2 \cdot 0 = 42 \leftarrow$ máximo

5. Conclusão:
A dieta ótima, que é sadia e tem custo mínimo, consiste em consumir 2 unidades do produto *P* e 6 unidades do produto *Q*.

Agora, responda às questões a seguir.

a) Qual é o custo de consumir 4 unidades do produto *P* e 5 unidades do produto *Q*?

b) Quanto de vitamina A seria consumido com 4 unidades do produto *P* e 5 unidades do produto *Q*?

c) Quanto de vitamina B e C seria consumido nas mesmas condições da pergunta anterior?

d) Essa dieta (4 unidades do produto *P* e 5 unidades do produto *Q*) está de acordo com o texto?

e) Pesquise qual profissional deve ser consultado antes de se iniciar uma dieta. Você conhece algum? Discuta com seus colegas os perigos de fazer dietas sem acompanhamento médico.

Interpretação geométrica de sistemas lineares 3 × 3

As equações lineares com duas incógnitas representam retas no plano. Isso é relativamente simples de mostrar, principalmente quando associamos essas equações lineares com funções afim.

Embora não sejam tão facilmente percebidas, é possível provar que equações lineares com três incógnitas representam planos no espaço. Assim, um sistema 3 × 3 representa 3 planos no espaço.

Considere o sistema de três equações com três incógnitas:

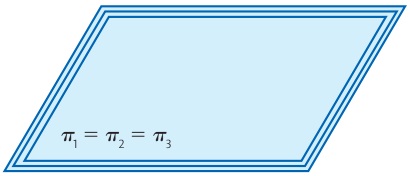
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Geometricamente, cada uma das equações, nessa ordem, define os planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente. O terno ordenado (*x*, *y*, *z*) é solução desse sistema quando o ponto *P*(*x*, *y*, *z*) pertence à intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, ou seja, quando *P* está simultaneamente nos três planos.

Fique atento!
Nos sistemas de duas equações com duas incógnitas tínhamos duas retas no plano. Agora, temos três planos no espaço.

Existem oito possibilidades para as posições relativas dos três planos, π_1, π_2 e π_3, no espaço.

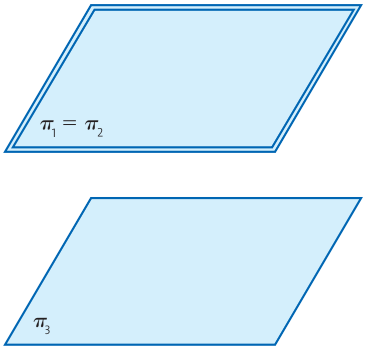
1ª possibilidade: os três planos coincidem



Nesse caso, **todos** os pontos *P*(*x*, *y*, *z*) de π_1 são soluções do sistema. Há, portanto, infinitas soluções para o sistema.

O sistema é possível e indeterminado (sistema possível e indeterminado).

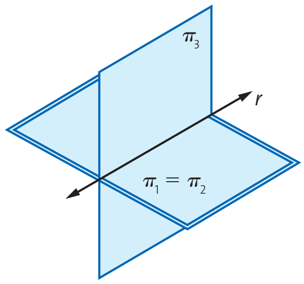
2ª possibilidade: dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles



Nesse caso, o sistema é impossível; não possui solução (sistema impossível).

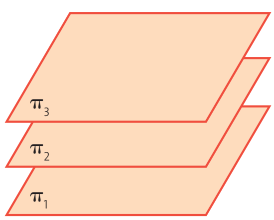
Observe que é impossível o ponto *P* estar simultaneamente no plano π_1 e no plano π_3.

3ª possibilidade: dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta



Nesse caso, todos os pontos $P(x, y, z)$ da reta são soluções. Há, portanto, infinitas soluções. O sistema é possível e indeterminado.

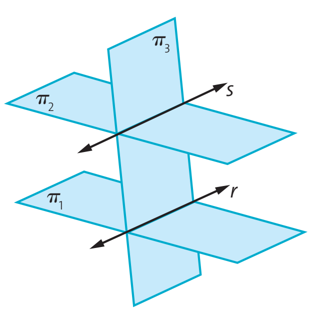
4ª possibilidade: os planos são paralelos dois a dois



Nesse caso, o sistema não possui solução; é impossível.

Perceba novamente que não há como um ponto P pertencer simultaneamente aos planos π_1, π_2 e π_3.

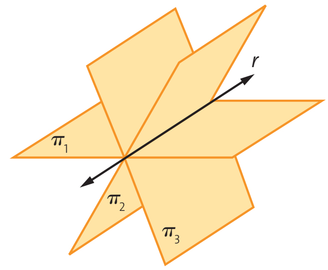
5ª possibilidade: dois planos são paralelos e o outro os intersecta segundo retas paralelas *r* e *s*



π_1 e π_2 são paralelos. Logo, $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$. Isso acarreta que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$. Portanto, o sistema não possui solução; é impossível.

Nesse caso, não há como um mesmo ponto P estar, ao mesmo tempo, nos três planos (π_1, π_2 e π_3).

6ª possibilidade: os três planos são distintos e têm uma reta em comum



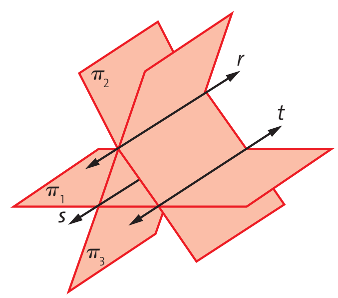
$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$$

Nesse caso, **todos** os pontos $P(x, y, z)$ da reta r são soluções. Há, portanto, infinitas soluções.

O sistema é possível e indeterminado.

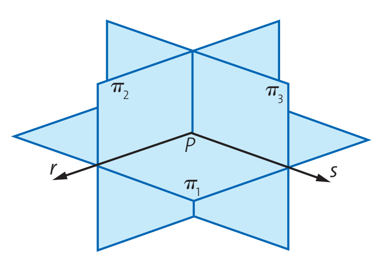
7ª possibilidade: os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras

Nesse caso, o sistema é impossível.



8ª possibilidade: os três planos têm um único ponto em comum

Nesse caso, o sistema é possível e determinado.



$$r = \pi_1 \cap \pi_2$$
$$s = \pi_1 \cap \pi_3$$

Resumindo, das 8 situações, temos 4 possibilidades de sistemas impossíveis e 4 de sistemas possíveis, sendo que apenas 1 é determinada.

Pensando no ENEM

1. Vamos supor que, com os incentivos dados pelo governo, a venda de automóveis tenha crescido bastante. Confira na tabela abaixo quais foram os três modelos mais vendidos, em versões duas e quatro portas, e as respectivas quantidades, nos meses janeiro a março de 2013.

Modelo		**Janeiro**		**Fevereiro**		**Março**	
		Número de portas					
		4	**2**	**4**	**2**	**4**	**2**
1º	*X*	130	28	150	30	250	43
2º	*Y*	95	11	80	26	150	33
3º	*Z*	90	9	80	26	130	30

Esta outra tabela mostra os preços desses três modelos de automóvel, que se manteve constante nos três meses considerados.

Modelo		**Preço** (em mil reais)	
		2 portas	**4 portas**
1º	*X*	25	28
2º	*Y*	20	25
3º	*Z*	24	26

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 130 & 150 & 250 \\ 95 & 80 & 150 \\ 90 & 80 & 130 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 28 & 30 & 43 \\ 11 & 26 & 33 \\ 9 & 26 & 30 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 20 & 25 \\ 24 & 26 \end{pmatrix}.$$

- Em *A*, as linhas indicam o 1º, o 2º e o 3º colocados em quantidades vendidas, considerando a versão 4 portas, e as colunas indicam as vendas nos meses de janeiro, fevereiro e março, respectivamente.
- Em *B*, são indicados os mesmos dados de *A*, porém para a versão 2 portas.
- Em *C*, as linhas indicam o preço de venda do 1º, do 2º e do 3º colocados, nessa ordem, e as colunas, as versões 2 e 4 portas.

Analise as afirmações abaixo e indique a verdadeira:

a) O produto *CA* indica a arrecadação com as vendas dos veículos versão 4 portas nos meses de janeiro, fevereiro e março.

b) O produto *AC* indica a arrecadação com as vendas dos veículos nas versões 2 e 4 portas nos meses de janeiro, fevereiro e março.

c) O produto $(A + B)C$ indica o total da arrecadação com as vendas dos veículos nas versões 2 e 4 portas nos meses de janeiro, fevereiro e março.

d) A soma dos produtos dos elementos da segunda linha de *A* pelos elementos correspondentes da segunda coluna de *B* é igual à arrecadação com a venda dos veículos de 2 portas do modelo *Z*.

e) O produto do elemento b_{11} da matriz *B* pelo elemento c_{11} da matriz *C* representa a arrecadação com a venda do modelo *X* com 2 portas no mês de janeiro.

Veja a seção **Caiu no Enem** no final do livro.

2. Atualmente, na propaganda de aparelhos eletrônicos, os fabricantes são obrigados pelo governo a destacar seu consumo, ou seja, a *potência* requerida pelo aparelho. Podemos citar como exemplos os aparelhos de som, os chuveiros e os ferros elétricos. *Observe a informação sobre a potência do aparelho*. Sabemos que esses aparelhos necessitam de energia elétrica para funcionar. Ao receberem a energia elétrica, eles a transformam em outra forma de energia. No caso do chuveiro e do ferro elétrico, por exemplo, a energia elétrica é transformada em energia térmica. Quanto mais energia for transformada em um menor intervalo de tempo, maior será a potência do aparelho. Portanto, podemos concluir que potência elétrica é uma grandeza que mede a rapidez com que a energia elétrica é transformada em outra forma de energia.

Gabor Nemes/kino.com.br

Considere a tabela 1, que mostra a potência necessária para o funcionamento de eletrodomésticos nas casas 1 e 2:

Tabela 1

	Ferro elétrico (watts/hora)	**Chuveiro elétrico** (watts/hora)
Casa 1	1200	3000
Casa 2	900	5200

A tabela 2 mostra o consumo de energia relativo aos dois eletrodomésticos nas residências 1 e 2:

Tabela 2

	Consumo (watts/hora)
Casa 1	66000
Casa 2	108500

Considere que a tabela 1 deu origem à matriz *A* e que a tabela 2 deu origem à matriz *C*. Além disso, que essas duas residências utilizem **em média** o mesmo tempo de ferro elétrico, bem como o mesmo tempo de chuveiro (x horas/mês de ferro elétrico e y horas/mês de chuveiro, que formam a matriz *B*). Determine, com os dados do texto acima, o valor de x e y.

3. (Enem) O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (*TC*) e a taxa de atualização de cadastros (*TA*), em que $TC = \frac{NV}{NF}$, $TA = \frac{NA}{NV}$, *NV* é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, *NF* é o número de famílias estimadas como público-alvo do CadÚnico e *NA* é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria n. 148, de 27 de abril de 2006 (adaptado).

Suponha que o ICadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando *NF* o ICadÚnico cairá para 0,5. Se $NA + NV = 3600$, então *NF* é igual a:

a) 10000.
b) 7500.
c) 5000.
d) 4500.
e) 3000.

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. (Ufam) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$. Os valores de k que tornam nulo o determinante da matriz $A = kI$, sendo I a matriz identidade, são:
   a) 0 e 5.
   b) -2 e 4.
   c) 0 e 4.
   d) -4 e 2.
   e) -4 e 0.

2. (UFPA/PSS) No mercado Ver-o-Peso, três vendedores combinaram vender três espécies de peixe, cada uma delas pelo mesmo preço, e fazer uma competição para ver quem vendia mais peixe pelo preço combinado, durante uma hora. Sabendo-se que:
   - o vendedor A vendeu 7 kg do peixe x, 5 kg do peixe y, 4 kg do peixe z e arrecadou R$ 65,00;
   - o vendedor B vendeu 8 kg do peixe x, 7 kg do peixe y, 6 kg do peixe z e arrecadou R$ 88,00;
   - o vendedor C vendeu 5 kg do peixe x, 4 kg do peixe y, 3 kg do peixe z e arrecadou R$ 49,00;

   quais os preços, por kg, dos peixes x, y e z, respectivamente?

3. (Ufam) Determine o valor de x, y e z, respectivamente, tais que $\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=4 \end{cases}$
   a) $-3, -\frac{9}{14}$ e $-\frac{9}{17}$
   b) $-3, \frac{9}{14}$ e $\frac{9}{17}$
   c) $3, -\frac{9}{14}$ e $\frac{9}{17}$
   d) $-3, -\frac{9}{14}$ e $\frac{9}{17}$
   e) $-3, \frac{9}{14}$ e $-\frac{9}{17}$

Região Nordeste

4. (UFC-CE) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de ordem 2×2. Então, pode-se afirmar que a soma $A + A^2 + ... + A^n$ é igual a:
   a) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   b) $\begin{bmatrix} n & n^2 \\ 0 & n \end{bmatrix}$.
   c) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   d) $\begin{bmatrix} n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & n \end{bmatrix}$.
   e) $\begin{bmatrix} n & n \\ 0 & n \end{bmatrix}$.

5. (UFPB) O sistema $\begin{cases} y - x = -1 \\ y + x = 1 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$ tem conjunto solução:
   a) vazio.
   b) unitário.
   c) formado por dois elementos.
   d) formado por três elementos.
   e) infinito.

6. (Uece) Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. O valor do determinante da matriz $C = A \cdot B$ é:
   a) 6.
   b) 16.
   c) 26.
   d) -6.

Região Centro-Oeste

7. (UFMS) Considere as matrizes reais 3×3, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, em que c é um número real. Sabendo-se que o valor do determinante da matriz produto $A \cdot B$ é -60, calcule o valor de c.

8. (UFG-GO) Um sistema linear tem a seguinte matriz de coeficientes: $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & k & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Uma condição necessária e suficiente sobre k para que o sistema tenha uma única solução é:
   a) $k \neq 4$.
   b) $k \neq \frac{12}{11}$.
   c) $k \neq 0$.
   d) $k \neq -\frac{12}{11}$.
   e) $k \neq -4$.

9. (UFG-GO) Seja $M = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada de ordem n, onde $a_{ij} = i + j$. Nessas condições, a soma dos elementos da diagonal principal dessa matriz é:
   a) n^2.
   b) $2n + 2n^2$.
   c) $2n + n^2$.
   d) $n^2 + n$.
   e) $n + 2n^2$.

Região Sudeste

10. (PUC-MG) Seja $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, cuja lei de formação é dada abaixo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, \text{ se } i \neq j \\ 2i - 3j, \text{ se } i = j \end{cases}$$

É correto afirmar que:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -5 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

11. (ITA-SP) Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de:

a) R$ 17,50.

b) R$ 16,50.

c) R$ 12,50.

d) R$ 10,50.

e) R$ 9,50.

12. (PUC-MG) Seja A a matriz $A = (a_{ij})_{2\times3}$, cuja lei de formação é dada abaixo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, \text{ se } i \neq j \\ 2i - 3j, \text{ se } i = j \end{cases}$$

É correto afirmar que:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -5 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

Região Sul

13. (Udesc) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a soma dos valores numéricos de x, para os quais a igualdade $A^2 - 2A - 3I = 0$ é verificada para:

a) $x = 0$.

c) $x = 1$.

e) $x = -1$.

b) $x = 2$.

d) $x = -2$.

14. (UEL-PR) Um comerciante varejista comprou 80 calças de dois tamanhos diferentes, pequeno e médio, gastando R$ 4 300,00. Cada calça de tamanho pequeno custou R$ 50,00 e cada calça de tamanho médio custou R$ 60,00. Quantas calças de tamanho pequeno e médio, respectivamente, ele comprou?

a) 30 e 50

c) 40 e 40

e) 50 e 30

b) 37 e 43

d) 43 e 37

15. (UEL-PR) Uma das formas de enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

1) Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C.
2) O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que $MC = P$, onde M é a matriz mensagem a ser decodificada.
3) Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: 1 = a, 2 = b, 3 = c, ..., 23 = z.
4) Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k, w e y.
5) O número zero corresponde ao ponto de exclamação.
6) A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: $m_{11}m_{12}m_{13}m_{21}m_{22}m_{23}m_{31}m_{32}m_{33}$.

Considere as matrizes $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e

$P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}$. Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, assinale a alternativa que apresenta a mensagem que foi enviada por meio da matriz M.

a) Boasorte!

c) Boatarde!

e) Socorro!

b) Boaprova!

d) Ajudeme!

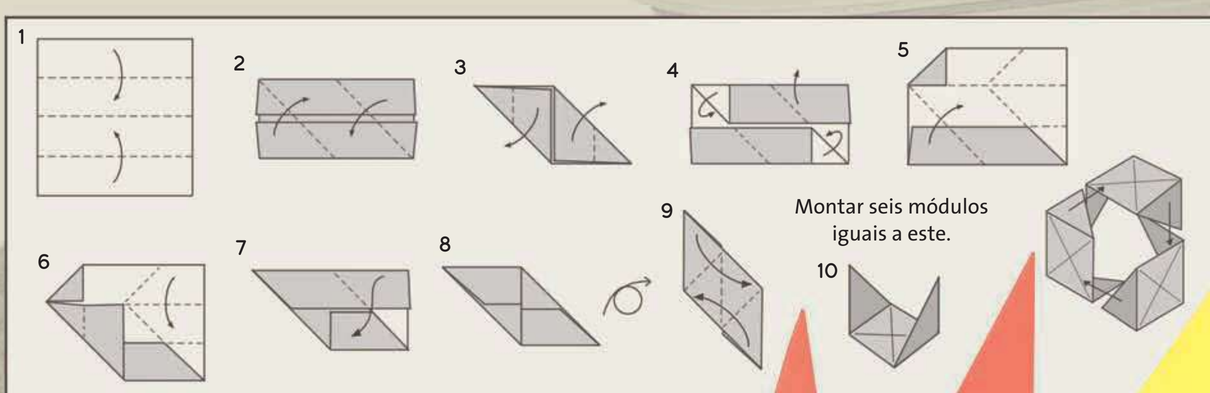
UNIDADE 3

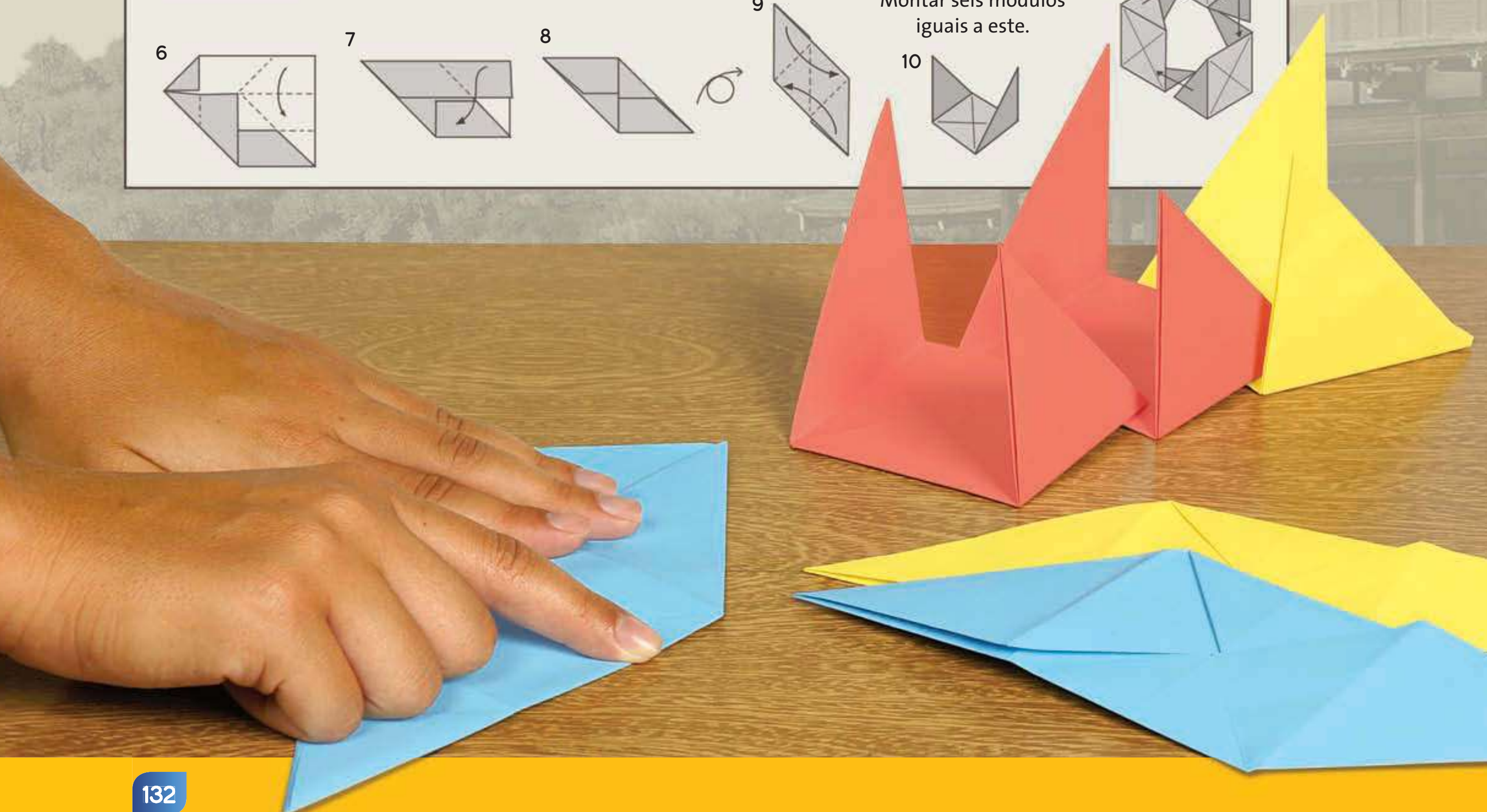
Geometria plana e espacial

O origâmi é uma arte tradicional de origem japonesa que consiste na criação de figuras geométricas representativas de objetos, seres humanos, animais, etc. sem o uso de compasso, tesoura ou cola, apenas com dobraduras do papel.

Esse tipo de artesanato é muito comum no Japão, porém se espalhou pelo mundo todo.

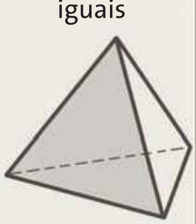
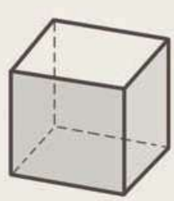
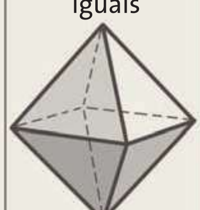
Por meio da técnica do origâmi modular, a qual se baseia na confecção de várias partes iguais ou módulos que são encaixados para formar cada peça, é possível construir os cinco poliedros de Platão e muitos outros. Veja a confecção e o encaixe de seis desses módulos gerando um hexaedro regular (cubo), um dos poliedros de Platão.





Muitos conceitos geométricos estão presentes na arte da dobradura, como a definição de: plano, ponto, retas paralelas, retas concorrentes, bissetriz, diagonal, entre outras, que podem ser compreendidas por meio da visualização dos ângulos e das linhas vincadas no papel.

A designação desses poliedros deve-se ao filósofo grego Platão, que descobriu, por volta de 400 a.C., que há somente cinco poliedros cujas faces são todas polígonos regulares congruentes entre si. Observe:

4 triângulos equiláteros iguais	6 quadrados iguais	8 triângulos equiláteros iguais	12 pentágonos regulares iguais	20 triângulos equiláteros iguais
				
tetraedro regular	**hexaedro regular (cubo)**	**octaedro regular**	**dodecaedro regular**	**icosaedro regular**

1. **Quais conceitos geométricos podem ser identificados na confecção de origâmis?**

2. **Quantos e quais são os poliedros de Platão?**

CAPÍTULO 7

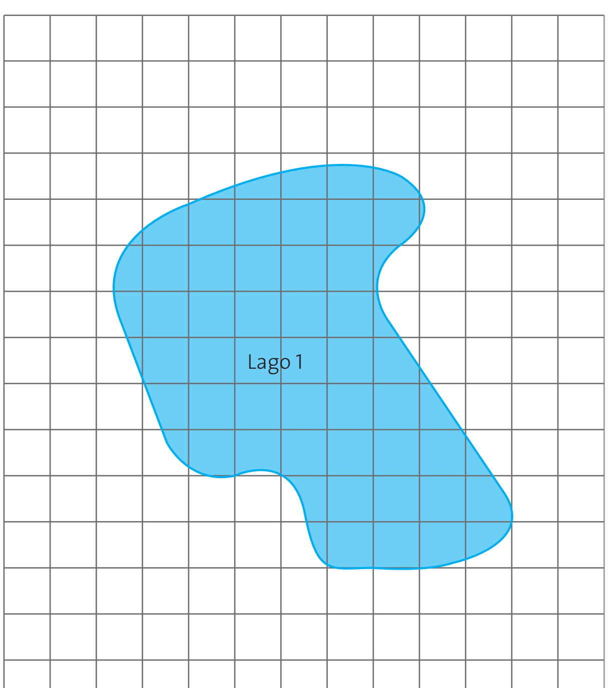
Polígonos inscritos e áreas

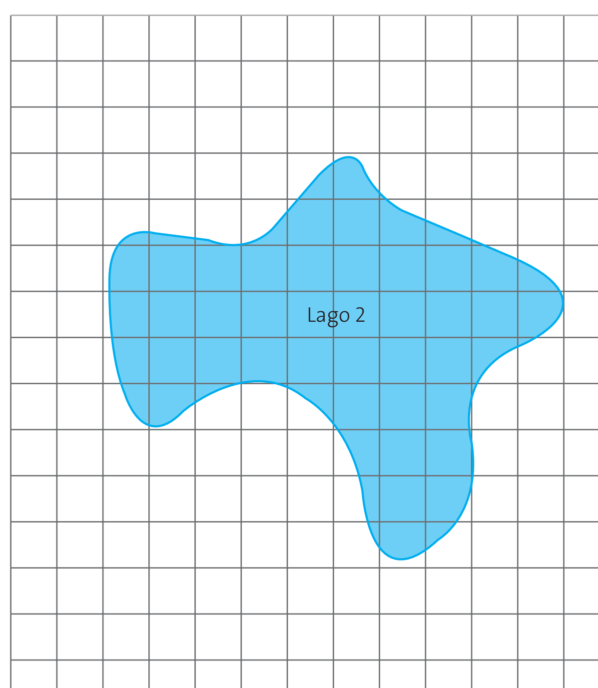
No volume 1 desta Coleção revisamos alguns aspectos da Geometria plana para possibilitar uma boa compreensão da Trigonometria no triângulo retângulo. Agora, retomamos a revisão de mais alguns tópicos da Geometria plana para prepará-lo para o estudo da Geometria espacial a partir do próximo capítulo.

Neste capítulo estudaremos os polígonos inscritos na circunferência e as ideias associadas a áreas.

A ideia de área está ligada à noção de medição de terrenos. Saber mensurar o tamanho de superfícies é uma habilidade importante não só para os estudos escolares. É um assunto milenar, de importância vital há mais de 3 mil anos.

» Vamos fazer um teste: formem grupos de três ou quatro alunos e opinem sobre qual dos dois lagos mostrados abaixo (lago 1 ou lago 2) tem maior superfície. Depois que cada colega der sua opinião, criem uma maneira de comparar as áreas de cada superfície e verifiquem quem acertou.

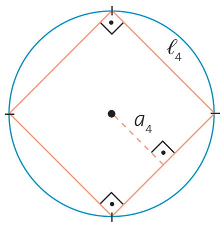




Antes de estudarmos as áreas, vamos retomar alguns assuntos importantes.

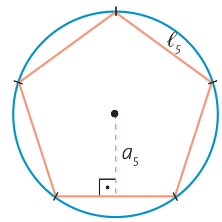
1 Polígonos regulares inscritos na circunferência

Os polígonos regulares são aqueles em que todos os lados e todos os ângulos são congruentes. Os mais importantes são o quadrado, o triângulo equilátero e o hexágono regular. Observe a seguir o quadrado e o pentágono regular inscritos em circunferências:



quadrado inscrito em uma circunferência
ℓ_4: lado
a_4: apótema

Fique atento!
Apótema é um segmento com uma extremidade no centro da circunferência e outra no ponto médio do lado do polígono regular.
Ele coincide com o raio da circunferência inscrita no polígono regular.

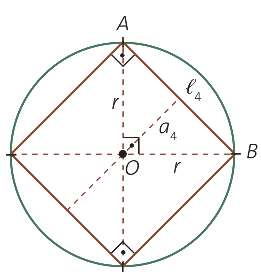


pentágono regular inscrito em uma circunferência
ℓ_5: lado
a_5: apótema

Para refletir
Os n vértices do polígono regular dividem a circunferência circunscrita em n partes iguais. Verifique isso nas figuras desta página.

Cálculo da medida do lado e do apótema de um polígono regular em função do raio da circunferência

Quadrado inscrito em uma circunferência



a) lado: ℓ_4

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AOB$, temos:

$\ell_4^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow \ell_4^2 = 2r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ell_4 = r\sqrt{2}}$

b) apótema: a_4

Observe na figura que:

$a_4 + a_4 = \ell_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_4 = \ell_4 \Rightarrow a_4 = \dfrac{\ell_4}{2}$

Ou seja: $a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$

Fique atento!
- O apótema é a metade do lado do quadrado.
- O diâmetro da circunferência é a diagonal do quadrado.

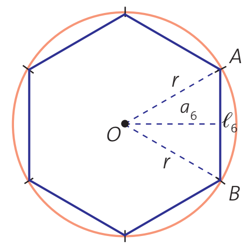
Exercício resolvido

1. Calcule o lado e o apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência de 30 cm de raio.

Resolução:

- $\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 30\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 \simeq 42{,}3$ cm
- $a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = \dfrac{30\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 \simeq 21{,}2$ cm

Hexágono regular inscrito em uma circunferência



a) lado: ℓ_6

$A\hat{O}B: \dfrac{360°}{6} = 60°$; $\overline{OA} \cap \overline{OB} \Rightarrow O\hat{A}B \cap O\hat{B}A$

Nesse caso, $O\hat{A}B$ e $O\hat{B}A$ também medem $60° \left(\dfrac{180° - 60°}{2}\right)$.

Então, $\triangle OAB$ é equilátero e, daí, $\boxed{\ell_6 = r}$.

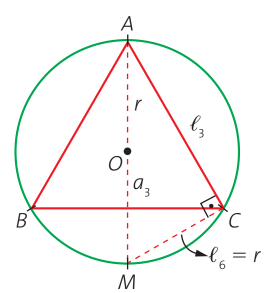
b) apótema: a_6

Como $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{r}{2}$, temos:

$r^2 = a_6^2 + \dfrac{r^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_6^2 = \dfrac{3r^2}{4} \Rightarrow \boxed{a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}}$

Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência



a) lado: ℓ_3

Observe que $\overline{AC} = \ell_3 \Rightarrow \overline{CM} = \ell_6$. Logo, $\overline{CM} = r$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ACM$, temos:

$\ell_3^2 + r^2 = (2r)^2 \Rightarrow \ell_3^2 = 3r^2 \Rightarrow \boxed{\ell_3 = r\sqrt{3}}$

b) apótema: a_3

$a_3^2 + \left(\dfrac{\ell_3}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow a_3^2 = r^2 - \left(\dfrac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a_3 = \dfrac{r}{2}}$

Exercícios resolvidos

2. Calcule o lado e o apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de 20 cm de raio.

Resolução:

- $\ell_6 = r \Rightarrow \ell_6 = 20$ cm
- $a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = \dfrac{20\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 \simeq 17{,}3$ cm

3. Calcule o lado e o apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de 35 cm de raio.

Resolução:

- $\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell_3 = 35\sqrt{3} \Rightarrow \ell_3 \simeq 60{,}6$ cm
- $a_3 = \dfrac{r}{2} \Rightarrow a_3 = \dfrac{35}{2} \Rightarrow a_3 = 17{,}5$ cm

Fique atento!
O apótema é a terça parte da altura do triângulo equilátero.

Comprimento da circunferência

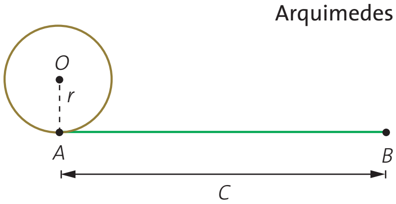
Historicamente, o cálculo do comprimento de uma circunferência sempre foi feito a partir da comparação com o diâmetro. Há cerca de 4 mil anos, os babilônios obtinham o comprimento da circunferência triplicando o diâmetro. Essa razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro dela é conhecida como o número π, ou seja, $\pi = \frac{C}{D}$. Então, para os babilônios, $\pi = 3$. Há cerca de 2 mil anos, Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.), um dos mais importantes geômetras gregos de toda a História, publicou um tratado matemático contendo o cálculo do valor de π como um número entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$. Isso equivalia a usar $\pi = 3{,}14$, o mesmo que usamos atualmente nos cálculos práticos, um feito notável para a época.


Album/akg/North Wind Picture Archives/Akg-Images/Latinstock

Arquimedes

Hoje sabemos que π é o número irracional 3,14159265358979323 846264338327950288419716939937510..., aqui escrito com as cinquenta primeiras casas decimais, mas que já foi obtido com precisão de 8 quatrilhões de casas decimais por poderosos computadores. Porém, mesmo hoje em dia, usar $\pi = 3{,}14$ é suficiente para as nossas necessidades práticas. Em cálculos teóricos, não substituímos π pelo seu valor. Assim, usamos para o comprimento da circunferência a fórmula $\boxed{C = 2\pi r}$, pois:

$$\frac{C}{D} = \pi \Rightarrow \frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2\pi r$$



AB: medida da circunferência ou comprimento da circunferência (*C*)

Comprimento de um arco

O comprimento ℓ de um arco pode ser calculado de forma proporcional ao comprimento da circunferência. Uma semicircunferência, por exemplo, é um arco de 180° (metade de 360°), sendo seu comprimento, então, a metade do comprimento da circunferência.

Dessa forma, podemos escrever:

$$\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi} = \text{fração da circunferência ocupada pelo arco}$$

Dependendo da informação conhecida (α em graus, α em radianos ou fração da circunferência), usamos uma das relações acima.

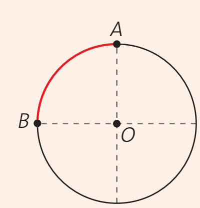
Exercícios resolvidos

4. Determine o valor aproximado do comprimento de uma circunferência que tenha 5 cm de raio.

Resolução:

$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot \pi \cdot 5 \Rightarrow C \simeq 10\pi$ cm

5. Determine o comprimento do arco *AB* na circunferência de raio 6 m da figura ao lado.



Resolução:

O arco representa $\frac{1}{4}$ da circunferência. Então:

$$\frac{\ell}{2 \cdot \pi \cdot 6} = \frac{1}{4} \Rightarrow \ell = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 12 = 3\pi \text{ m}$$

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Em uma circunferência de 10 cm de raio, calcule as medidas do lado e do apótema de um:
   a) triângulo equilátero inscrito;
   b) quadrado inscrito;
   c) hexágono regular inscrito.

2. Determine o perímetro do hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio igual a 5 cm.

3. Um triângulo equilátero de lado 5 cm está inscrito em uma circunferência de raio *r*. Qual é a medida do diâmetro dessa circunferência?

4. Determine a razão entre o apótema de um quadrado e o lado de um triângulo equilátero, ambos inscritos em uma circunferência de raio igual a 6 cm.

5. Determine o comprimento de uma circunferência cujo diâmetro é 14 cm.

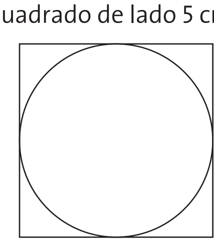
6. Calcule a medida do raio de uma circunferência cujo comprimento é 14π cm.

7. Uma roda de bicicleta tem diâmetro de 60 cm. Qual é a distância percorrida pela bicicleta depois que a roda deu 500 voltas?

Iwona Grodzka/Shutterstock/Glow Images

8. Como ficará o comprimento de uma circunferência quando seu raio:
   a) dobrar?
   b) triplicar?

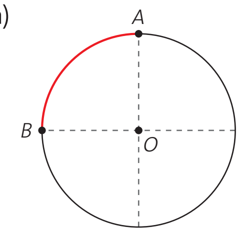
9. Determine o comprimento de uma circunferência inscrita em um quadrado de lado 5 cm.



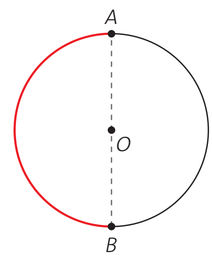
10. Calcule o comprimento de uma circunferência na qual está circunscrito um triângulo equilátero cujo apótema é 6 cm.

11. Qual é o comprimento dos arcos *AB* a seguir, sendo 10 cm o raio de cada circunferência de centro *O*?

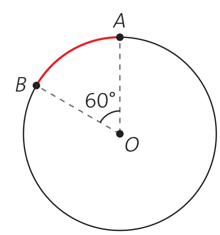
a)



b)

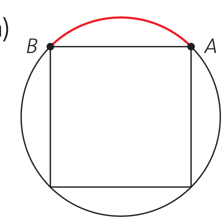


c)

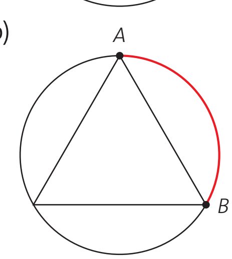


12. Qual é o comprimento de cada arco *AB* abaixo, considerando que em cada caso os polígonos inscritos são regulares e o raio de cada circunferência é 24 cm? Lembre-se de que os vértices do polígono regular dividem a circunferência circunscrita a eles em partes iguais.

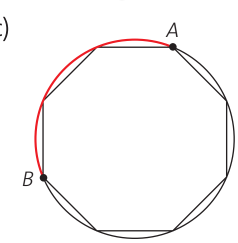
a)



b)



c)



2 Áreas: medidas de superfícies

Desde a época dos antigos egípcios, que procuravam medir e demarcar suas terras (daí surgiu o nome Geometria = medida da terra), até hoje, quando topógrafos, geólogos e arquitetos fazem mapeamentos e plantas, o cálculo de áreas tem sido uma preocupação constante.

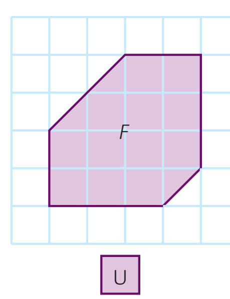
No começo deste capítulo você teve a oportunidade de, junto com seus colegas, sugerir maneiras de comparar a área da superfície de dois lagos para determinar a maior delas. Agora, aprofundaremos esse estudo, estabelecendo valores às medidas das superfícies e conhecendo as fórmulas para o cálculo da área das superfícies mais comuns.

Fabio Colombini/Acervo do fotógrafo

A floresta Amazônica tem cerca de 5 500 000 km^2 de área.

A ideia intuitiva de área

Suponha que queiramos medir a região do plano indicada por *F* na figura abaixo. Para isso, precisamos comparar *F* com uma unidade de área que chamaremos de U. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a região *F* contém a unidade de área U. Esse número assim obtido é a área de *F*.



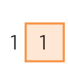
unidade de área: U

Então, a área da região plana *F* é 13,5 U, ou seja:

$$\text{área de } F = 13{,}5 \text{ U}$$

Região quadrada unitária

Vamos estabelecer como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ela será chamada **região quadrada unitária**.



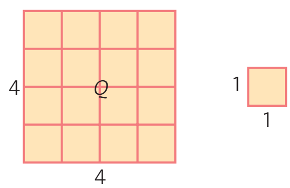
região quadrada unitária

Qualquer região quadrada cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

Área da região quadrada

- Consideremos uma região quadrada Q cujo lado mede n, em que n é um número natural. Ela pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, cada uma com lado unitário e, portanto, com área 1. Logo, a região quadrada Q tem área n^2:

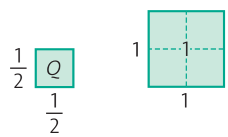
$$\text{área de } Q = n^2$$



Região quadrada de lado 4, decomposta em $16 = 4^2$ regiões quadradas unitárias.

Fique atento!
Quadrado é todo quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

- Vejamos agora quando o lado da região quadrada Q tem por medida $\frac{1}{n}$ em que $n \in \mathbb{N}^*$. Nesse caso, a região quadrada unitária pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, todas congruentes a Q.



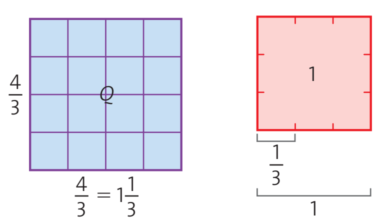
Região quadrada unitária decomposta em $4 = 2^2$ regiões quadradas congruentes a Q.

Área da região $Q = \frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{2^2}\right)$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Assim, $n^2 \cdot$ (área de Q) $= 1$. Logo:

$$\text{área de } Q = \frac{1}{n^2} \text{ ou } \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

- Passemos agora para um caso mais geral, em que a medida do lado da região quadrada Q é um número racional do tipo $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.
Nesse caso, pode-se decompor Q em m^2 regiões quadradas, cada uma das quais com lado $\frac{1}{n}$. Assim, a área de cada uma dessas regiões quadradas menores é $\frac{1}{n^2}$.



Região quadrada de lado $\frac{4}{3}$, decomposta em $16 = 4^2$ regiões quadradas menores, cada uma com lado cuja medida é $\frac{1}{3}$ e cuja área é $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Área da região $Q = \frac{16}{9}\left(\frac{4^2}{3^2}\right)$ ou $\left(\frac{4}{3}\right)^2$.

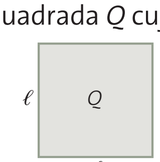
Assim, neste caso, a área da região quadrada Q será dada por $m^2\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$, ou seja:

$$\text{área de } Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

É possível provar que, se a medida do lado da região Q for um número irracional k, ainda assim:

$$\text{área de } Q = k^2$$

Conclusão: A área de uma região quadrada Q cujo lado mede ℓ é dada por:

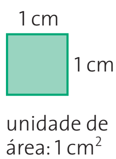


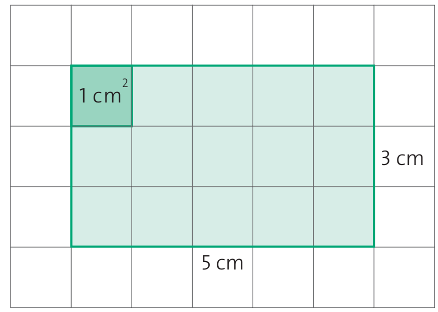
$$\text{área de } Q = \ell^2$$

sendo ℓ um número real positivo qualquer: natural, fracionário ou irracional.

Área da região retangular

A região retangular pintada abaixo contém 15 unidades de área. Portanto, sua área é de 15 cm^2.





Fique atento!
Retângulo é todo quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.

Observe que, em vez de contar quantas unidades de área estão contidas na região retangular, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura:

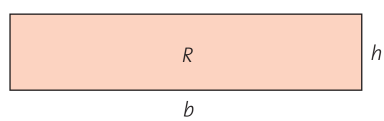
$$5\text{ cm} \quad 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$$

Nesse caso, as medidas do comprimento e da largura são números naturais.

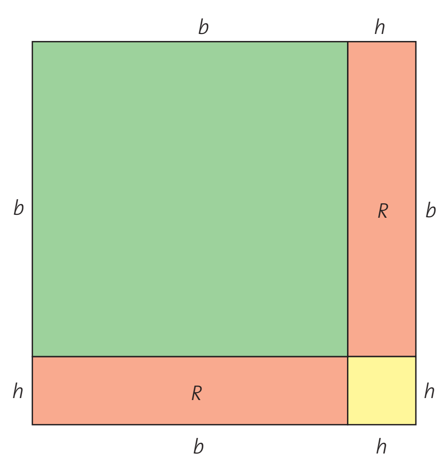
Vamos provar que, se a medida da base (b) e a medida da altura (h) forem números reais quaisquer, a área da região retangular R é dada por:

$$\text{área de } R = b \quad h$$

Consideramos uma região retangular R de base b e altura h, em que b e h são números reais.



Construímos uma região quadrada cuja medida do lado é $b + h$, que contém duas cópias de R e mais duas regiões quadradas, uma cujo lado mede b e outra cujo lado mede h.



A área dessa região quadrada (Q) é dada pelo quadrado de uma soma:

$$\text{área de } Q = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 \quad \text{(I)}$$

Como as regiões quadradas têm áreas iguais a h^2 e b^2, concluímos que:

$$\text{área de } Q = b^2 + h^2 + 2 \quad (\text{área de } R) \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), chegamos a:

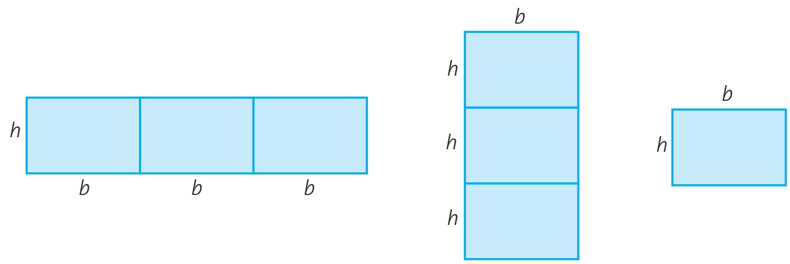
$$\boxed{\text{área de } R = b \cdot h}$$

Proporcionalidade e área da região retangular

A área da região retangular é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, se mantivermos constante uma das dimensões e multiplicarmos a segunda dimensão por um número natural qualquer, a área também será multiplicada pelo mesmo número natural. Isso pode ser observado no exemplo a seguir.

Sendo $A(x, y)$ a área de uma região retangular de dimensões x e y:

$$A(h, 3b) = A(3h, b) = 3A(h, b)$$



Usando essa ideia de proporcionalidade e a região quadrada unitária:

podemos também chegar à área da região retangular com dimensões h e b quaisquer:

$$A(h, b) = h \cdot A(1, b) = h \cdot b \cdot \underbrace{A(1, 1)}_{1} = hb$$

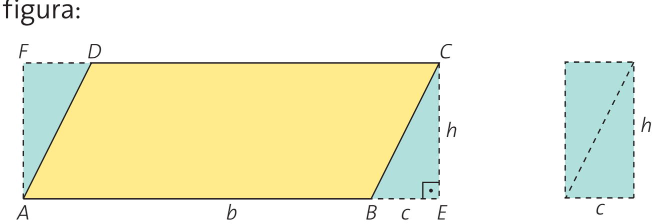
Logo, essa é outra maneira de provarmos que a área de uma região retangular cujo comprimento (base) é b e cuja largura (altura) é h é dada por hb, ou seja:

$$\boxed{A = hb}$$

Área da região limitada por um paralelogramo

Vamos calcular a área da região plana limitada pelo paralelogramo $ABCD$ tomando como base $\overline{AB}$ de medida b e sua altura $\overline{CE}$ (perpendicular a $\overline{AB}$) de medida h.

Examine a figura:



Fique atento!
Paralelogramo é todo quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

A região limitada pelo paralelogramo está contida em uma região retangular de base $b + c$ e altura h. Você já sabe: a área dessa região retangular é dada por:

$$(b + c)h = bh + ch$$

Observe que a região retangular é formada pela região limitada pelo paralelogramo mais duas regiões triangulares que, juntas, formam uma região retangular de área ch. Assim:

$$bh + ch = (\text{área da região limitada pelo paralelogramo}) + ch$$

Portanto:

$$\boxed{\text{área da região limitada pelo paralelogramo} = bh}$$

Isso significa que a área da região limitada por um paralelogramo é igual ao produto da medida de uma de suas bases pela medida da altura correspondente a essa base escolhida.

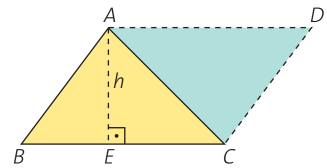
Fique atento!
Esse resultado não depende da base escolhida. Se tivéssemos escolhido outro lado como base e tomado a altura correspondente, o resultado seria o mesmo.

Área da região triangular

Conhecendo-se a área da região limitada por um paralelogramo, fica muito simples determinar a área de uma região triangular. Sabe por quê? Porque toda região triangular é metade da região limitada por um paralelogramo de mesma base e mesma altura.

Veja:

Dada a região triangular *ABC*, cuja área queremos determinar, traçamos paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto *D* e a região limitada pelo paralelogramo *ABCD*. Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida *h* desse paralelogramo.



Já sabemos que, se a medida de $\overline{BC}$ é *b*, então a área da região limitada pelo paralelogramo é *bh*. Mas as regiões triangulares *ABC* e *ADC* são congruentes (pelo caso de congruência de triângulos ALA: têm um lado comum compreendido entre dois ângulos de mesma medida). Logo, essas regiões triangulares têm áreas iguais.

Assim:

área da região *ABCD* = 2 · área da região triangular *ABC*

ou

bh = 2 · área da região triangular *ABC*

Portanto:

$$\text{área da região triangular } ABC = \frac{bh}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}\,bh$$

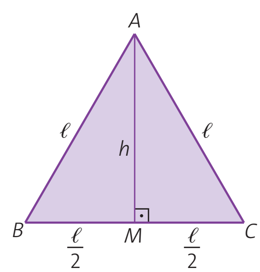
Fique atento!
Esse resultado não depende da base escolhida. Temos três escolhas para a base *b*, cada uma com sua altura *h* correspondente. Seja qual for a escolha, o valor de $\frac{bh}{2}$ será sempre o mesmo.

Podemos escrever: a área de uma região triangular é a metade do produto da medida da base pela medida da altura correspondente.

Área da região limitada por um triângulo equilátero

No triângulo equilátero, todos os lados são congruentes (ℓ, ℓ e ℓ), todos os ângulos internos são congruentes (60°, 60° e 60°), e toda altura é também mediana e bissetriz.

Veja o cálculo da área, usando a base (ℓ) e a altura (*h*):



Fique atento!
Mediana é o segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

O triângulo *AMC* é retângulo em *M* e, portanto, vale a relação de Pitágoras:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Logo, a área da região limitada pelo triângulo *ABC* é dada por:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, $\boxed{A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$ (área da região triangular equilátera de lado ℓ).

Área da região triangular por meio da Trigonometria

Este caso se aplica quando são conhecidos dois lados do triângulo e o ângulo formado por eles.

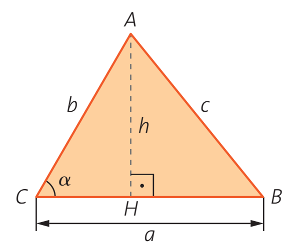
Observe que LAL é um caso de congruência de triângulos, o que significa que um triângulo fica perfeitamente determinado quando conhecemos dois de seus lados e o ângulo formado por eles.

Consideremos o triângulo ABC representado na figura abaixo.

Suponhamos que sejam conhecidas as medidas dos lados AC e CB e o ângulo formado por eles, $A\hat{B}C$. Vamos indicar essas medidas assim: $AC = b$, $CB = a$ e $A\hat{C}B = \alpha$ para facilitar a demonstração.

Seja h a altura relativa à base $\overline{BC}$.

Sabemos que a área desse triângulo é dada por $S = \dfrac{ah}{2}$.



Se nós conhecemos α, podemos escrever $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{h}{b}$, já que ACH é um triângulo retângulo.

Agora, podemos encontrar a altura em função de α e b:

$$h = b \cdot \text{sen}\ \alpha$$

Assim, a área será dada por:

$$S = \frac{ab \cdot \text{sen}\ \alpha}{2}$$

Para refletir
Se no triângulo retângulo podemos dizer que a área vale a metade do produto das medidas dos catetos, o que se pode concluir quanto ao valor do seno de 90°?

Mas o triângulo possui três alturas, cada uma dependendo do lado que considerarmos como base. Então, suponha que sejam conhecidos outros dois lados, AB e BC, por exemplo, e o ângulo formado por eles, $A\hat{B}C$, e verifique que a igualdade acima também se verifica para eles.

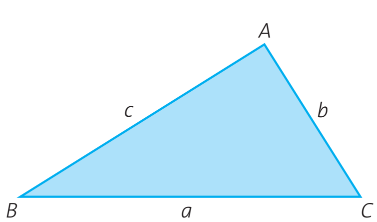
Isso nos permite afirmar que:

A área S de qualquer região triangular é igual à metade do produto das medidas de dois dos seus lados multiplicada pelo seno do ângulo formado por eles.

Fique atento!
Esta conclusão se estende aos triângulos obtusângulos, ou seja, aqueles que têm um dos ângulos maior que 90°.

Área da região triangular sendo conhecidos os três lados

Conhecidos os três lados (a, b e c) de um triângulo, a área da região triangular pode ser calculada pela fórmula de Heron.



Para refletir
O que significa semiperímetro de um polígono?

Sendo o semiperímetro $p = \dfrac{a + b + c}{2}$, é possível demonstrar que:

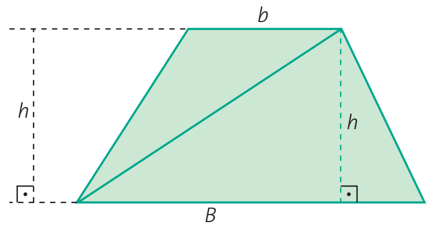
$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$ fórmula de Heron

Área da região limitada por um trapézio

Podemos decompor uma figura plana em regiões cujas áreas já sabemos calcular. A área dessa figura plana será a soma das áreas das regiões em que a figura foi decomposta.

Por exemplo, vamos decompor a área da região limitada por um trapézio traçando uma de suas diagonais.

Dividimos a região limitada por um trapézio em duas regiões triangulares: uma de base *B* e altura *h* e outra de base *b* e altura *h*.



Fique atento!
Trapézio é todo quadrilátero com um só par de lados paralelos (bases).

A área de uma região triangular você já aprendeu a calcular. Portanto, a área da região trapezoidal é dada por:

$$A = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Então:

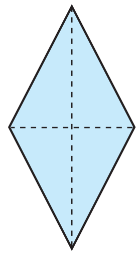
$$\boxed{A = \frac{(B+b)h}{2}} \text{ ou } \boxed{A = \frac{(\text{base maior } + \text{ base menor}) \cdot \text{altura}}{2}}$$

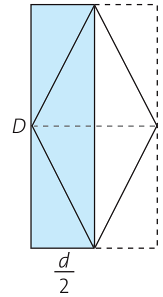
Dizemos que a área de uma região trapezoidal é igual à semissoma das medidas das bases vezes a medida da altura.

Área da região limitada por um losango

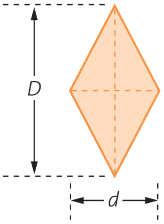
Todo losango é um paralelogramo, daí a área da região limitada por ele poder ser calculada como o produto da base pela altura. Entretanto, em geral, as dimensões de um losango são expressas pelas medidas de suas diagonais *D* e *d*.

Toda região limitada por um losango tem a mesma área de uma região retangular com altura *D* e base $\frac{d}{2}$, como mostram as figuras:





Fique atento!
Losango é todo quadrilátero que tem os quatro lados com medidas iguais.



Assim, a área da região limitada por um losango é dada pela metade do produto das medidas das diagonais. Veja:

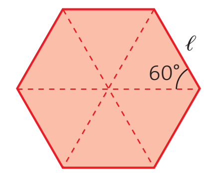
$$\boxed{A = D \cdot \frac{d}{2}} \text{ ou } \boxed{A = \frac{Dd}{2}} \text{ ou } \boxed{A = \frac{\text{diagonal maior} \cdot \text{diagonal menor}}{2}}$$

Fique atento!
Como todo quadrado é um losango, às vezes é conveniente calcular a área da região quadrada em função das suas diagonais, que têm a mesma medida. Nesse caso, a área da região quadrada é dada por $A = \frac{d^2}{2}$.

Área da região limitada por um hexágono regular

A região limitada por um hexágono regular é formada por seis regiões triangulares equiláteras. Como a área da região triangular equilátera é dada por:

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$



a área da região limitada por um hexágono regular é dada por:

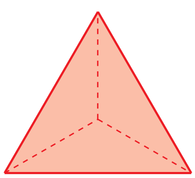
$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

ou seja:

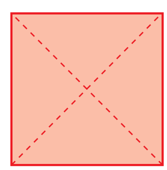
$$\boxed{A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}}$$

Área de uma região limitada por um polígono regular

Observe alguns exemplos de polígonos regulares nos contornos das regiões poligonais:

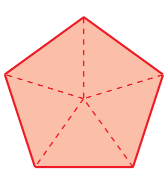


Triângulo equilátero
(polígono regular de três lados)

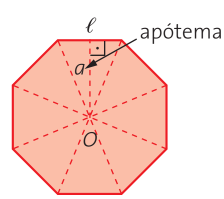


Quadrado
(polígono regular de quatro lados)

Fique atento!
Polígono regular é aquele que tem todos os lados e todos os ângulos internos congruentes. Ele pode sempre ser inscrito em uma circunferência.



Pentágono regular
(polígono regular de cinco lados)

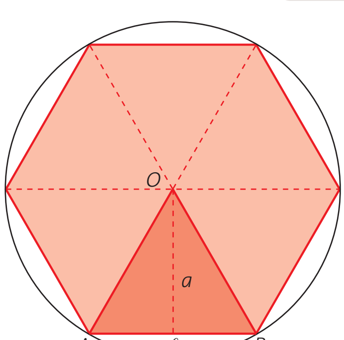


Octógono regular
(polígono regular de oito lados)

Pode-se perceber que, se o polígono regular tem n lados, a região limitada por ele pode ser decomposta em n regiões limitadas por triângulos isósceles. Em cada um desses triângulos, a base é o lado (ℓ) e a altura é o apótema (a) do polígono regular.

A área da região limitada por um polígono regular de n lados pode então ser escrita assim:

$$\boxed{A = n \cdot \frac{\ell a}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{A = \frac{n\ell}{2} \cdot a} \quad \text{ou} \quad \boxed{A = pa}$$



em que ℓ: lado
a: apótema
$n\ell$: perímetro ($2p$)
p: semiperímetro

Para refletir
No pentágono regular temos $A = \frac{5}{2}\ell a$ e no octógono regular temos $A = 4\ell a$.
Escreva no caderno a área de um decágono regular em função do lado e do apótema.

Exercícios resolvidos

Resolvido passo a passo

6. (Enem) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

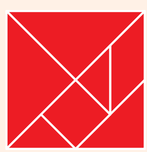


Figura 1

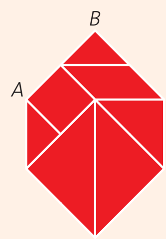


Figura 2


Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a:

a) 4 cm^2.
b) 8 cm^2.
c) 12 cm^2.
d) 14 cm^2.
e) 16 cm^2.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dado o esquema de um tangram e duas das formas que podem ser feitas com ele — um hexágono e uma casinha. Também é fornecido o comprimento de um dos lados do hexágono (2 cm).

b) O que se pede?

A área da casinha mostrada na figura 3.

2. Planejando a solução

Primeiramente, devemos perceber que, como a casinha foi feita usando-se todas as peças do tangram, a sua área equivale à área do quadrado da figura 1 e à área do hexágono da figura 2. Dessa forma, não precisamos calcular área por área de cada peça do tangram.

A seguir, devemos perceber que o segmento AB do hexágono coincide com metade da diagonal do quadrado da figura 1, pois ambos são formados pelo lado do quadrado e por um dos catetos do triângulo pequeno.

Assim, determinaremos a área do quadrado a partir de sua diagonal, e isso pode ser feito de duas formas:

1ª maneira:

A partir da diagonal, obtemos o lado (ℓ), e assim podemos usar a fórmula da área do quadrado ($A_{\text{quadrado}} = \ell^2$).

2ª maneira:

Lembrando que todo quadrado é um losango, podemos usar a fórmula da área do losango para obter a área do quadrado a partir de suas diagonais $\left(A_{\text{losango}} = \dfrac{D \cdot d}{2}\right)$.

3. Executando o que foi planejado

Se $AB = 2$ cm equivale à metade da diagonal do quadrado da figura 1, então a diagonal do quadrado mede 4 cm. A partir da diagonal do quadrado, de acordo com nossa estratégia, podemos obter a sua área de duas maneiras distintas:

1ª maneira:

A diagonal D do quadrado de lado ℓ é dada por $D = \ell \cdot \sqrt{2}$. Assim, temos:

$$4 = \ell \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \ell = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Não há necessidade de racionalizar esse resultado, pois ele foi calculado apenas para ser usado na fórmula da área do quadrado:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2 \Rightarrow A_{\text{quadrado}} = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{16}{2} = 8$$

2ª maneira:

As duas diagonais do quadrado são iguais; então, ambas medem 4 cm.

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A_{\text{losango}} = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Assim, a área do quadrado da figura 1 é 8 cm^2 e também a área da casinha da figura 3 (e do hexágono da figura 2).

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **b**.

5. Ampliando o problema

a) O hexágono da figura 2 é regular? Justifique.

b) Se a área do triângulo menor for A, qual é a área das demais peças (quadrado, paralelogramo, triângulo médio e os dois triângulos maiores)?

c) *Discussão em equipe*

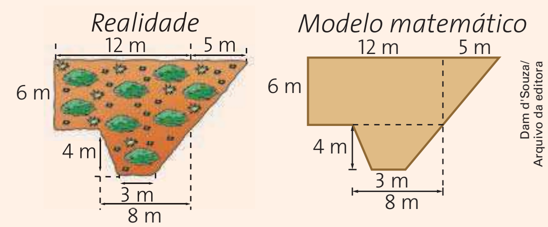
Conversem sobre a utilidade de jogos e brincadeiras, como o tangram, em sala de aula com o objetivo de ajudar o ensino de Matemática. Na opinião de vocês, essa prática é útil ou não?

d) *Pesquisa*

De que país é originário o tangram? Em que ano foi publicado o primeiro livro conhecido que menciona o tangram?

7. Determine a área do terreno plano ao lado usando as medidas dadas.

Resolução:



O terreno foi decomposto em três regiões: uma retangular, uma triangular e outra em forma de trapézio.

Como já sabemos calcular a área de cada uma delas, a soma das três nos dará a área do terreno.

$A_{\text{retângulo}} = 12 \cdot 6 = 72\ \text{m}^2$

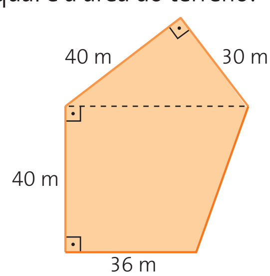
$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{5 \cdot 6}{2} = 15\ \text{m}^2$

$A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(8 + 3)4}{2} = 22\ \text{m}^2$

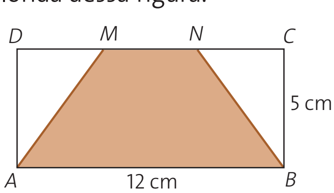
Área total $= 72\ \text{m}^2 + 15\ \text{m}^2 + 22\ \text{m}^2 = 109\ \text{m}^2$

Exercícios

13. Feito o levantamento de um terreno, foram determinados os dados indicados na figura abaixo. Nessas condições, qual é a área do terreno?



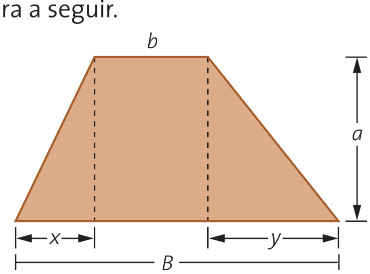
14. Na figura abaixo, $\overline{DM} = \overline{MN} = \overline{NC}$. Calcule a área da região colorida dessa figura.



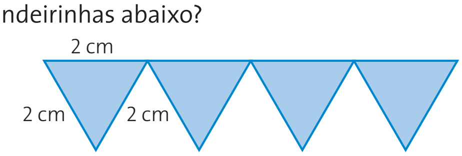
15. Um terreno tem a forma de um trapézio de bases 20 m e 14 m, e altura 11 m. Nesse terreno, construiu-se uma piscina retangular de 8 m por 5 m. No restante do terreno foram colocadas pedras mineiras. Qual foi a área onde se colocou pedra?

16. De uma placa de alumínio foi recortada uma região triangular equilátera de lado 20 cm. Qual é a área dessa região que foi recortada?

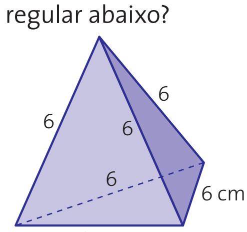
17. Mostre que a fórmula $A = \dfrac{(B + b)a}{2}$ pode ser obtida decompondo-se a região limitada pelo trapézio como na figura a seguir.



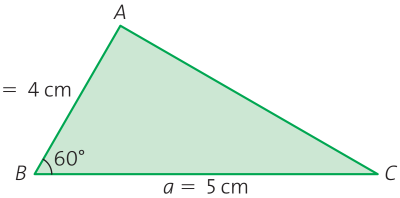
18. Qual é a área do material usado para fazer as quatro bandeirinhas abaixo?



19. Um tetraedro regular é um sólido formado por quatro triângulos equiláteros. Qual é a área total da superfície do tetraedro regular abaixo?



20. Determine a área da região triangular abaixo:



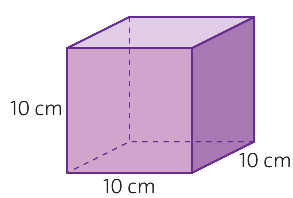
21. Em um triângulo *ABC*, dois lados medem 4 cm e formam um ângulo de 60°. Determine a área dessa região triangular.

22. Qual é a área da região limitada por um paralelogramo cujos lados medem 10 cm e 16 cm, sabendo que formam um ângulo de 30°?

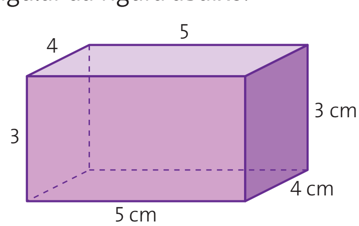
23. As diagonais de um paralelogramo medem 10 cm e 8 cm e formam um ângulo de 60°. Determine a área dessa região limitada pelo paralelogramo.

24. Um piso de cerâmica tem a forma hexagonal regular. O lado do piso mede 8 cm. Qual é a área desse piso?

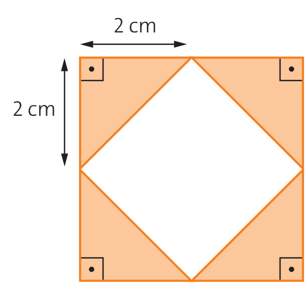
25. Um cubo é um sólido formado por 6 quadrados. Determine a área total da superfície do cubo da figura abaixo.



26. Um bloco retangular é um sólido formado por 6 retângulos. Determine a área total da superfície do bloco retangular da figura abaixo.



27. Qual é a área de toda a parte colorida da figura ao lado? Qual é a área da região não colorida?



28. Um terreno tem forma triangular e as medidas dos seus lados são 17 m, 15 m e 8 m. Qual é a área desse terreno?

29. DESAFIO EM DUPLA (Unicamp-SP) Alguns jornais calculam o número de pessoas presentes em atos públicos considerando que cada metro quadrado é ocupado por 4 pessoas. Qual a estimativa do número de pessoas presentes numa praça de 4 000 m^2 que tenha ficado lotada para um comício, segundo essa avaliação?

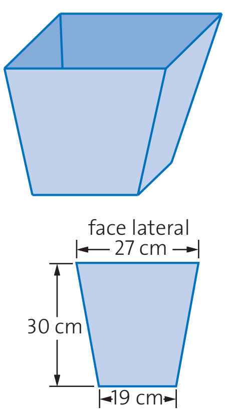
30. DESAFIO EM DUPLA *Geografia*
(PUC-SP) Um mapa é feito em uma escala de 1 cm para cada 200 km. O município onde se encontra a capital de certo estado está representado, nesse mapa, por um losango que tem um ângulo de 120° e cuja diagonal menor mede 0,2 cm. Determine a área desse município.

31. Uma região quadrada tem 8 cm de lado.

a) Se cada lado aumentar em 3 cm, a área aumentará em quantos centímetros quadrados?

b) Se cada lado aumentar em 20%, a área aumentará em quanto por cento?

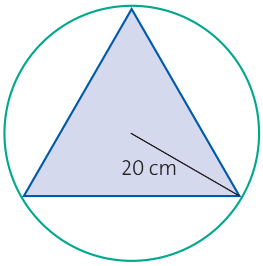
32. Uma cesta de lixo tem por faces laterais trapézios isósceles e por fundo um quadrado de 19 cm de lado. Desprezando a espessura da madeira, quantos metros quadrados de madeira foram necessários para fabricar essa cesta de lixo?



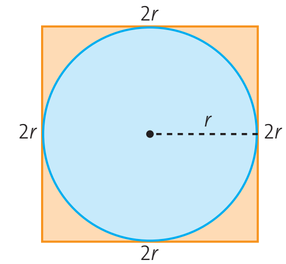
33. Calcule a área da região poligonal de uma cartolina limitada por um hexágono regular de lado 10 cm.

34. A figura abaixo mostra uma folha circular de zinco, de onde foi recortada a região triangular equilátera colorida. Calcule a área dessa região colorida.

$\left(\ell_3 = r\sqrt{3} \text{ e } a_3 = \dfrac{r}{2}\right)$

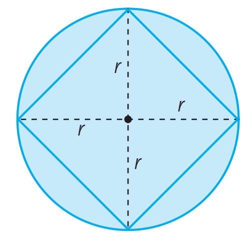


Área do círculo



Veja o círculo ao lado inscrito em um quadrado.
Medida do lado do quadrado: $2r$.
Área da região quadrada: $(2r)^2 = 4r^2$.
Então, a área do círculo com raio de medida r é menor do que $4r^2$.

Agora observe ao lado o mesmo círculo circunscrito a um quadrado.
O quadrado tem diagonais de medidas $2r$ e $2r$.
Como o quadrado é um caso particular de losango, a área da região quadrada pode ser obtida assim:



$$\frac{2r \cdot 2r}{2} = \frac{4r}{2} = 2r^2$$

Então, a área do círculo com raio de medida r é maior do que $2r^2$.
Assim, em um círculo com raio de medida r, a área A é tal que:

$$2r^2 < A < 4r^2$$

ou seja, a área A é obtida pelo produto de um número próximo de 3 (que veremos que é o π) por r^2.

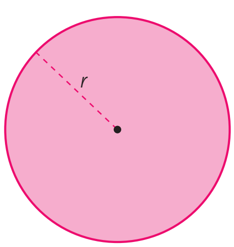
Determinação da área do círculo

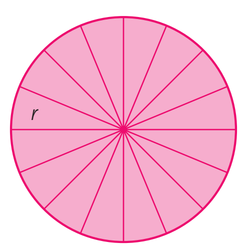
1ª maneira: usando círculo dividido em setores

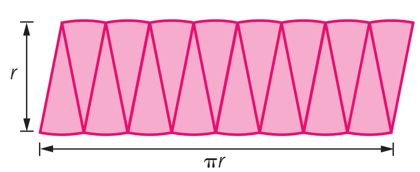
O círculo a seguir foi dividido em um número par de setores circulares que formaram uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo. Sua base mede a metade do comprimento da circunferência $\left(\frac{2\pi r}{2} = \pi r\right)$ e sua altura mede r.

A área dessa figura, que é também a área do círculo, é $A = (\pi r)r = \pi r^2$, isto é:

$$\boxed{A = \pi r^2}$$





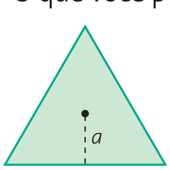


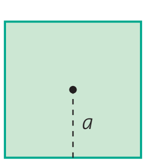
2ª maneira: usando polígonos regulares

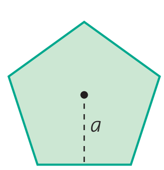
Já vimos que a área da região determinada por um polígono regular é dada por $A = \frac{aP}{2}$, em que a é a medida do apótema e P é o perímetro.

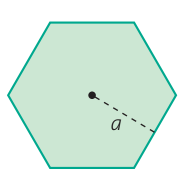
Analise esta sequência.

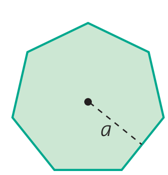
O que você pode perceber?

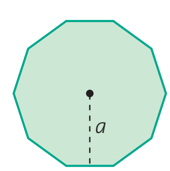
a) 

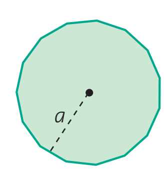
b) 

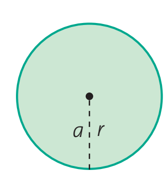
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

À medida que aumentamos suficientemente o número de lados dos polígonos regulares, a tendência é chegar ao círculo, no qual o apótema passa a ser o raio (r) e o perímetro passa a ser o comprimento da circunferência ($2\pi r$).

Assim, a área do círculo pode ser representada por:

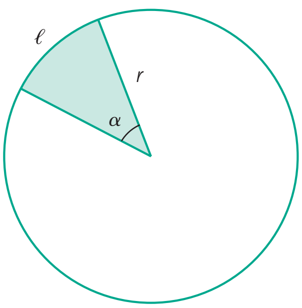
CONTEÚDO DIGITAL

$A = \dfrac{aP}{2} = \dfrac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2$, ou seja,

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

Área do setor circular

A parte pintada da figura é conhecida como setor circular de um círculo de raio r. Todo setor circular tem um arco correspondente (ℓ) e um ângulo (α).



O setor circular é uma fração do círculo, e sua área A é diretamente proporcional ao ângulo central α. Um semicírculo, por exemplo, é um setor circular cujo ângulo central é 180° (metade de 360°) e sua área é metade da área do círculo.

O comprimento ℓ do arco também é proporcional ao ângulo central α. Então, podemos escrever que:

$$\boxed{\frac{A_{setor}}{\pi r^2} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi} = \frac{\ell}{2\pi r}}$$

Dependendo da informação conhecida (α em graus, α em radianos, ou comprimento ℓ do arco) usamos as razões acima.

Exercícios resolvidos

8. Calcule quantas pessoas cabem, aproximadamente, em uma praça circular de 20 m de raio, considerando 5 pessoas por metro quadrado. (Use $\pi = 3{,}14$.)

Resolução:

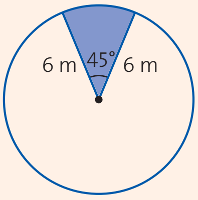
$A = \pi r^2$; $\pi = 3{,}14$; $r = 20$

$A = 20^2 \cdot 3{,}14 = 1256$ m^2

Número aproximado de pessoas: $1256 \cdot 5 = 6\,280$.

Assim, cabem aproximadamente 6 280 pessoas nessa praça.

9. Calcule a área do setor circular pintado ao lado.



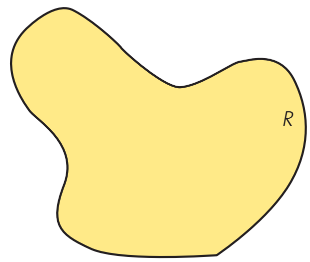
Resolução:

área do setor: $\dfrac{A_{setor}}{\pi \cdot 6^2} = \dfrac{45°}{360°} \Rightarrow A_{setor} = \dfrac{1}{8} \cdot \pi \cdot 36 = \dfrac{9\pi}{2}$

A área do setor circular pintado é $\dfrac{9\pi}{2}$ m^2.

Cálculo aproximado de áreas

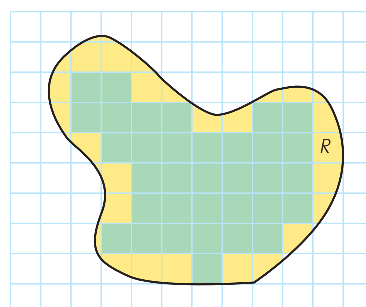
Você saberia calcular a área desta região *R*?



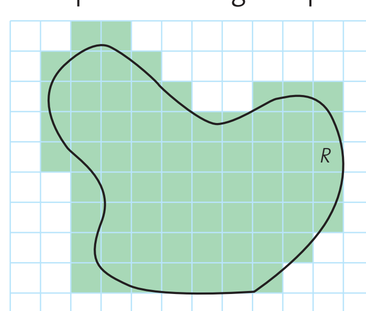
Que método podemos adotar para achar a área de regiões com formas parecidas com essa?

Para responder a essas perguntas usamos o seguinte procedimento:

Primeiramente decalcamos essa região em uma malha quadriculada e contamos o maior número possível de regiões quadradas inteiras que cabem dentro dela.



Em seguida, contamos o menor número possível de regiões quadradas inteiras que cobrem *R* totalmente:



Assim:

- cabem 34 regiões quadradas inteiras dentro da região *R*.

  Dizemos que a **área por falta** da região *R* é de 34 .

- 67 regiões quadradas inteiras cobrem a região *R*.

  Dizemos que a **área por excesso** da região *R* é de 67 .

Conseguiu descobrir qual é a área?

A área da região *R* é maior do que 34 e menor do que 67 .

Uma razoável aproximação para essa área é dada pela média aritmética dos dois valores encontrados:

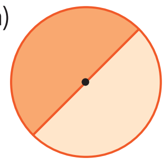
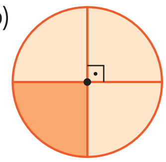
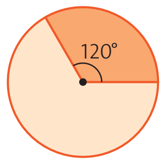
$$\text{área aproximada} = \frac{34 + 67}{2} = 50{,}5$$

Como a área da região quadrada da malha quadriculada é de $(0{,}5)^2\ \text{cm}^2 = 0{,}25\ \text{cm}^2$, então a área aproximada da região *R* é dada por $A \simeq 50{,}5 \cdot 0{,}25 = 12{,}63\ \text{cm}^2$.

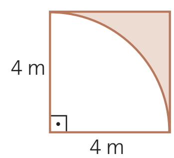
Exercícios

35. Tem-se um círculo de raio 10 cm. Determine:
a) o perímetro desse círculo;
b) a área desse círculo.

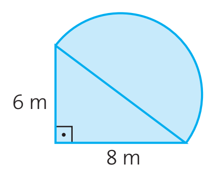
36. Determine a área dos setores circulares da figura abaixo. O raio de todos mede 6 cm.

a) 
b) 
c) 

37. Qual é a área da região colorida da figura ao lado?



38. Um terreno tem a forma da figura ao lado. Na figura estão registrados alguns dados do terreno, que nos permitem calcular a sua área. Calcule então a área desse terreno.

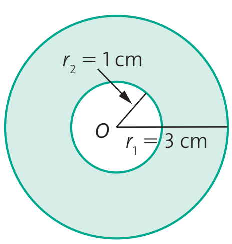


39. Um disco de cobre tem 20 cm de diâmetro. Qual é a área desse disco?

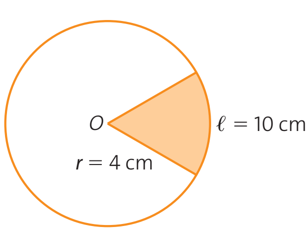
40. Determine a área do círculo inscrito a um triângulo equilátero de lado 12 cm.

41. Determine a área de um círculo circunscrito a um hexágono regular de lado 8 cm.

42. Quantos centímetros quadrados de alumínio são necessários para fazer uma arruela cujas dimensões estão na figura?

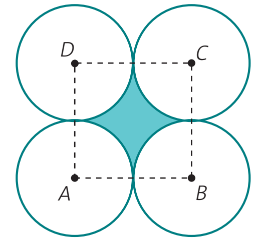


43. Calcule a área do setor circular da figura.



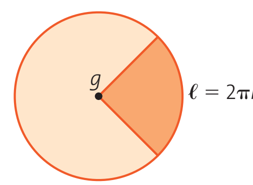
44. Dado um quadrado de lado 10 cm, qual é a área da coroa circular limitada pelas circunferências inscritas e circunscritas nesse quadrado?

45. O perímetro do quadrado *ABCD* da figura é 32 cm. Calcule a área da região colorida da figura.



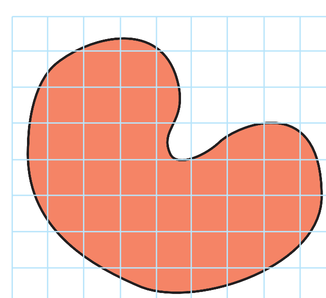
46. (Vunesp-SP) Certos registros históricos babilônicos indicam o uso de uma regra para o cálculo da área do círculo equivalente à fórmula (em notação atual) $A = \dfrac{C^2}{12}$ em que C representa o comprimento da circunferência correspondente. Determine o valor de π oculto nesses registros.

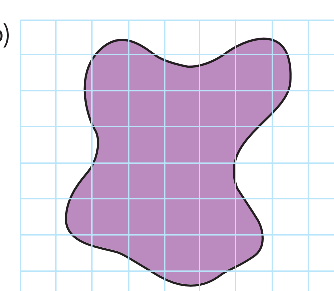
47. Calcule a área do setor circular da figura em função de g e r:



48. Releia o texto do início deste capítulo e calcule a área da superfície de cada um dos dois lagos; depois, determine a área maior.

49. Calcule a área aproximada de cada uma destas regiões.
Use o  como unidade de área.

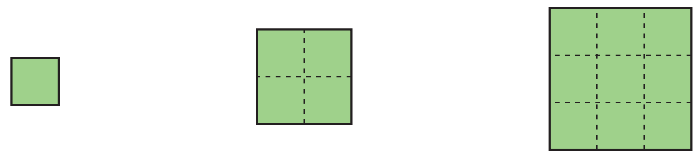
a) 

b) 

Razão de semelhança para áreas

Todos os quadrados são semelhantes entre si.

Considere três quadrados de lados x, $2x$ e $3x$:



Note que suas áreas são x^2, $4x^2$ e $9x^2$, respectivamente. Ou seja, a área não é proporcional ao lado, e sim proporcional ao quadrado do lado. Isso também pode ser explicado pelo princípio da proporcionalidade: se duas figuras geométricas forem semelhantes com razão de semelhança k entre suas **grandezas lineares**, então suas áreas terão razão de semelhança k^2:

> **Grandezas lineares**: grandezas que expressam comprimento, como a medida do lado de um quadrado, por exemplo.

$A(kx, ky) = kA(x, ky) = k^2A(x, y)$, seja qual for a área $A(x, y)$

Observação: Isso pode ser estendido a volumes de sólidos semelhantes, pois todo volume depende de três grandezas lineares. Portanto, em sólidos semelhantes, cujas grandezas lineares tenham razão de semelhança k, as áreas terão razão de semelhança k^2 e os volumes terão razão de semelhança k^3.

Exercícios resolvidos

10. A área de um triângulo retângulo é de 30 cm². A área de um triângulo retângulo semelhante ao primeiro é de 120 cm². Se a hipotenusa do primeiro triângulo mede 13 cm, quanto mede a hipotenusa do segundo triângulo?

Resolução:

A razão entre as hipotenusas é

$$k = \frac{\text{hipot}_2}{\text{hipot}_1} = \frac{x}{13}.$$

A razão entre as áreas é:

$$k^2 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{120}{30} = 4 \Rightarrow k = \sqrt{4} = 2$$

Então, $\frac{x}{13} = 2 \Rightarrow x = 26.$

Logo, a hipotenusa mede 26 cm.

11. A área de um dodecágono é de 10 cm². Qual é a área de um dodecágono semelhante ao primeiro cujo perímetro é o triplo do perímetro do primeiro?

Resolução:

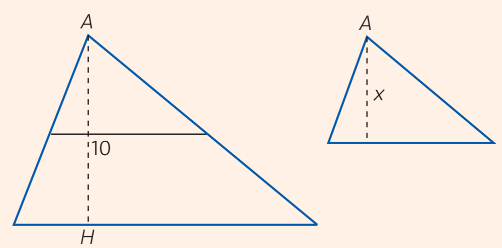
A razão entre os perímetros é $k = \frac{\text{perím}_2}{\text{perím}_1} = \frac{3}{1} = 3.$

A razão entre as áreas é:

$$k^2 = 3^2 = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow 9 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 90$$

Logo, a área do segundo dodecágono é de 90 cm².

12. Um triângulo escaleno de altura $AH = 10$ cm foi cortado perpendicularmente à sua altura AH, de forma que os dois pedaços resultantes tivessem a mesma área. A que distância do vértice A foi feito o corte?



Resolução:

Se os dois pedaços resultantes do corte (um triângulo e um trapézio) têm a mesma área, cada um deles tem metade da área do triângulo original. O triângulo menor é semelhante ao maior, pois o corte foi perpendicular à altura, portanto paralelo à base.

A razão entre as alturas é $k = \frac{\text{altura}_2}{\text{altura}_1} = \frac{x}{10}.$

A razão entre as áreas é:

$$k^2 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então:

$$\frac{x}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 5\sqrt{2} \simeq 7{,}1$$

Logo, o corte foi feito a aproximadamente 7,1 cm do vértice A.

Exercícios

50. (Unicamp-SP) Um fio de 48 cm de comprimento é cortado em duas partes para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro.

a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes dos fios?

b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

51. (FGV-SP) Uma pizzaria vende *pizzas* com preços proporcionais às suas áreas. Se a *pizza* média tiver raio igual a 80% do raio da grande, seu preço será:

a) 59% do preço da grande.

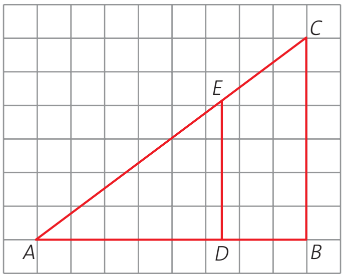
b) 64% do preço da grande.

c) 69% do preço da grande.

d) 74% do preço da grande.

e) 80% do preço da grande.

52. (Fuvest-SP) No papel quadriculado da figura a seguir, adota-se como unidade de comprimento o lado do quadrado hachurado. *DE* é paralelo a *BC*. Para que a área do triângulo *ADE* seja a metade da área do triângulo *ABC*, a medida de *AD*, na unidade adotada, é:



a) $4\sqrt{2}$.

b) 4.

c) $3\sqrt{3}$.

d) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

e) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

53. *Física*

(Faap-SP) Uma chapa de metal circular, com 1 m de raio, ficou exposta ao sol. Em consequência, sofreu uma dilatação de 1% na dimensão do raio. (Considere $\pi = 3{,}14$.) A área dessa chapa após a dilatação (em metros quadrados) é:

a) 3,14.

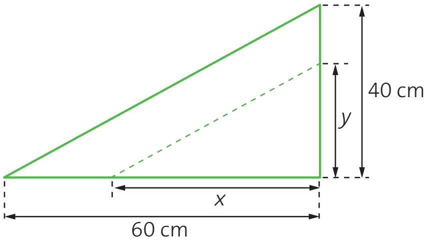
b) 3,32.

c) 3,10.

d) 3,20.

e) 3,45.

54. (FEI-SP) Uma chapa metálica de formato triangular (triângulo retângulo) tem inicialmente as medidas indicadas e deverá sofrer um corte reto (paralelo ao lado que corresponde à hipotenusa do triângulo) representado pela linha pontilhada, de modo que sua área seja reduzida à metade. Quais serão as novas medidas *x* e *y*?



a) $x = 30$ cm, $y = 20$ cm

b) $x = 40$ cm, $y = 30$ cm

c) $x = 30\sqrt{2}$ cm, $y = 20\sqrt{2}$ cm

d) $x = 20\sqrt{2}$ cm, $y = 30\sqrt{2}$ cm

e) $x = 90\sqrt{2}$ cm, $y = 60\sqrt{2}$ cm

55. (Udesc) Se o raio de um círculo aumenta 10%, então o seu perímetro e a sua área aumentarão respectivamente:

a) 10% e 10%.

b) 10% e 21%.

c) 21% e 21%.

d) 10% e 0%.

e) 0% e 10%.

56. (UFC-CE) A planta de um apartamento está confeccionada na escala 1 : 50. Então a área real, em metros quadrados, de uma sala retangular cujas medidas na planta são 12 cm e 14 cm é:

a) 24.

b) 26.

c) 28.

d) 42.

e) 54.

57. (Fazu-MG) Um agricultor leva 3 h para limpar um terreno circular de 5 m de raio. Se o raio do terreno fosse igual a 10 m, ele levaria:

a) 8 h.

b) 15 h.

c) 6 h.

d) 10 h.

e) 12 h.

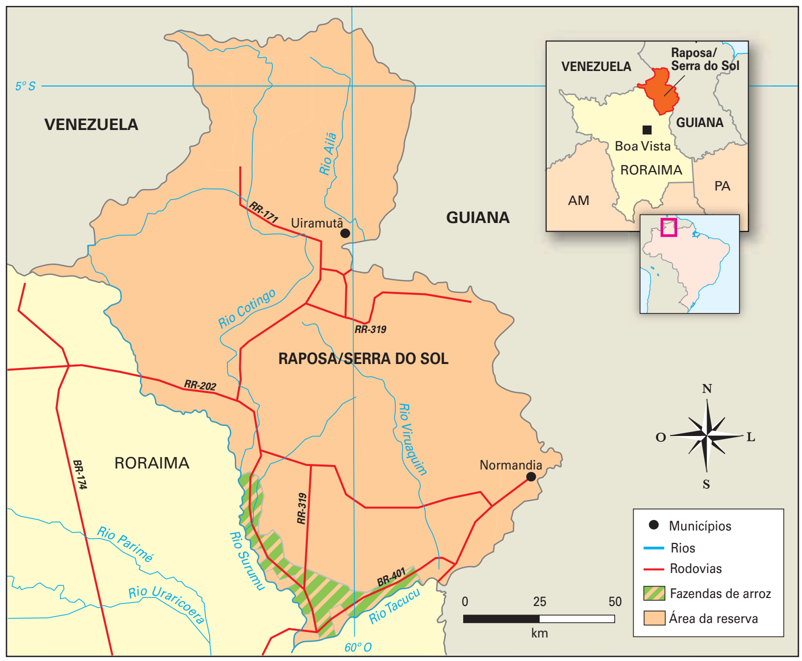
58. (Unicamp-SP) Em uma fotografia aérea, um trecho retilíneo de uma estrada que mede 12,5 km aparece medindo 5 cm e, na mesma fotografia, uma área queimada aparece com 9 cm^2. Calcule:

a) o comprimento que corresponde a 1 cm na mesma fotografia;

b) a área da superfície queimada.

Outros contextos

Conflito pela terra



Allmaps/Arquivo da editora

Adaptado de: Funai e IBGE, 2013.

Rizicultores: aqueles que cultivam arroz.

Com 1,7 milhão de hectares, a Terra Indígena Raposa Serra do Sol era alvo de disputa desde 1917, quando começou seu processo de identificação e demarcação. Em 2005, o decreto de demarcação foi homologado pela Presidência da República. Mas a retirada de não indígenas foi interrompida quando um grupo de **rizicultores** se recusou a sair. Em 2009, o STF decidiu que a reserva seria contínua e os arrozeiros teriam de deixá-la, mas os indígenas ou a Funai não podem impedir que a União entre nas terras para defender as fronteiras ou construir escolas e hospitais, entre outras condições. Em 2012, a luta desses indígenas ainda não havia acabado. Veja o histórico a seguir.

Histórico

Antes do século XX – A chegada dos colonizadores

No vale do rio Branco, na região de Roraima, onde hoje fica a capital, Boa Vista, no século XVIII, os portugueses encontraram indígenas Macuxi, uma das etnias residentes em Raposa Serra do Sol atualmente. Depois, os colonizadores passaram a arregimentar mão de obra indígena para extração vegetal.

1917 – Primeira delimitação

No dia 16 de outubro de 1917, o estado do Amazonas edita a Lei Estadual n. 941, que delimita as terras entre os rios Surumu e Cotingo para a ocupação e usufruto dos indígenas Macuxi e Jaricuna. A demarcação só se iniciou em 1919.

1984 – Aumento da reserva

Mais uma terra indígena é instituída. Mesmo sem ser conclusivo, o trabalho do grupo propõe o aumento da demarcação para 1,57 milhão de hectares depois de identificar cinco áreas contíguas: Xununuetamu, Surumu, Raposa, Maturuca e Serra do Sol.

2009 – Decisão histórica

O STF resolveu: a demarcação da reserva Raposa Serra do Sol deveria ser contínua, e os arrozeiros que ocupam a região teriam de deixá-la. Mas o tribunal estabeleceu 19 condições, sugeridas pelo ministro Carlos Alberto Menezes Direito, para a demarcação contínua da reserva, entre as quais: proibição de cobrança de pedágio, proibição de exploração de recursos hídricos, de potencial energético e garimpagem do subsolo.

2012 – A luta continua

A publicação no *Diário Oficial da União* (DOU) da Portaria n. 303 da Advocacia-Geral da União (AGU), em 17 de julho de 2012, gerou mobilizações para sua revogação. Essa portaria impede o usufruto de territórios tradicionais e permite a sobreposição militar, os empreendimentos hidrelétricos, minerais e viários, sem consultar os povos indígenas e a Fundação Nacional do Índio (Funai), e prevê ainda a revisão dos territórios já demarcados e homologados. Até outubro de 2012 os indígenas haviam conseguido impedir o avanço dessa portaria e lutavam por sua revogação total.

A Reserva Raposa Serra do Sol em números

- 19 mil indígenas, aproximadamente
- 1,7 milhão de hectares
- 12 vezes o tamanho da cidade de São Paulo
- 200 é o número aproximado de malocas indígenas
- 5 etnias convivem na região

Adaptado de: <www.estadao.com.br/especiais/a-disputa-pela-raposa-serra-do-sol,17895.htm>. Acesso em: 28 jan. 2013 e <www.ecoamazonia.org.br/?s=raposa+do+sol&x=ø&y=0>. Acesso em: 10 out. 2012.

Trabalhando com o texto

1. Com o auxílio de uma calculadora e tomando como base a Reserva Raposa Serra do Sol, descubra: Se fosse feita uma distribuição igualitária, cada indígena teria direito a quantos hectares? Quantos indígenas estariam ocupando uma área equivalente à cidade de São Paulo?

2. Sabe-se que um hectare tem medida equivalente a 10 000 m^2. Qual a área em m^2 da Reserva Raposa Serra do Sol? E em km^2?

Pesquisando e discutindo

3. Quantos indígenas vivem no Brasil atualmente e quanto representam da população brasileira? Qual é a área das reservas indígenas no Brasil atualmente e quanto representam do território nacional?

4. Pesquise a organização social, costumes, línguas, crenças e tradições dos indígenas no Brasil e apresente aos seus colegas.

Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações em jornais, revistas e nos *sites*:

- Funai: <www.funai.gov.br>;
- Portal de diálogo intercultural: <www.indiosonline.org.br>;
- Conselho de Missão entre Índios: <www.comin.org.br>. Acessos em: 10 dez. 2012.

CAPÍTULO 8

Geometria espacial de posição: uma abordagem intuitiva

A Geometria é aplicada em diversas áreas da atividade humana. Uma evidência muito forte desse uso é encontrada na arquitetura. Como projetar uma casa, um monumento ou um prédio sem o conhecimento das noções geométricas?

Principalmente em construções contemporâneas, a Geometria de posição é fundamental para viabilizar a elaboração de projetos estruturais cujas formas arquitetônicas situam-se entre o limite da Matemática e da Física.

Muitas vezes, *designs* (projetos) ousados conferem um ar futurista às construções, porém para elas serem viáveis é preciso que haja material adequado para a construção das formas projetadas.

Veja na fotografia o edifício do Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand (Masp), em São Paulo, SP. Ele foi projetado pela arquiteta Lina Bo Bardi, em 1957, e inaugurado em 1968, pela rainha Elizabeth II, do Reino Unido. Tem um dos maiores vãos livres de concreto do mundo, com 74 metros. Situado na avenida Paulista, tornou-se um dos mais importantes símbolos da cidade.

Masp, um dos pontos mais visitados por turistas na cidade de São Paulo, SP.

Delfim Martins/Pulsar Imagens

1 Geometria de posição no plano

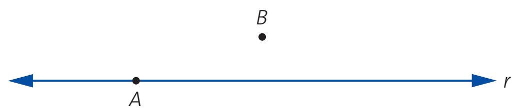
No estudo da Geometria é comum, e adequado, usar objetos do cotidiano como modelos aproximados para os conceitos geométricos. Por exemplo, para a ideia de ponto, costumamos pensar em uma marca de giz na lousa ou em um ponto-final. Para a ideia de reta, costumamos usar um fio de barbante esticado. Para a ideia de plano, costumamos usar uma folha de papel ou tampo de mesa.

» A marca de giz na lousa ou o ponto-final no caderno têm dimensões (embora sejam pequenas), enquanto o ponto geométrico não tem dimensões. Formem trios e reflitam sobre as limitações físicas do lápis como modelo de reta e da folha de papel como modelo de plano.

No Ensino Fundamental é feito o estudo das posições relativas de pontos e retas de um mesmo plano (Geometria de posição no plano).

Por exemplo:

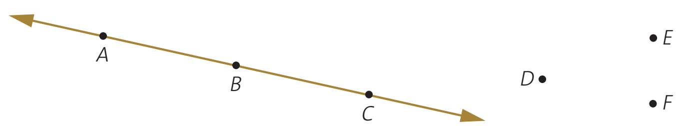
- **Relação entre um ponto e uma reta**



O ponto *A* pertence à reta *r*.

O ponto *B* não pertence à reta *r*.

- **Relação entre pontos**

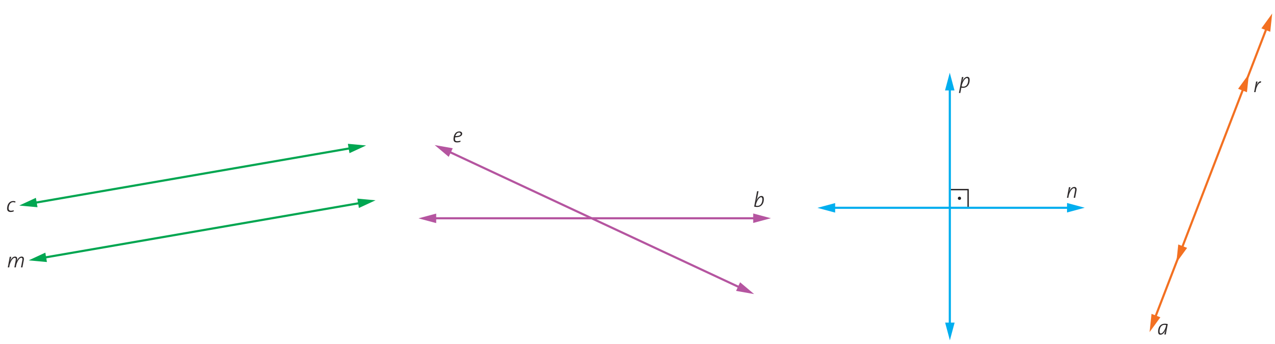


Fique atento!
Dois pontos são sempre colineares.

Os pontos *A*, *B* e *C* são **colineares** (existe uma reta que passa pelos três).

Os pontos *D*, *E* e *F* não são colineares (não existe reta que passa pelos três simultaneamente).

- **Relação entre duas retas de um plano**



As retas *c* e *m* são distintas e paralelas.

As retas *b* e *e* são concorrentes e oblíquas.

As retas *p* e *n* são concorrentes e perpendiculares.

As retas *a* e *r* são coincidentes (paralelas iguais).

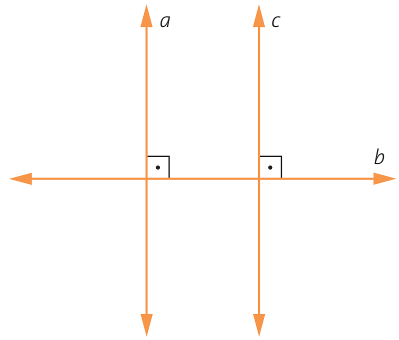
Fique atento!
Ao se considerar a reta um conjunto infinito de pontos, o termo ideal seria **paralelas iguais**, já que dois conjuntos com os mesmos elementos são ditos **iguais**.

Agora, no Ensino Médio, será feito o estudo das posições relativas de pontos, retas e planos no espaço (Geometria de posição espacial).

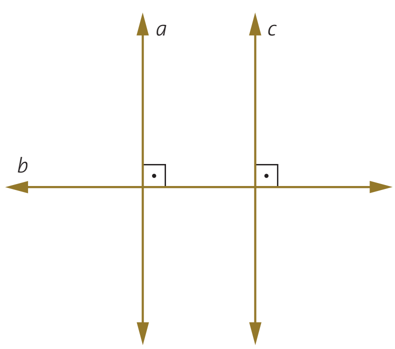
Com isso, surgirão novas relações, como entre reta e plano ou entre dois planos. Veremos também que algumas relações estudadas no plano terão um enfoque diferente quando estudadas no espaço, como no exemplo seguinte.

Dadas as retas distintas *a*, *b* e *c*:

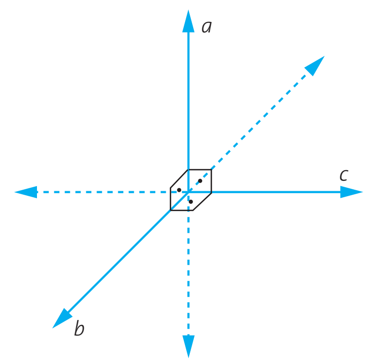
- No plano: se *a* é perpendicular a *b*, e *c* é perpendicular a *b*, então *a* é paralela a *c*.



- No espaço: se *a* é perpendicular a *b*, e *c* é perpendicular a *b*, então *a* pode ser paralela a *c* ou não.



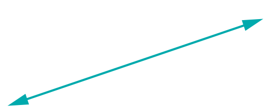
ou



Neste capítulo, o estudo da Geometria de posição no espaço será feito de maneira intuitiva, apoiado essencialmente na observação de modelos, figuras e objetos.

Observe como as figuras serão representadas:

ponto (*A*, *B*, *C*, ...).



reta (*r*, *s*, *p*, ...).

plano (α, β, γ, ...).

Você já deve ter notado que conceitos como ponto, reta, plano e espaço nunca foram definidos porque são intuitivos, estão em nossa mente de forma natural e os distinguimos espontaneamente. Basta observar que tanto reta como plano e espaço são considerados conjuntos infinitos de pontos, sem que seja necessário dizer como são dispostos.

Os conceitos primitivos são os elementos iniciais da teoria que vamos desenvolver agora. Outros conceitos serão definidos a partir deles, e as propriedades da Geometria resultarão de suas relações.

No início, algumas afirmações serão admitidas sem que seja necessário demonstrá-las — elas se chamam **axiomas** ou **postulados** — e as conclusões que puderem ser tiradas a partir delas serão os **teoremas**, que só são aceitos mediante uma demonstração, uma argumentação lógica.

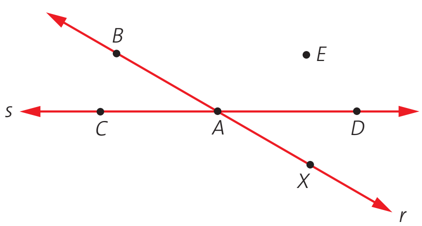
> **Fique atento!**
> Para sua melhor compreensão e identificação, neste capítulo os enunciados considerados axiomas ou postulados estarão indicados com fundo azul ; os teoremas, indicados com fundo laranja ; e as definições, indicadas com fundo rosa .
>
> Além disso, como se trata de um enfoque intuitivo da Geometria espacial, os teoremas não serão demonstrados ao longo do capítulo. Apenas no final faremos algumas demonstrações a título de ilustração.
> Usaremos a simbologia da teoria dos conjuntos vista no capítulo 1 do volume 1.

2 Posições relativas: ponto e reta; ponto e plano

Como ponto é elemento da reta e do plano, dizemos que ele pertence ou não a eles. Assim:

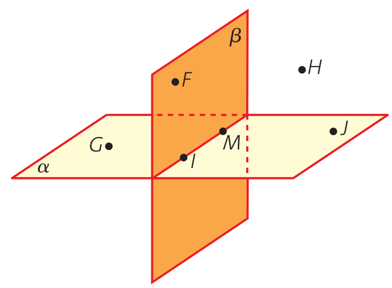
- dados um ponto P e uma reta r, temos $P \in r$ ou $P \notin r$.
- dados um ponto P e um plano α, temos $P \in \alpha$ ou $P \notin \alpha$.

Veja alguns exemplos:



B pertence a *r*
B não pertence a *s*
E não pertence a *r*
E não pertence a *s*

Para refletir
Qual é a posição do ponto X em relação às retas r e s? E dos pontos M e G em relação aos planos α e β?



F pertence a β
F não pertence a α
H não pertence a α
H não pertence a β

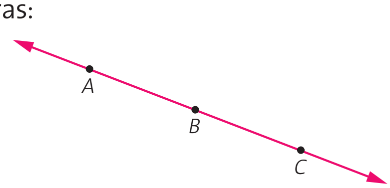
3 Posições relativas de pontos no espaço

Dados dois ou mais pontos no espaço:

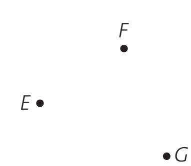
- eles são ou não pontos **colineares** (existe ou não uma reta que passa por todos eles);
- eles são ou não pontos **coplanares** (existe ou não um plano que passa por todos eles).

Fique atento!
Dada uma reta no espaço, existem pontos na reta e fora dela; dado um plano no espaço, existem pontos no plano e fora dele.

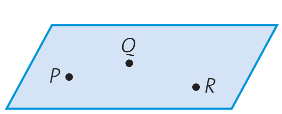
Veja as figuras:



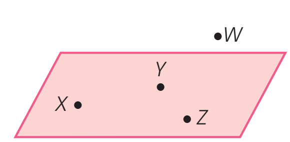
A, *B* e *C* são pontos colineares.



E, *F* e *G* não são colineares.



P, *Q* e *R* são três pontos coplanares.



X, *Y*, *Z* e *W* são pontos não coplanares.

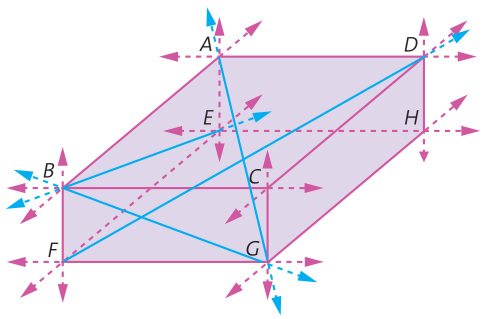
Observações:

1ª) Dois pontos distintos são sempre colineares e sobre eles passa uma única reta. Dizemos então que dois pontos distintos A e B determinam uma reta ($\overleftrightarrow{AB}$).

2ª) Três pontos não colineares são sempre coplanares e sobre eles passa um único plano. Dizemos então que três pontos não colineares A, B e C determinam um plano $p(A, B \text{ e } C)$.

4 Posições relativas de duas retas no espaço

Observe a figura na qual temos um paralelepípedo:



Para refletir

Em cada plano há infinitas retas. No plano da face *ABCD*, por exemplo, além das retas indicadas temos $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e outras.

No espaço há infinitas retas. Localize na figura dada as retas $\overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{DF}$.

São 12 as arestas do paralelepípedo: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$.
São 6 as suas faces, determinadas por: *ABCD*, *FGHE*, *CDHG*, *BFGC*, *ADHE* e *ABFE*.

Nesse modelo:

- As arestas serão "representações" das retas que as contêm.
  Por exemplo:
  $\overleftrightarrow{AB}$: reta do espaço que contém a aresta $\overline{AB}$.
  $\overleftrightarrow{BC}$: reta do espaço que contém a aresta $\overline{BC}$.
- As faces serão "representações" dos planos que as contêm.
  Por exemplo:
  p(*ABCD*): plano do espaço que contém a face determinada por *ABCD*.
  p(*BFGC*): plano do espaço que contém a face determinada por *BFGC*.
- Os vértices serão representações dos pontos do espaço: *A*, *B*, *C*, etc.

Para refletir

No espaço há infinitos planos. Além dos 6 planos determinados pelas faces do paralelepípedo, procure imaginar outros, como *p*(*ADGF*), *p*(*ABGH*), *p*(*AEGC*), etc.

Usando esse modelo, podemos estudar as posições relativas de retas distintas no espaço:

Duas ou mais retas são coplanares quando existe um plano que contém todas elas.

Fique atento!
$\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são retas coplanares. $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ não são retas coplanares.

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DA}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são retas coplanares porque o plano *p*(*ABCD*) as contém. Também são retas coplanares as retas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ porque o plano *p*(*AEHD*) contém essas três retas.

Observe que as retas coplanares $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ não têm ponto comum. O mesmo acontece com as retas coplanares $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.

Retas coplanares que não têm ponto comum são chamadas **retas paralelas distintas**.

Para refletir
$\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são retas paralelas. Justifique.

Outros pares de retas paralelas distintas são: $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{DH}$, etc.

O par de retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ tem um único ponto comum, isto é, as retas intersectam-se em um ponto. O mesmo acontece com $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

Retas que têm um único ponto comum são chamadas **retas concorrentes**.

Para refletir
$\overleftrightarrow{CH}$ e $\overleftrightarrow{GD}$ são retas concorrentes. Justifique.

Outros pares de retas concorrentes são: $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{DH}$, etc.

Duas retas concorrentes são sempre coplanares.

Dadas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, não existe um plano que contém as duas; o mesmo ocorre com os pares de retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ e outros.

Dadas duas retas, quando não existe um plano que contém as duas, elas são chamadas **retas reversas** (ou não coplanares).

Para refletir
$\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são retas reversas. Justifique.

Quadro-resumo:

Posições relativas de duas retas no espaço

$$\text{Duas retas no espaço}\begin{cases}\text{distintas}\begin{cases}\text{coplanares}\begin{cases}\text{paralelas}\\ \text{concorrentes}\end{cases}\\ \text{reversas}\end{cases}\\ \text{coincidentes (paralelas iguais)}\end{cases}$$

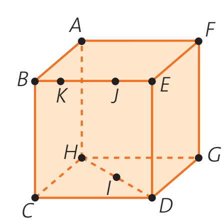
Para refletir
Considere o "encontro" de duas paredes como representação de uma reta.
Localize na sua sala duas retas paralelas, duas retas concorrentes e duas retas reversas.

Observação: No espaço, o fato de duas retas não serem paralelas não significa necessariamente que elas sejam concorrentes, como acontece no plano. Duas retas reversas, por exemplo, não são paralelas nem concorrentes.

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

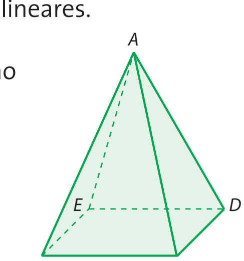
1. Observe os pontos de *A* a *K* nos vértices, arestas e faces do cubo ao lado.
Verifique se os pontos indicados em cada item são ou não colineares e coplanares.



a) *A* e *D*
b) *A*, *F* e *E*
c) *H*, *I* e *D*
d) *B*, *C* e *D*
e) *E*, *J* e *K*
f) *B*, *E*, *K* e *J*
g) *C*, *H*, *F* e *E*
h) *B*, *C*, *H* e *I*
i) *H*, *D*, *I* e *E*

2. Considere que os pontos, as retas e os planos citados são distintos e verifique se cada afirmação é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**):
a) Por 2 pontos passa uma única reta.
b) 3 pontos são sempre colineares.
c) 3 pontos nunca são colineares.
d) 3 pontos podem ser colineares.
e) Existem 5 pontos coplanares.
f) Existem 5 pontos não coplanares.
g) Existem 3 pontos não coplanares.
h) Pontos colineares são coplanares.
i) Pontos coplanares são colineares.
j) Pontos coplanares podem ser colineares.

3. Observe a pirâmide de base quadrada e verifique se as retas indicadas em cada item são paralelas, concorrentes ou reversas.



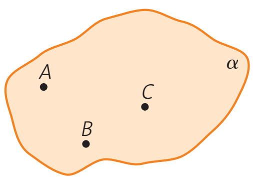
a) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$
b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{ED}$
c) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{ED}$
d) $\overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$
e) $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{AE}$
f) $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{BE}$
g) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AE}$
h) $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AC}$
i) $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$

5 Determinação de um plano

Já vimos que: Quando temos três pontos não colineares, existe um único plano que passa pelos três.

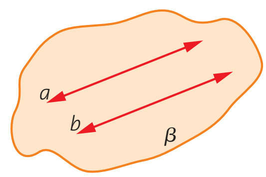
Isso equivale a dizer que: Três pontos não colineares determinam um plano.

O mesmo ocorre quando temos **duas retas paralelas distintas**, **duas retas concorrentes** ou **uma reta e um ponto que não pertence a ela**.



α: $p(A, B, C)$

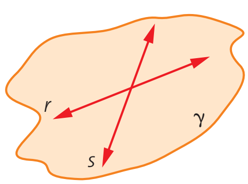
Três pontos não colineares determinam um plano.



β: $p(a, b)$

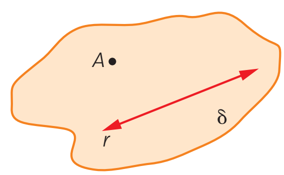
Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

Para refletir
Por que não podemos dizer que três pontos colineares determinam um plano?



γ: $p(r, s)$

Duas retas concorrentes determinam um plano.



δ: $p(A, r)$

Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.

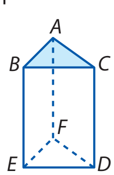
Para refletir
Por que duas retas reversas não determinam um plano?

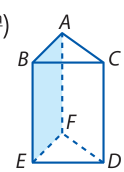
Quadro-resumo:

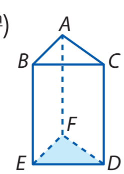
$$\text{Um plano fica determinado por} \begin{cases} \text{3 pontos não colineares} \\ \text{2 retas paralelas distintas} \\ \text{2 retas concorrentes} \\ \text{1 reta e 1 ponto fora dela} \end{cases}$$

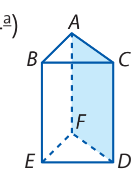
Exercício

4. Observe as figuras e considere:
α: plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{ED}$ e o ponto $F \notin \overleftrightarrow{ED}$
β: plano determinado pelas retas paralelas $\overleftrightarrow{AF}$ e $\overleftrightarrow{CD}$
γ: plano determinado pelas retas concorrentes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$
δ: plano determinado pelos pontos não colineares B, A e E

1ª)


2ª)


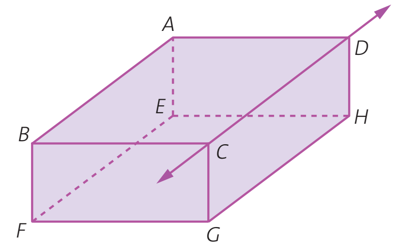
3ª)


4ª)


Identifique em cada figura (1ª, 2ª, 3ª e 4ª) qual é o plano correspondente à face pintada (α, β, γ ou δ).

6 Posições relativas de dois planos no espaço

Observe o paralelepípedo:



Como vimos, as faces representam os planos que as contêm. Alguns desses planos têm pontos comuns, outros não.

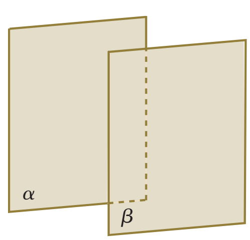
Por exemplo, $p(ABCD)$ e $p(EFGH)$ não têm ponto comum; $p(ABCD)$ e $p(CDHG)$ têm todos os pontos da reta CD comuns.

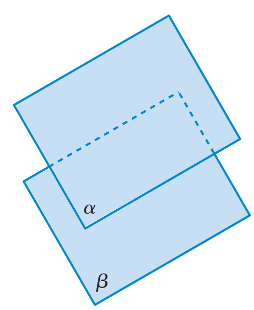
Dois planos que não têm pontos comuns são chamados **planos paralelos distintos**.

$$p(ABCD) \,/\!/\, p(EFGH)$$
$$p(ADHE) \,/\!/\, p(BCGF)$$

Podemos representar dois planos α e β distintos e paralelos do seguinte modo:

$\alpha \neq \beta$
$\alpha \,/\!/\, \beta$
$\alpha \cap \beta = \varnothing$





Fique atento!
Dados dois planos distintos, ou eles não têm ponto comum ou têm uma única reta comum.
Não existem dois planos, por exemplo, com um único ponto comum.

Observação: Se dois planos têm todos os pontos comuns, dizemos que eles são coincidentes (paralelos e iguais).

Dois planos distintos que têm uma reta comum são chamados **planos secantes** (ou concorrentes).

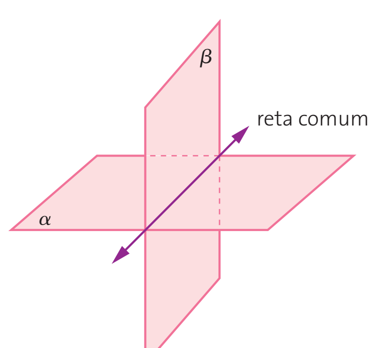
Essa reta comum é a **intersecção** dos dois planos. Ou seja:

$p(ABCD)$ e $p(CDHG)$ são secantes e a reta intersecção deles é $\overleftrightarrow{CD}$.

$p(EFGH)$ e $p(ABFE)$ são secantes e a intersecção deles é a reta EF.

Intersecção: o que é comum (ou seja, existe simultaneamente) a dois ou mais conjuntos, nesse caso, planos.

Podemos representar dois planos α e β secantes assim:



Você sabia?
Diversas situações ou objetos da vida real podem representar a intersecção de dois planos, por exemplo, um porta-revistas.

Jupiter Images/ Agência France-Presse

Quadro-resumo:

Posições relativas de dois planos no espaço

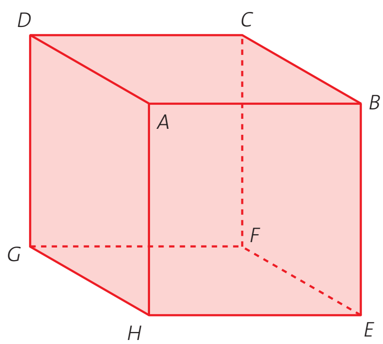
$$\text{Dois planos no espaço}\begin{cases}\text{distintos}\begin{cases}\text{paralelos}\\ \text{secantes ou concorrentes}\end{cases}\\ \\ \text{coincidentes (paralelos iguais)}\end{cases}$$

Observação: Estamos considerando duas retas coincidentes como retas paralelas iguais, e dois planos coincidentes como planos paralelos iguais. Devemos por isso ficar atentos a afirmações que envolvem retas ou planos paralelos. Por exemplo:

- a afirmação “se α e β são planos paralelos, então $\alpha \cap \beta = \varnothing$” é falsa;
- a afirmação “se α e β são planos paralelos e distintos, então $\alpha \cap \beta = \varnothing$” é verdadeira.

Exercícios

5. Observando o cubo da figura seguinte, responda:



a) Dos planos determinados pelas faces, quais são os pares de planos distintos e paralelos?

b) Cite três pares de planos secantes.

c) Os planos determinados pelas faces *CDGF* e *EFGH* são secantes? Em caso afirmativo, qual é a reta intersecção?

d) A reta *AD* é intersecção dos planos determinados por quais faces?

6. Verifique se são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações:

a) Se r e s são retas tais que $r \cap s = \varnothing$, então r e s são paralelas.

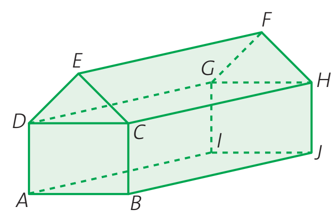
b) Se α e β são dois planos distintos e r é a reta tal que $\alpha \cap \beta = r$, então α e β são concorrentes.

c) Uma reta e um ponto determinam um plano.

d) Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.

e) Dois planos podem ter um único ponto comum.

7. Observando a figura espacial a seguir responda usando planos determinados por faces:



a) Qual é a posição relativa dos planos determinados pelas faces *EFHC* e *DEFG*?

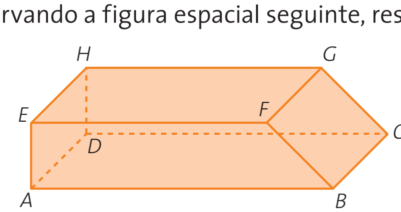
b) A reta *AI* é intersecção de quais planos?

c) Qual é o plano paralelo ao determinado pela face *ADGI*?

d) Qual é a reta de intersecção dos planos secantes determinados por *BCHJ* e *ECHF*?

e) Há algum plano paralelo ao plano determinado pela face *ABJI*? Em caso afirmativo, qual é esse plano?

8. Observando a figura espacial seguinte, responda:



a) Qual é a posição relativa dos planos determinados pelas faces *ABCD* e *ADHE*?

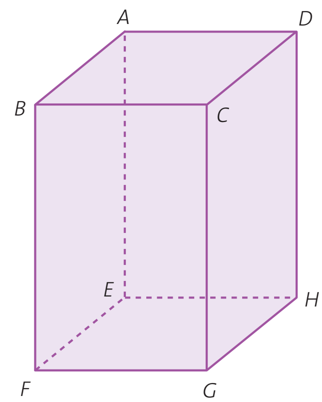
b) Os planos *BCGF* e *EFGH* são secantes? Em caso afirmativo, qual é a reta de intersecção?

c) Há algum plano paralelo e distinto do plano determinado por *EFGH*? Qual?

7 Posições relativas de uma reta e um plano

CONTEÚDO DIGITAL

Considerando o paralelepípedo da figura a seguir, observamos que:



Fique atento!

$\overleftrightarrow{BD}$ está contido no $p(ABCD)$

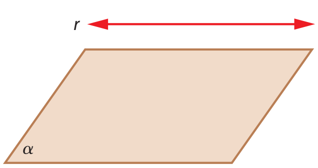
$\overleftrightarrow{AG}$ intersecta $p(EFGH)$

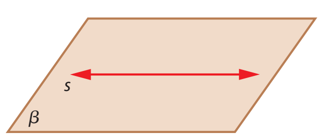
$\overleftrightarrow{AF} \cap p(CDHG) = \varnothing$

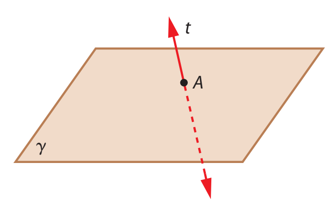
$\overleftrightarrow{DF}$ intersecta $p(ACGE)$

- o plano determinado pela face *EFGH* contém as retas $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{EF}$;
- as retas $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ intersectam o plano determinado pela face *EFGH*, "furando-o";
- as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são paralelas ao plano determinado pela face *EFGH*.

Estas são as três posições possíveis, no espaço, de uma reta em relação a um plano:







A reta r é paralela ao plano α (r e α não têm ponto comum, ou seja, $r \cap \alpha = \varnothing$).

A reta s está contida no plano β (β e s têm em comum todos os pontos de s, ou seja, $s \cap \beta = s$).

A reta t intersecta ("fura") o plano γ no ponto A. Então, a reta t é secante (ou concorrente) ao plano γ. O ponto A é chamado traço de t em γ. Temos $t \cap \gamma = \{A\}$.

Quadro-resumo:

Posições relativas de uma reta e um plano no espaço

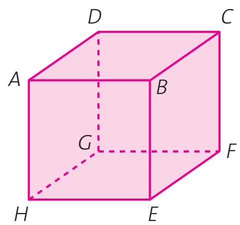
Uma reta r e um plano α no espaço $\begin{cases} r \text{ é paralela a } \alpha \\ r \text{ está contida em } \alpha \\ r \text{ é secante a } \alpha \end{cases}$

Para refletir

Use o lápis e a capa do livro para representar uma reta e um plano. Verifique as três posições possíveis da reta em relação ao plano.

Exercícios

9. Observando o cubo, cite:

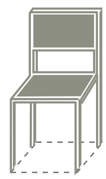


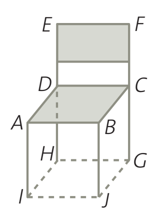
a) cinco retas paralelas ao plano determinado pela face *ADGH*;

b) cinco retas que estejam contidas no plano determinado pela face *CDGF*;

c) cinco retas secantes ao plano determinado pela face *ABCD*.

10. Observando a figura a seguir e sua representação matemática, verifique se a reta está contida, se é paralela ou é secante ao plano em cada item.





a) $\overleftrightarrow{EF}$ e $p(IJGH)$

b) $\overleftrightarrow{DE}$ e $p(EFGH)$

c) $\overleftrightarrow{HI}$ e $p(EFCD)$

d) $\overleftrightarrow{GH}$ e $p(EFCD)$

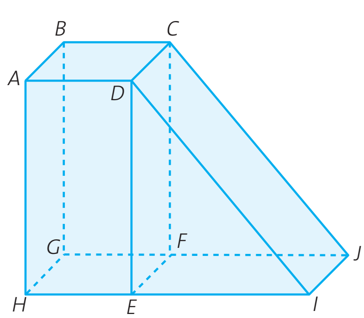
e) $\overleftrightarrow{BD}$ e $p(HIJG)$

f) $\overleftrightarrow{HJ}$ e $p(\overleftrightarrow{IJ}, G)$

g) $\overleftrightarrow{IC}$ e $p(\overleftrightarrow{ED}, \overleftrightarrow{CF})$

h) $\overleftrightarrow{EC}$ e $p(\overleftrightarrow{DG}, \overleftrightarrow{CH})$

11. Na figura dada, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* são os vértices de um paralelepípedo e *C*, *D*, *E*, *F*, *J* e *I* são vértices de um prisma reto de base triangular.



Dê a posição relativa dos pares de figuras em cada item.

a) $\overleftrightarrow{DE}$ e $p(EFGH)$

b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GF}$

c) $p(A, D, H)$ e $p(\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CJ})$

d) D e $p(A, \overleftrightarrow{HI})$

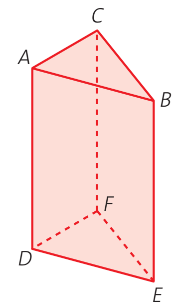
e) $\overleftrightarrow{AC}$ e $p(A, B, D)$

f) $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{IJ}$

g) $p(CDIJ)$ e $p(EFCD)$

h) $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{ID}$

12. Considere a figura espacial a seguir, chamada prisma reto de base triangular, e os pontos, planos e retas determinados por seus vértices, arestas e faces.



a) Qual é a posição da reta *AB* em relação ao plano determinado pela face *EFD*?

b) Qual é a posição da reta *AB* em relação ao plano determinado pela face *ABC*?

c) Qual é a posição da reta *AB* em relação ao plano determinado pela face *ACFD*?

d) Cite duas retas, nessa figura, que estejam "furando" o mesmo plano. Quais são as retas e qual é o plano?

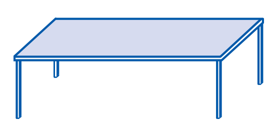
e) A reta *DF* está contida simultaneamente em dois planos. Quais são esses planos?

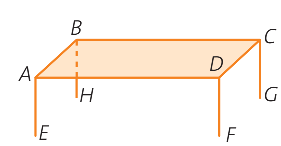
f) Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{FE}$?

g) Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{DF}$ e $\overleftrightarrow{EF}$?

h) Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{CF}$ e $\overleftrightarrow{DE}$?

13. Observe a figura seguinte e sua representação matemática:





a) Qual é a posição da reta *AB* em relação ao plano determinado por *ABCD*?

b) Cite duas retas que estejam "furando" o plano determinado por *ABCD*.

c) A reta *CD* é a intersecção de infinitos planos. Cite dois desses planos.

d) Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BH}$?

e) Cite uma reta que seja reversa à reta *AD*.

f) Cite um plano paralelo ao plano determinado por *ABCD*.

g) A reta *DF* está simultaneamente em vários planos. Cite dois desses planos.

h) Cite duas retas paralelas ao plano determinado por *ABCD*.

8 Paralelismo no espaço

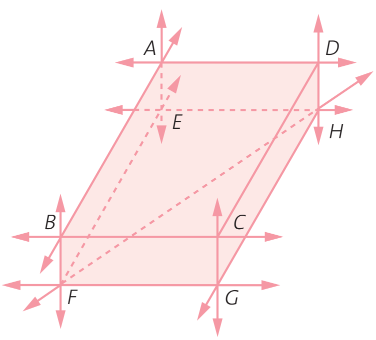
Retomando o que vimos até agora sobre paralelismo no espaço, temos:

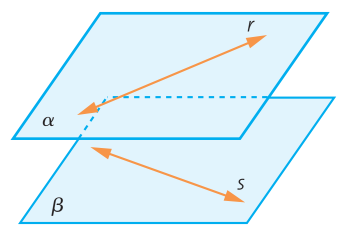
- Duas retas distintas são paralelas quando, e somente quando, são coplanares e não têm ponto comum.
- Dois planos distintos são paralelos quando, e somente quando, não têm ponto comum.
- Uma reta e um plano que não a contenha são paralelos quando, e somente quando, não têm ponto comum.

É preciso estar atento a certos fatos relativos ao paralelismo. Veja alguns:

1º) Podemos ter, em dois planos paralelos, retas que não sejam paralelas.

Por exemplo, no paralelepípedo a seguir os planos *ABCD* e *EFGH* são paralelos; entretanto, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ pertencentes a eles não são paralelas e sim reversas. Veja:



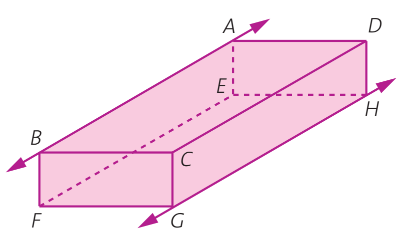


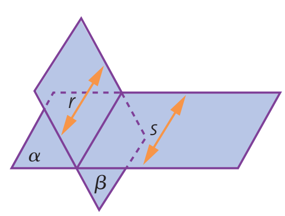
$\alpha \parallel \beta$, r está em α
s está em β
r e s não são paralelas
r e s são reversas

Para refletir
- Que posições relativas podem ter duas retas distintas que não são paralelas?
- O que acontece com dois planos distintos quando não são paralelos?
- Que posições relativas podem ter uma reta e um plano quando não são paralelos?

2º) Podemos ter retas paralelas contidas em dois planos que não sejam paralelos.

Por exemplo, no paralelepípedo abaixo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são paralelas. A reta *AB* está no plano *ABCD* e a reta *GH* está no plano *CDHG*, que se intersectam segundo a reta *CD*.





$r \parallel s$, r está em β
s está em α
α e β não são paralelos

Você sabia?

Na cadeira de praia abaixo, o encosto e o assento podem ser vistos como partes de planos secantes; as ripas de madeira podem ser vistas como retas paralelas entre si.

Elsar/Shutterstock/Glow Images

Exercício

14. Indique se são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações:

a) Se dois planos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.

b) Se dois planos são paralelos, qualquer reta que intersecta um deles intersecta o outro.

c) Se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.

d) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.

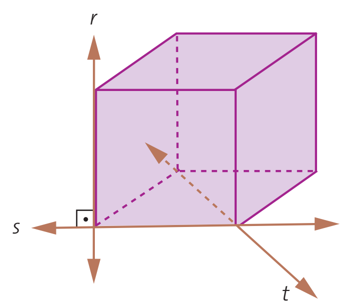
e) Uma reta r não está contida em um plano α e é tal que $r \parallel \alpha$. Então, existe uma reta s, contida em α, tal que $s \parallel r$.

f) Se um plano intersecta dois planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.

9 Perpendicularismo no espaço

Retas perpendiculares

Sabemos que duas retas distintas no espaço podem ser paralelas, concorrentes ou reversas. Quando são concorrentes e formam quatro ângulos retos (90°), essas retas são perpendiculares.



Para refletir
Na figura ao lado, quais são as medidas dos quatro ângulos formados por *s* e *t*?

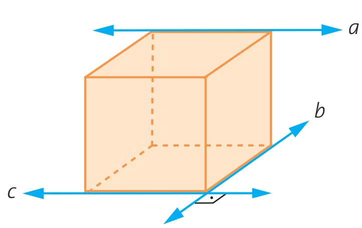
Pelo cubo, podemos visualizar:

- r e s são retas concorrentes e perpendiculares ($r \perp s$).
- s e t são retas concorrentes, mas não são perpendiculares. Dizemos que s e t são retas oblíquas.

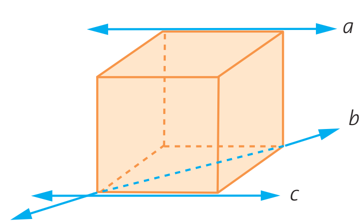
Considere agora a e b retas reversas e c uma reta paralela à reta a e concorrente com b.

Se c e b forem perpendiculares, dizemos que as retas a e b são ortogonais.

Observe as retas reversas a e b, visualizadas no cubo, e a reta c, paralela à reta a e concorrente com b.



a e b são retas reversas e ortogonais.



a e b são reversas, mas não são ortogonais.

Para refletir
Justifique as duas afirmações ao lado.

O quadro-resumo envolvendo duas retas no espaço agora fica assim:

Posições relativas de duas retas no espaço

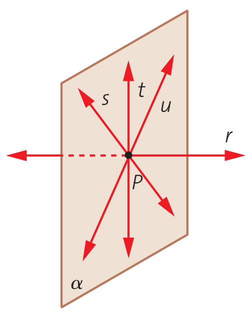
$$\text{Duas retas no espaço}\begin{cases}\text{distintas}\begin{cases}\text{coplanares}\begin{cases}\text{paralelas}\\ \text{concorrentes}\begin{cases}\text{perpendiculares}\\ \text{oblíquas}\end{cases}\end{cases}\\ \text{reversas}\begin{cases}\text{ortogonais}\\ \text{não ortogonais}\end{cases}\end{cases}\\ \text{coincidentes (paralelas iguais)}\end{cases}$$

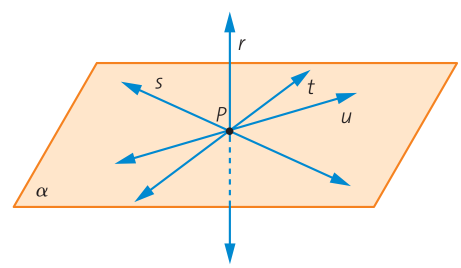
Reta e plano perpendiculares

Vimos que, dada uma reta r e um plano α, podem ocorrer três situações: a reta é paralela ao plano e não está contida nele ($r \parallel \alpha$); a reta está contida no plano ($r \ell \ \alpha$); ou a reta intersecta o plano em um ponto P, isto é, $r \cap \alpha = \{P\}$.

Veremos agora que, quando a reta intersecta o plano, ela pode ou não ser perpendicular a ele, conforme a definição:

Uma reta que intersecta um plano é perpendicular a ele quando, e somente quando, ela é perpendicular a todas as retas desse plano que passam pelo ponto de intersecção.

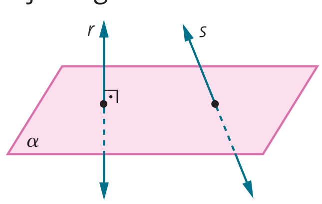




O ponto P, nesse caso, é chamado "pé da perpendicular".

Se uma reta intersecta um plano e não é perpendicular a ele, dizemos que ela é oblíqua ao plano.

Veja a figura e os símbolos correspondentes.



r é perpendicular a α ($r \perp \alpha$)
s é oblíqua a α ($s \angle \alpha$)

Para refletir
Se $r \perp \alpha$ no ponto P, qual é a posição de r em relação às retas de α que não passam por P?

Você sabia?
O Obelisco aos heróis de 1932, em São Paulo, dá ideia de reta perpendicular a um plano. A Torre de Pisa, na Itália, dá ideia de reta oblíqua a um plano.

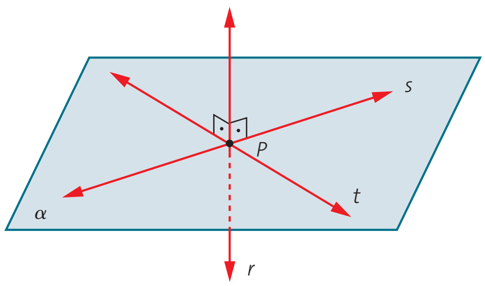

Rubens Chaves/Pulsar Imagens

Obelisco, no Parque do Ibirapuera, em São Paulo, SP.

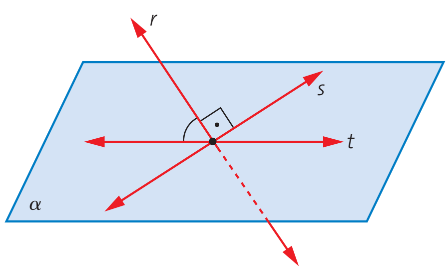

Shutterstock/Glow Images

Torre de Pisa, na Itália.

Para que uma reta seja perpendicular a um plano, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes desse plano no ponto de intersecção.

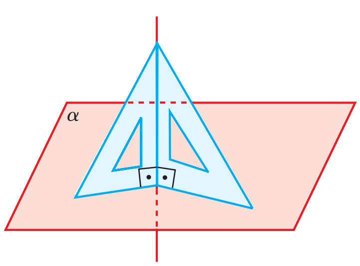


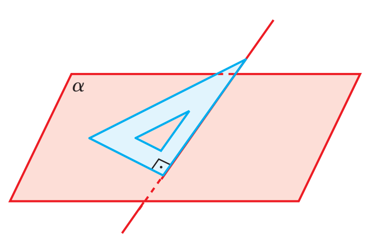
Observe que uma reta pode ser perpendicular a uma reta do plano e não ser perpendicular ao plano:



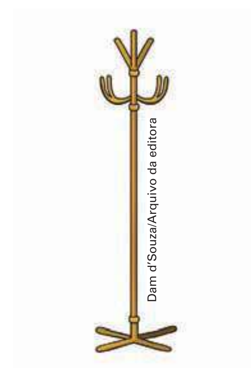
t está contida em α
s está contida em α
$r \perp s$
r não é perpendicular a α

Assim, para uma reta ser perpendicular a um plano α é preciso ser perpendicular a duas retas concorrentes em α, ou seja, são necessárias duas retas, porque vimos que uma reta não é suficiente para garantir o perpendicularismo. No entanto, bastam duas retas concorrentes, ou seja, elas são suficientes, pois essas duas concorrentes já determinam o plano α.





Você sabia?
Os pés do cabideiro dão a ideia de duas retas perpendiculares no plano do chão. Dessa forma, a haste maior do cabideiro é perpendicular ao chão.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

O cabo do rodo não é perpendicular ao chão, embora seja perpendicular à parte horizontal do rodo (que dá a ideia de reta no plano do chão).

Photo 4/Keystone

Para refletir
Reproduza concretamente estas figuras e comprove as afirmações feitas.

O quadro-resumo envolvendo as posições relativas de uma reta e um plano no espaço fica assim:

Posições relativas de uma reta e um plano no espaço

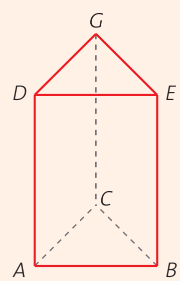
Uma reta *r* e um plano α no espaço:
- a reta é paralela ao plano ($r \,//\, \alpha$)
- a reta está contida no plano ($r\ \ell\ \alpha$)
- a reta intersecta o plano:
  - a reta é perpendicular ao plano ($r \perp \alpha$)
  - a reta é oblíqua ao plano ($r \angle \alpha$)

Exercício resolvido

» Resolvido passo a passo

(Fuvest-SP) Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares *ABC* e *DEG* seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice *G*, percorreu toda a aresta perpendicular à base *ABC*, para em seguida caminhar toda a diagonal da face *ADGC* e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a *CG*. A formiga chegou ao vértice:

a) *A*.
b) *B*.
c) *C*.
d) *D*.
e) *E*.



1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada a figura de um prisma triangular com os 6 vértices assinalados de *A* a *G*, e o trajeto da formiga ao longo do prisma.

b) O que se pede?

Pede-se o vértice ao qual a formiga chegou, após percorrer os caminhos descritos no texto.

2. Planejando a solução

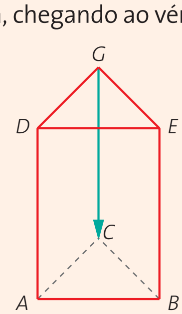
Precisamos ler o trajeto descrito, seguindo-o como se fôssemos a formiga, executando cada etapa do percurso descrito. Assim, ao final da descrição do trajeto, estaremos no vértice pedido.

3. Executando o que foi planejado

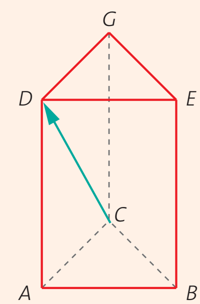
Vamos percorrer cada etapa do percurso descrito, como se estivéssemos seguindo um mapa.

a) A formiga partiu do vértice *G* e percorreu toda a aresta perpendicular à base *ABC*.

Das três arestas perpendiculares à base *ABC*, a única que contém o ponto *G* é a aresta *CG*. Assim, essa foi a aresta percorrida pela formiga na primeira etapa, chegando ao vértice *C*.

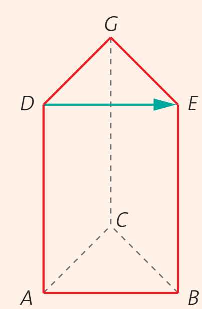


b) Em seguida, a formiga caminhou toda a diagonal da face *ADGC*. Como ela estava no vértice *C*, das duas diagonais da face *ADGC*, a única que contém o vértice *C* é a diagonal *CD*. Assim, o caminho percorrido na segunda etapa levou ao vértice *D*.



c) Finalmente, a formiga completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a *CG*.

Existem duas arestas reversas a *CG*: a aresta *AB* e a aresta *DE*. Como a formiga estava em *D*, a aresta que ela percorreu nessa etapa foi *DE*, chegando ao vértice *E*.



4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **e**.

5. Ampliando o problema

a) Se as bases desse prisma são triângulos equiláteros de lado 6 cm, e os três retângulos da lateral têm dimensões 6 cm $\times$ 8 cm, qual terá sido o total percorrido pela formiga?

b) *Discussão em equipe*

Estudos mostram que grupos de formigas são capazes de apresentar comportamento coletivo muito mais eficaz do que o de uma formiga sozinha. Em grupo, as formigas são capazes de achar sempre o melhor caminho entre o formigueiro e uma fonte de comida. Imagine que no prisma considerado no problema o formigueiro esteja no ponto médio da aresta *AB*, e a fonte de comida esteja no vértice *G*. Converse com seus colegas e tentem descobrir qual seria o caminho mais curto conectando a fonte de alimento e o formigueiro. Para facilitar, considerem que o prisma seja formado por triângulos de lados 4 cm e retângulos de lados 4 cm e 8 cm. Vale fazer um modelo de papel, recortar e montar, para descobrir qual é o menor caminho. (Dica: com essas dimensões, o caminho mais curto tem exatos 10 cm.)

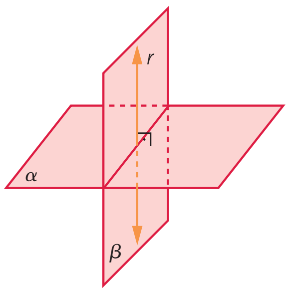
Planos perpendiculares

Estudamos neste capítulo que, dados dois planos distintos (α e β), podemos ter as duas situações abaixo:

- os planos são paralelos ($\alpha \parallel \beta$), ou seja, não têm ponto comum ($\alpha \cap \beta = \varnothing$);
- os planos são concorrentes, ou seja, têm uma reta comum ($\alpha \cap \beta = r$).

Veremos agora que, quando dois planos são concorrentes, eles podem ser ou não perpendiculares, de acordo com a definição:

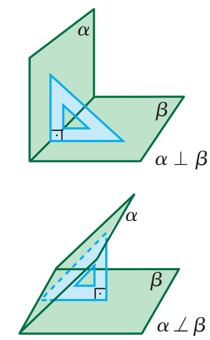
Um plano é perpendicular a outro quando, e somente quando, existe uma reta contida em um deles e perpendicular ao outro.



Se dois planos concorrentes não são perpendiculares, dizemos que são oblíquos.

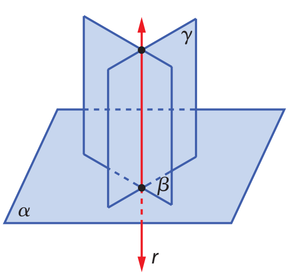
Para refletir

Use seu caderno e um esquadro para representar planos perpendiculares e oblíquos.



Consequências:

Quando uma reta é perpendicular a um plano, todos os planos que a contêm são perpendiculares ao plano inicial.

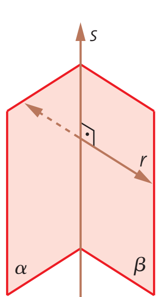


$r \perp \alpha$

Os planos β e γ, que contêm r, são perpendiculares a α.

Em dois planos oblíquos (que se intersectam e não são perpendiculares), nenhuma reta de um é perpendicular ao outro plano. Em outras palavras:

Se dois planos, α e β, são oblíquos e a reta r está contida em α, então r não é perpendicular a β.



Quando α e β são oblíquos, uma reta (r) de um pode ser perpendicular à reta (s) de intersecção, mas não perpendicular ao outro plano.

Você sabia?

Os *notebooks* abertos dão a ideia de planos oblíquos (os dois primeiros) e de planos perpendiculares (os dois últimos).


Vtls/Shutterstock/Glow Images


Peter Gudella/Shutterstock/Glow Images


Dmitry Lobanov/Shutterstock/Glow Images


Richard Boll/Getty Images

O quadro-resumo envolvendo dois planos no espaço agora fica assim:

Dois planos no espaço

- Dois planos no espaço
  - distintos
    - paralelos
    - secantes
      - perpendiculares
      - oblíquos
  - coincidentes (paralelos iguais)

Exercícios

15. Verifique se cada afirmação é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são coplanares.

b) Por um ponto passa uma única reta perpendicular a um plano dado.

c) Se uma reta está contida em um plano, toda perpendicular a ela será perpendicular ao plano.

d) Se dois planos distintos, α e β, são paralelos, então toda reta r perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

e) Por um ponto passa um único plano perpendicular a uma reta dada.

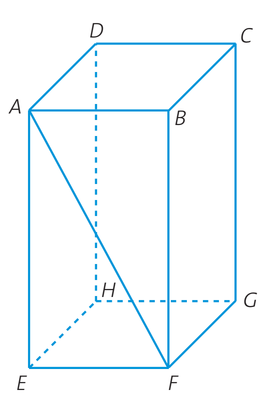
f) Se uma reta é perpendicular a um plano, ela é perpendicular a todas as retas desse plano.

g) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.

h) Se uma reta é perpendicular a uma reta do plano, então ela é perpendicular a esse plano.

i) Se uma reta e um plano são paralelos, toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.

16. A figura abaixo é um paralelepípedo.

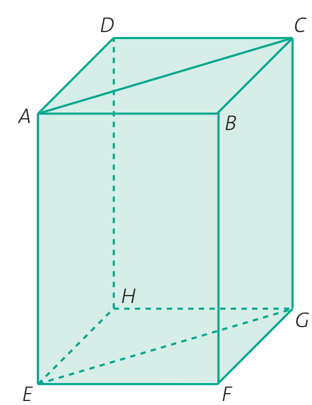


a) Cite duas retas que sejam perpendiculares ao plano *EFGH*.

b) A reta *AB* é perpendicular ao plano determinado por *BCGF*. Cite um outro plano perpendicular à reta *AB*.

c) A reta *AF* é perpendicular à reta *FG*? Justifique a resposta.

17. Considerando o paralelepípedo abaixo e os planos determinados pelas faces, resolva as questões.



a) Cite todos os planos perpendiculares a $p(ABFE)$.

b) Quais são os dois planos que contêm a reta *DH* e são perpendiculares ao plano *EFGH*?

c) O plano diagonal *ACGE* é perpendicular ao plano *EFGH*? Por quê?

d) A reta *CG* é perpendicular ao plano *EFGH*. Qual é a posição dos planos *CDHG*, *ACGE* e *BCGF* em relação ao plano *EFGH*?

18. Verifique se cada uma das afirmações é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**):

a) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles que for perpendicular à intersecção será perpendicular ao outro.

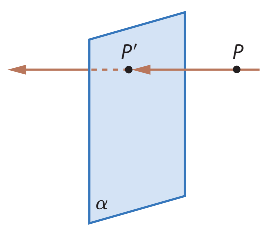
b) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.

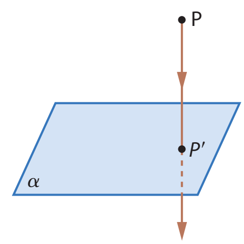
c) Dados um plano α e uma reta r, existe um plano β que contém r e é perpendicular a α.

10 Projeção ortogonal

De um ponto sobre um plano

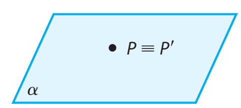
Traçamos a reta perpendicular ao plano α pelo ponto P e encontramos P'. O ponto P' é chamado projeção ortogonal do ponto P sobre o plano α.



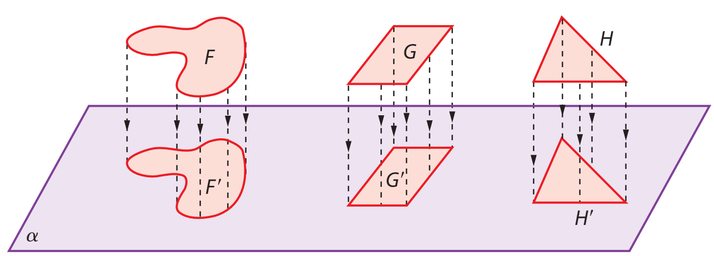


Fique atento!
A projeção ortogonal do ponto P sobre o plano α é o "pé da perpendicular" ao plano α que passa por P.

Observação: Quando $P \in \alpha$, os pontos P e P' coincidem (P : P').



De uma figura qualquer sobre um plano



As figuras F', G' e H' são as projeções ortogonais das figuras F, G e H, respectivamente, sobre o plano α. Elas são formadas pelas projeções ortogonais de todos os pontos das figuras F, G e H sobre α.

Exercícios

19. DESAFIO EM DUPLA Verifiquem se cada afirmação é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) A projeção ortogonal de um triângulo sobre um plano pode ser um segmento.

b) A projeção ortogonal de uma circunferência sobre um plano pode ser um ponto.

c) Se a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α é $\overline{A'B'}$, então a medida de $\overline{A'B'}$ é menor do que a de $\overline{AB}$.

d) Se a projeção ortogonal do $\triangle ABC$ sobre um plano α é o $\triangle A'B'C'$ e o $\triangle ABC$ é congruente ao $\triangle A'B'C'$, então o $\triangle ABC$ está contido em α ou está contido em um plano distinto e paralelo a α.

e) A projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

f) As projeções de três pontos não colineares sobre um plano podem ser três pontos colineares.

20. DESAFIO EM DUPLA Considerem um plano α, uma reta r e um ponto P tais que $r \mid \alpha$, $P \notin \alpha$ e $P \notin r$.
Assinalem todas as possibilidades quando se faz a projeção ortogonal, respectivamente, de r e P sobre α.

a) Uma reta e um ponto fora dela.

b) Um único ponto.

c) Dois pontos distintos.

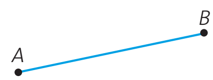
d) Uma reta.

e) Duas retas distintas.

11 Distâncias

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos, A e B, a distância entre A e B é a medida do segmento $\overline{AB}$.



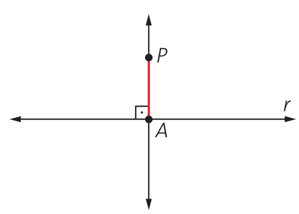
Se A e B coincidem, dizemos que a distância entre A e B é zero.

Fique atento!
Quando se diz que a distância entre A e B é $\overline{AB}$, subentende-se que é a medida de $\overline{AB}$.

Distância de um ponto a uma reta

Dados um ponto P e uma reta r, podemos traçar uma reta que passa por P e é perpendicular a r no ponto A.

A distância do ponto P à reta r é a distância entre os pontos P e A.

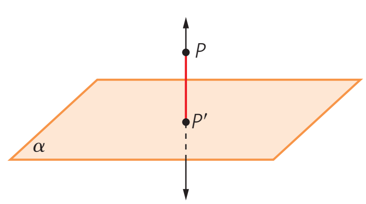


Para refletir
Em que condições a distância entre P e r é igual a zero?

Distância de um ponto a um plano

Dados um ponto P e um plano α, podemos determinar P', que é a projeção ortogonal de P sobre α.

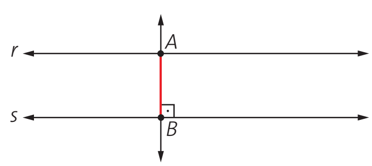
A distância do ponto P ao plano α é a distância entre os pontos P e P'.



Para refletir
Qual é a distância entre P e α, quando $P \in \alpha$?

Distância entre duas retas distintas e paralelas

Dadas as retas r e s, distintas e paralelas, a distância entre r e s é a distância de qualquer ponto de uma delas à outra reta.

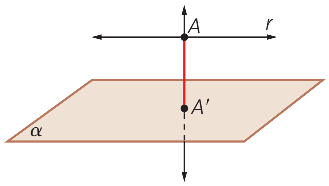


Fique atento!
Não se pode definir distância entre duas retas concorrentes.

Se duas retas são coincidentes (paralelas iguais), a distância entre elas é zero.

Distância de uma reta a um plano (quando a reta é paralela ao plano e não está contida nele)

Dados a reta r e o plano α tais que $r \,/\!/\, \alpha$, a distância da reta r ao plano α é a distância de qualquer ponto de r ao plano α.

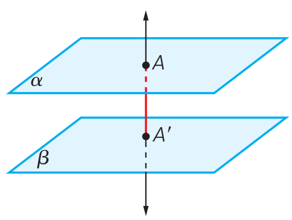


Para refletir
Se uma reta está contida em um plano, qual é a distância da reta ao plano?

Observação: Não se pode falar em distância de uma reta a um plano quando ela é oblíqua a ele.

Distância entre dois planos distintos e paralelos

Dados dois planos distintos, α e β, tais que $\alpha \,/\!/\, \beta$, a distância entre esses dois planos é a distância de qualquer ponto de um deles ao outro plano.

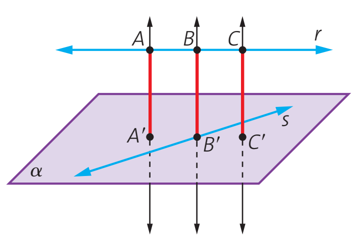


Para refletir
Quando a distância entre dois planos é zero?

Observação: Não se pode falar em distância entre dois planos concorrentes.

Distância entre duas retas reversas

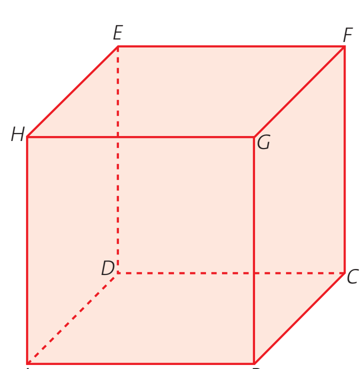
Dadas duas retas reversas, r e s, vamos considerar um ponto qualquer de r e o plano que contém s e é paralelo a r. A distância entre r e s é a distância desse ponto a esse plano.



Para refletir
É possível a distância entre duas retas reversas ser zero?

Veja um exemplo que usa um cubo com arestas de medida 3 no qual são calculados os vários tipos de medidas.

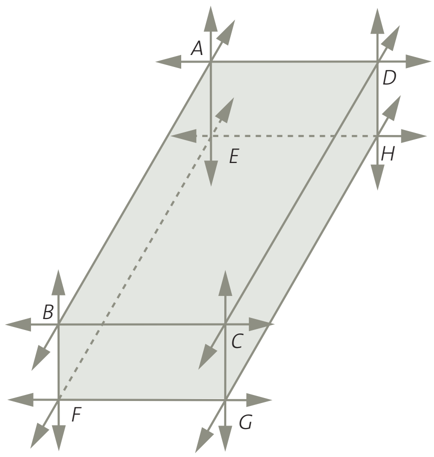
a) distância entre os pontos B e $G \rightarrow 3$
b) distância entre F e $H \rightarrow 3\sqrt{2}$
c) distância entre E e $B \rightarrow 3\sqrt{3}$
d) distância de H a $\overleftrightarrow{AB} \rightarrow 3$
e) distância entre $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BG} \rightarrow 3\sqrt{2}$
f) distância entre $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{EF} \rightarrow 3$
g) distância de $\overleftrightarrow{EF}$ a $p(A, B, C) \rightarrow 3$
h) distância de $\overleftrightarrow{FC}$ a $p(E, D, B) \rightarrow \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
i) distância entre $p(A, B, G)$ e $p(E, F, C) \rightarrow 3$



Para refletir
Como foi feito o cálculo nos itens **b** e **c**?

Exercícios

21. DESAFIO EM DUPLA Observando o paralelepípedo da figura abaixo, indiquem um segmento que determina a distância:



a) entre os pontos C e D.

b) do ponto A à reta EF.

c) do ponto D ao plano $EFGH$.

d) das retas paralelas BG e AH.

e) do ponto D ao plano $BCGF$.

f) da reta AB ao plano $DCGH$.

g) da reta BC ao plano $ADHE$.

h) da reta AF ao plano $CDHG$.

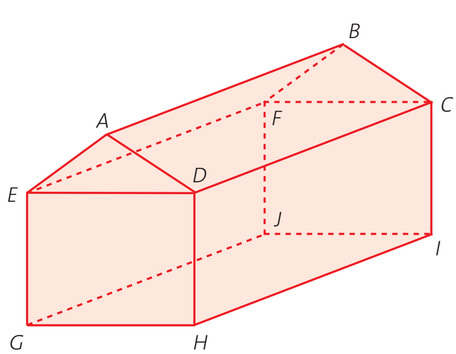
i) entre os planos $ABCD$ e $EFGH$.

j) entre os planos $ABFE$ e $CDHG$.

k) entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

l) entre as retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.

22. DESAFIO EM DUPLA Observando a figura abaixo, indiquem um segmento que determina a distância:

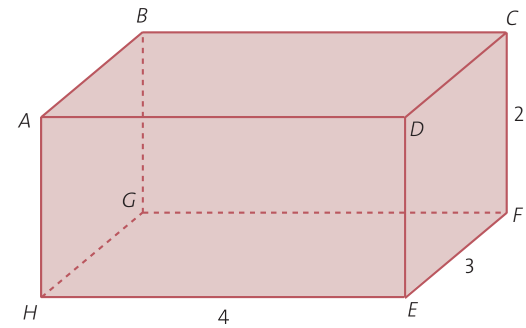


a) da parede da frente à parede dos fundos da casa.

b) entre as paredes laterais.

c) da cumeeira ao piso (ponto A ao plano $GHIJ$).

23. DESAFIO EM DUPLA Considerem um paralelepípedo com as medidas indicadas na figura abaixo.



Determinem as distâncias:

a) entre os pontos A e B.

b) entre os pontos H e F.

c) entre os pontos C e E.

d) entre os pontos D e H.

e) do ponto médio de $\overline{AB}$ à reta CD.

f) do ponto médio de $\overline{BC}$ à reta HE.

g) do ponto F ao plano $p(A, B, G)$.

h) entre as retas $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.

i) entre as retas $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{BH}$.

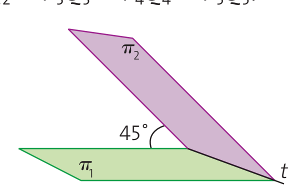
j) da reta BD ao plano $p(E, F, H)$.

k) entre os planos $p(A, D, E)$ e $p(B, G, F)$.

l) entre as retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{BD}$.

m) entre os pontos B e E.

24. DESAFIO (UFPE-adaptado) Sejam π_1 e π_2 planos que se interceptam em uma reta t e formam um ângulo de 45°. Em π_1 escolha pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 distando respectivamente 3 cm, 7 cm, 8 cm, 15 cm e 21 cm de t. A reta perpendicular a π_1 passando por P_i intercepta π_2 em um ponto Q_i.
Qual o valor, em cm, de
$P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 + P_4Q_4 + P_5Q_5$?



Para refletir
Pesquise o significado de ângulo entre dois planos concorrentes.

Um pouco mais...

O método dedutivo: algumas demonstrações

Na Geometria espacial as noções básicas, primitivas, que aceitaremos sem definição, são: ponto, reta, plano e espaço.

Já vimos que os **postulados** ou **axiomas** são propriedades aceitas como verdadeiras sem demonstração.

Examine alguns postulados que relacionam ponto, reta, plano e espaço:

Postulado 1: Dados dois pontos distintos do espaço, existe uma, e somente uma, reta que os contém.

Postulado 2: Dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém.

Postulado 3: Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano.

Já vimos também que os **teoremas** são demonstrados a partir dos postulados e de outras propriedades já demonstradas, usando raciocínio lógico.

Você sabia?

A Geometria assim desenvolvida usa o **método dedutivo**. Partimos de algumas noções para as quais não é apresentada definição (entes primitivos) e algumas propriedades aceitas como verdadeiras sem demonstração (postulados ou axiomas). Isso não é exclusividade da Geometria — ocorre em qualquer teoria matemática.

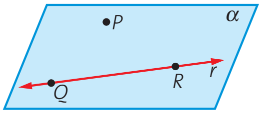
Vamos usar esses postulados para demonstrar alguns teoremas e compreender como funciona o método dedutivo.

Teorema 1: Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.

Demonstração:

Considere P um ponto não pertencente à reta r.

Marcamos sobre r dois pontos distintos, Q e R.



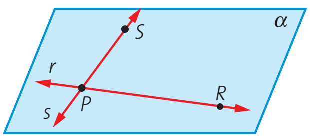
Os pontos P, Q e R não são colineares, pois, pelo postulado 1, r é a única reta que passa por Q e R e, por hipótese, P não pertence a r.

Pelo postulado 2, sabemos que existe um único plano α que contém P, Q e R. Como a reta r tem dois de seus pontos (Q e R) em α, o postulado 3 garante que r está contida em α. Assim, de fato existe um plano que contém r e P. Como esse é o único plano que contém P, Q e R, ele é o único que contém P e r.

Teorema 2: Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Demonstração:

Seja P o ponto de intersecção das retas r e s.



Sejam R e S pontos de r e s, respectivamente, distintos de P. Os pontos P, R e S são não colineares. Pelo postulado 2, eles determinam um único plano α.

O postulado 3 garante que α contém r e s, uma vez que essas retas têm dois de seus pontos em α.

Exercício adicional

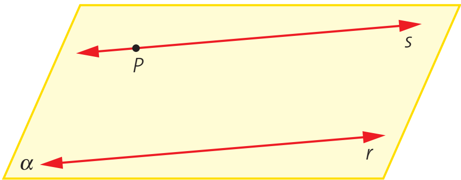
DESAFIO EM EQUIPE Demonstrem o **teorema 3**:

Duas retas paralelas distintas determinam um único plano.

Teorema 4: Por um plano P fora de uma reta r do espaço passa uma única reta s paralela a ela.

Demonstração:

Considere r uma reta do espaço e P um ponto que não pertence a r. Pelo teorema 1, existe um único plano α que contém P e r; nesse plano, existe uma, e somente uma, reta s paralela a r passando por P (resultado da Geometria plana).



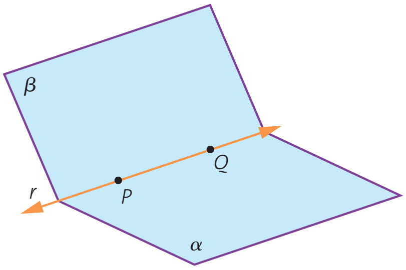
No entanto, não existem retas paralelas a r passando por P que não estejam contidas em α, já que, pelo teorema 2, **todas** as retas coplanares com r passando por P estão contidas em α.

Portanto, a reta s é a única reta do espaço que contém P e é paralela a r.

Teorema 5: Quando dois planos distintos possuem pontos comuns, sua intersecção é uma reta.

Demonstração:

Considere os pontos P e Q comuns a α e β.



Pelo postulado 3, a reta r definida por P e Q está contida, ao mesmo tempo, em α e β e, portanto, em sua intersecção.

Contudo, se houvesse um ponto R comum a α e β que não pertencesse a r, os planos α e β seriam coincidentes, uma vez que, pelo teorema 1, r e R determinam um único plano. Portanto, r é a intersecção de α e β.

CAPÍTULO 9

Poliedros: prismas e pirâmides

Daniela Souza/Folhapress

Vista aérea do bairro da República, em São Paulo, SP.

O mundo que nos rodeia é repleto de objetos que têm três dimensões (3-D): altura, largura e profundidade. O ramo da Matemática que estuda essas três dimensões é a Geometria espacial, com seus poliedros e corpos redondos.

Quando estudamos a Geometria plana, com suas duas dimensões (2-D): altura e largura, qualquer tentativa de materializar seus elementos é apenas para termos uma ideia do que estamos estudando. Por exemplo, dizer que "uma folha de papel é uma região retangular" é didaticamente adequado, mas é necessário desconsiderar a espessura do papel, que, por mínima que seja, existe. A verdadeira representação geométrica de uma folha de papel seria um tipo de poliedro chamado **prisma**, com suas três dimensões, e não uma região retangular, com duas.

Ao estudar os sólidos geométricos, teremos condições de fazer representações do mundo de uma forma mais realista.

Neste capítulo estudaremos os poliedros, focando principalmente nos prismas e nas pirâmides, e, no próximo, os corpos redondos (em especial os cones, os cilindros e as esferas).

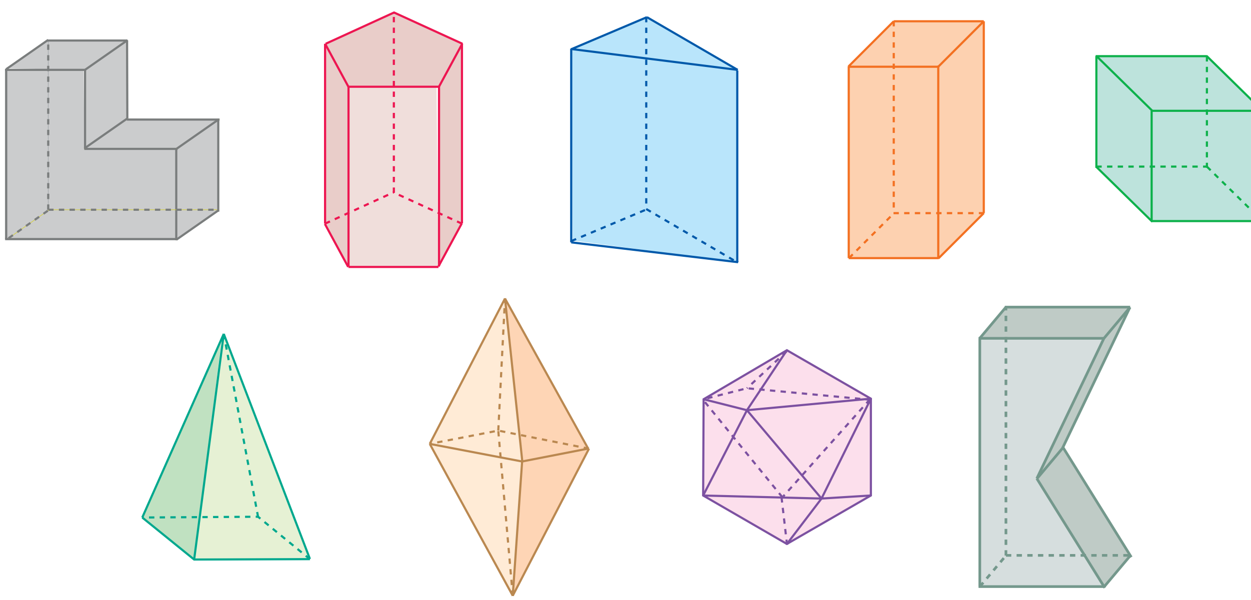
1 Poliedros

Em geral, destacamos os poliedros mais relevantes, pois a quantidade de tipos e formas existentes desses sólidos é enorme. No Museu da Ciência de Londres há uma seção dedicada aos poliedros, com uma variedade bastante grande de tipos.

Thruston/Wikimedia Commons

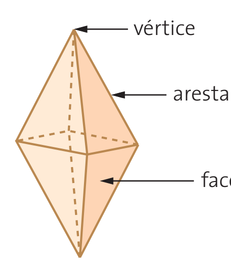
Museu da Ciência de Londres, Inglaterra.

As figuras espaciais abaixo são exemplos de poliedros.



Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas **faces** e a região do espaço limitada por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma outra única região poligonal. A intersecção de duas faces quaisquer é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

Cada lado de uma região poligonal comum a exatamente duas faces é chamado **aresta** do poliedro. E cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.



> **Fique atento!**
> Cada vértice do poliedro é um ponto comum a três ou mais arestas.

Agora que já definimos os elementos básicos de um poliedro (aresta, vértice e face), formem grupos de três colegas e, de acordo com a informação a seguir, respondam às questões.

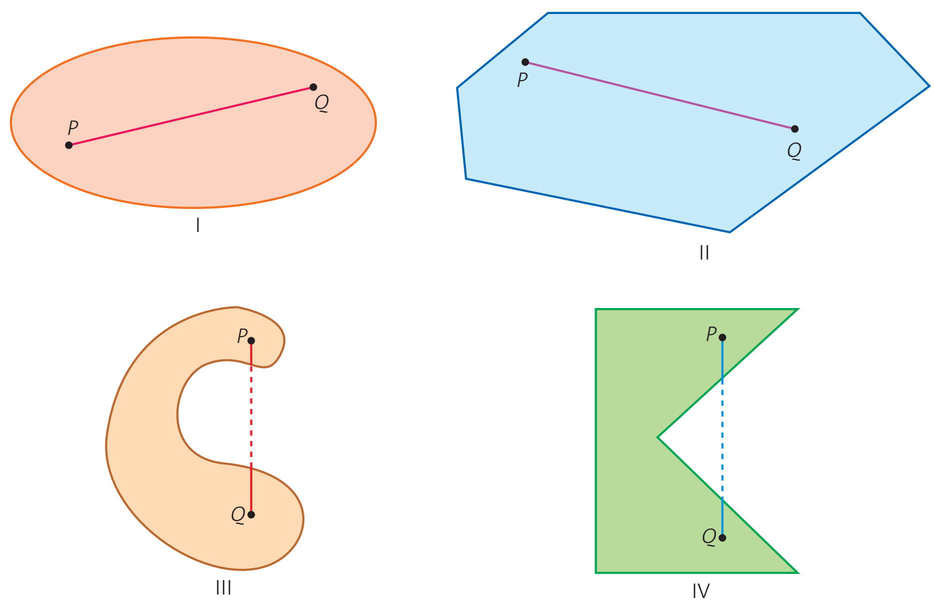
Uma folha de papel é um poliedro (ela possui 3 dimensões, mesmo que a espessura do papel seja muito difícil de ver).

Qual é o número de faces de uma folha de papel? E o número de arestas? E de vértices?

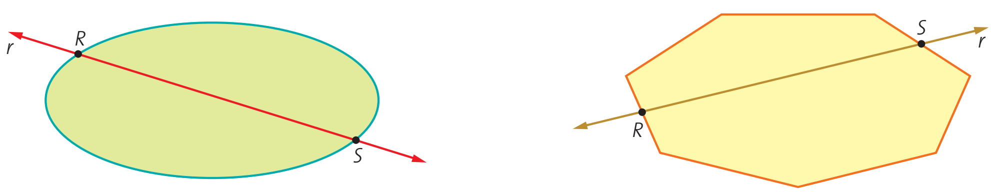
Após chegarem a um acordo no grupo, comparem suas respostas com as dos demais grupos.

Poliedro convexo e poliedro não convexo

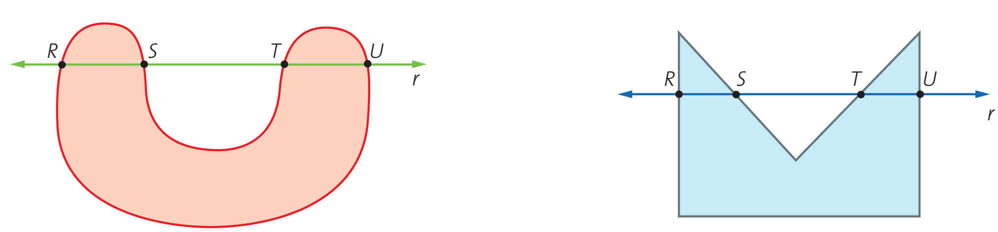
Vamos recordar o que é uma região convexa do plano.



Uma região do plano é **convexa** quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dessa região está inteiramente contido nela. Nas figuras acima, **I** e **II** são regiões convexas e **III** e **IV** são regiões **não convexas** do plano. De modo equivalente, podemos dizer também que uma região plana é convexa se qualquer reta *r* desse plano intersecta seu contorno em, no máximo, dois pontos:



Regiões planas convexas

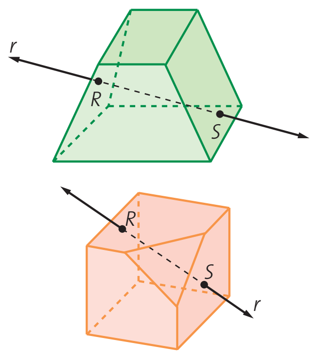


Regiões planas não convexas

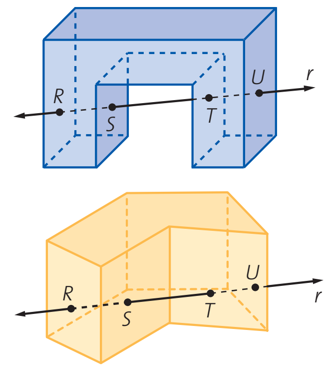
Um polígono é convexo quando o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido nele.

De modo equivalente, podemos dizer que um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos.

Poliedros convexos



Poliedros não convexos

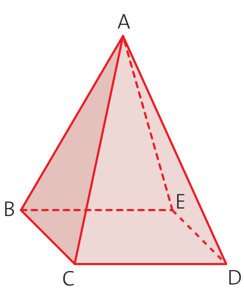


Para refletir
Pode-se dizer também que um poliedro é convexo quando se situa do mesmo lado de qualquer plano que contenha uma de suas faces.
Constate isso nos poliedros dos quadros acima.

Exercícios

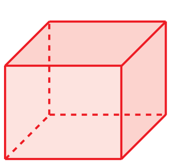
ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

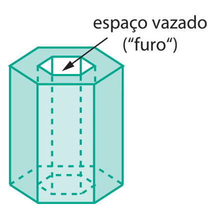
1. Analise o poliedro da figura ao lado e responda:
   a) Qual é o número de faces, de arestas e de vértices?
   b) Qual é a forma de cada face?
   c) O vértice *C* é comum a quantas arestas?
   d) O vértice *A* é comum a quantas arestas?
   e) Qual é a posição relativa das retas determinadas pelas arestas $\overline{AE}$ e $\overline{BC}$?

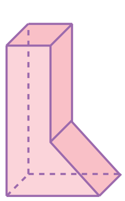


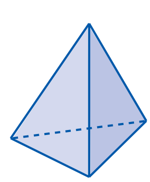
Para refletir
Qual é o número mínimo de faces que pode ter um poliedro?

2. Classifique cada um dos poliedros em convexo ou não convexo.

a)


c)


b)


d)


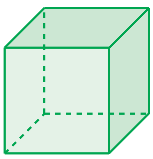
Fique atento!
O estudo que será feito a partir daqui vai considerar apenas os poliedros convexos. Por isso, sempre que aparecer a palavra **poliedro** deve-se subentender que ele é convexo.

2 Relação de Euler

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) descobriu uma importante relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e o número de faces (F) de um poliedro convexo.

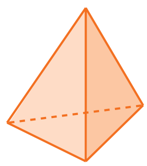
Observe estes exemplos:

Cubo



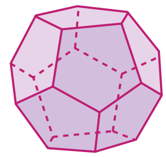
$F = 6$
$V = 8$
$A = 12$

Tetraedro



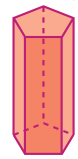
$F = 4$
$V = 4$
$A = 6$

Dodecaedro



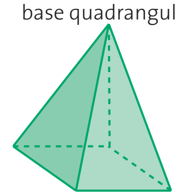
$F = 12$
$V = 20$
$A = 30$

Prisma de base pentagonal



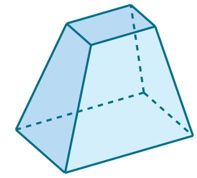
$F = 7$
$V = 10$
$A = 15$

Pirâmide de base quadrangular



$F = 5$
$V = 5$
$A = 8$

Tronco de pirâmide de base retangular



$F = 6$
$V = 8$
$A = 12$

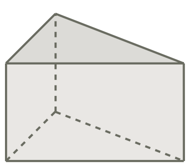
Observe que, para cada um dos poliedros, o número de arestas é exatamente 2 unidades menos do que a soma do número de faces com o número de vértices.

Essa relação pode ser escrita assim:

$\boxed{V - A + F = 2}$ relação de Euler

O valor 2 dessa expressão é uma característica de todos os poliedros convexos.

Note a relação de Euler em mais um poliedro convexo:



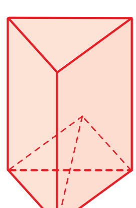
$V = 6$
$F = 5$
$A = 9$

$$\begin{array}{ccccccc} V & - & A & + & F & = & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 6 & - & 9 & + & 5 & = & 2 \end{array}$$

Para refletir
No cubo, temos: $8 - 12 + 6 = 2$.
Escreva a relação de Euler para os outros poliedros acima.

Observações:

1ª) Em alguns poliedros (não em todos) não convexos vale também a relação de Euler.
Examine um exemplo dessa afirmação no poliedro não convexo abaixo:

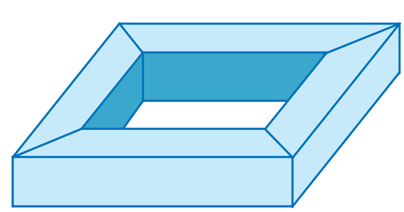


$V = 7$
$F = 7$
$A = 12$

$V - A + F = 2$
$7 - 12 + 7 = 2$

2ª) A expressão $V - A + F$ pode assumir valores diferentes de 2 quando o poliedro não é convexo.
Examine o poliedro ao lado, que é um exemplo dessa situação. Neste caso:

$$\begin{array}{ccccccc} V & - & A & + & F & \neq & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 16 & - & 32 & + & 16 & = & 0 \end{array}$$



Poliedro não convexo

3ª) Dados três números, V, A e F, tais que $V - A + F = 2$, nem sempre existe um poliedro que tenha V vértices, A arestas e F faces. Por exemplo, $V = 1$, $A = 3$ e $F = 4$.

Fique atento!
Todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas nem todo poliedro que satisfaz a relação de Euler é convexo.

Exercícios resolvidos

1. Determine o número de arestas e o número de vértices de um poliedro convexo com 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

Resolução:

Como o poliedro tem 6 faces quadrangulares, calculamos:

$6 \cdot 4 = 24$; 24 arestas

O poliedro tem 4 faces triangulares:

$4 \cdot 3 = 12$; 12 arestas

Como cada aresta foi contada duas vezes, o número total de arestas é:

$$A = \frac{24 + 12}{2} = 18$$

Temos, então, $F = 10$ e $A = 18$.

Aplicando a relação de Euler:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 18 + 10 = 2 \Rightarrow V = 10$

Logo, o poliedro tem 18 arestas e 10 vértices.

2. Arquimedes (séc. III a.C.) descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970. Quantos vértices possui esse poliedro?

Resolução:

Como o poliedro tem 12 faces pentagonais, então:

$12 \cdot 5 = 60$; 60 arestas

O poliedro tem 20 faces hexagonais, assim:

$20 \cdot 6 = 120$; 120 arestas

Logo:

$F = 12 + 20 = 32$

Cada aresta foi contada duas vezes, portanto, temos:

$2A = 60 + 120 \Rightarrow 2A = 180 \Rightarrow A = 90$

Como o poliedro é convexo, vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$:

$V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 2 + 90 - 32 \Rightarrow V = 60$

Assim, o número de vértices é 60.

Staff/Agence France-Pressesf

Jogadores disputam a bola na Copa do Mundo de Futebol realizada no México, em 1970; jogo entre Alemanha e Marrocos.

Exercícios

3. Em um poliedro convexo, o número de vértices é 5 e o de arestas é 10. Qual é o número de faces?

4. Em um poliedro convexo de 20 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?

5. Um poliedro convexo apresenta 1 face hexagonal e 6 faces triangulares. Quantos vértices tem esse poliedro?

6. Como dito anteriormente, uma bola de futebol pode ser representada por um poliedro formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas com lados congruentes entre si. Sabe-se que, para costurar essas faces lado a lado, formando a superfície da bola, usa-se 20 cm de linha em cada aresta do poliedro.

Le Do/Shutterstock/Glow Images

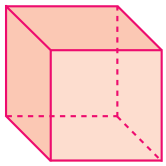
Qual é o comprimento total de linha que será gasta para costurar toda a bola, em m?

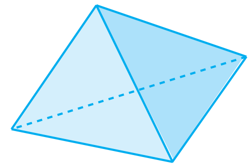
7. Qual é o número de faces de um poliedro convexo de 20 vértices tal que em cada vértice concorrem 5 arestas?

8. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais.

3 Poliedros regulares

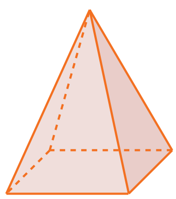
Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são regiões poligonais regulares e congruentes e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

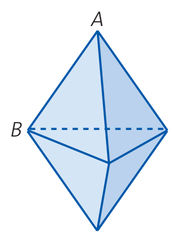

Poliedro regular


Poliedro regular

Fique atento!
Uma região poligonal regular é limitada por um polígono regular, ou seja, por um polígono que tem todos os lados e ângulos internos congruentes.

Observe agora:


Poliedro não regular: as faces não têm o mesmo número de lados.



Poliedro não regular: as faces são regulares e congruentes, mas para o vértice *A* convergem 3 arestas e para o *B* convergem 4 arestas.

Propriedade: existem apenas cinco poliedros regulares convexos*

Vamos demonstrar essa propriedade.

Consideremos um poliedro regular em que n é o número de lados de cada face e p é o número de arestas que concorrem em cada vértice. Assim, temos:

$$2A = nF = pV$$

o que acarreta:

$$A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{p}$$

Para refletir
O cubo é um poliedro regular: verifique nele que $2A = nF = pV$.

Substituindo esses valores na relação de Euler, $V - A + F = 2$, temos:

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 \Rightarrow \frac{2nF - npF + 2pF}{2p} = \frac{4p}{2p} \Rightarrow F(2n + 2p - np) = 4p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{4p}{2n + 2p - np}$$

Fique atento!
- $2A = nF$, pois cada aresta está contida em 2 faces.
- $2A = pV$, pois cada aresta contém 2 vértices.

Precisamos ter $2n + 2p - np > 0$, isto é:

$$2n > np - 2p \Rightarrow 2n > p(n - 2) \Rightarrow \frac{2n}{n-2} > p$$

Como $p \geqslant 3$, temos que:

$$\frac{2n}{n-2} > p \geqslant 3 \Rightarrow 2n > 3n - 6 \Rightarrow -n > -6 \Rightarrow n < 6$$

Para refletir
$n \geqslant 3$ e $p \geqslant 3$. Por quê?

*Veja Leitura no final do capítulo.

Portanto, temos as seguintes possibilidades: $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$.

- Para $n = 3$:

$$F = \frac{4p}{6-p} \rightarrow \begin{cases} p = 3 \rightarrow F = 4 \text{ (tetraedro)} \\ p = 4 \rightarrow F = 8 \text{ (octaedro)} \\ p = 5 \rightarrow F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{cases}$$

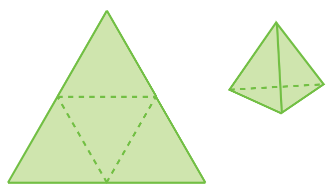
- Para $n = 4$:

$$F = \frac{4p}{8-2p} = \frac{2p}{4-p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 6 \text{ (cubo)}$$

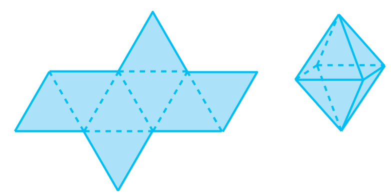
- Para $n = 5$:

$$F = \frac{4p}{10-3p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 12 \text{ (dodecaedro)}$$

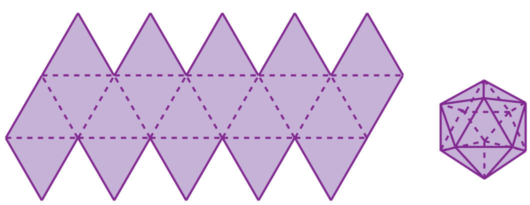
Examine estes desenhos:



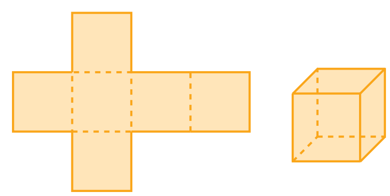
Tetraedro: 4 faces triangulares equiláteras e 3 arestas que concorrem em cada vértice.



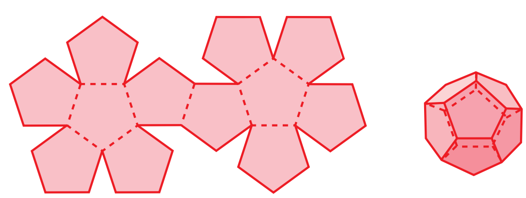
Octaedro: 8 faces triangulares equiláteras e 4 arestas que concorrem em cada vértice.



Icosaedro: 20 faces triangulares equiláteras e 5 arestas que concorrem em cada vértice.



Cubo: 6 faces quadradas e 3 arestas que concorrem em cada vértice.



Dodecaedro: 12 faces pentagonais regulares congruentes e 3 arestas que concorrem em cada vértice.

Exercício

9. Copie e complete a tabela com os nomes, o número de faces, de vértices e de arestas dos poliedros convexos regulares. Coloque também a forma das faces e verifique em cada um a relação de Euler.

Poliedros regulares	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas	Forma das faces	Relação de Euler
tetraedro	4	4	6	triangular	$4 - 6 + 4 = 2$

Poliedros de Platão

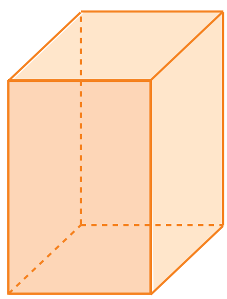
Um poliedro é denominado **poliedro de Platão** se, e somente se, forem verificadas as seguintes condições:

- Todas as faces têm o mesmo número de arestas.
- Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.
- Vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$.

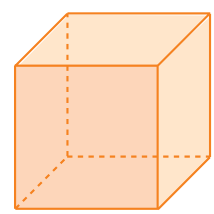
Dessa forma, todos os poliedros regulares convexos são poliedros de Platão.

E, da mesma maneira que foi demonstrado que só existem cinco poliedros regulares convexos, podemos demonstrar que só existem cinco classes de poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

> **Fique atento!**
> Em um poliedro de Platão as faces não precisam ser polígonos regulares.



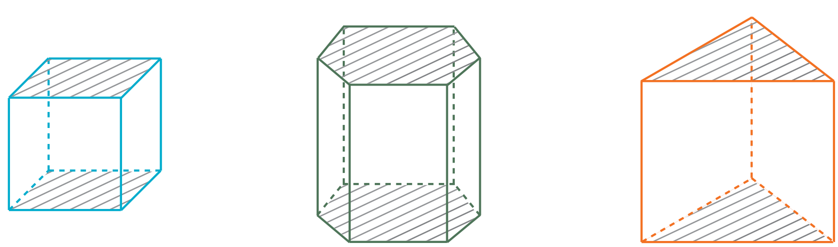
Este hexaedro é poliedro de Platão, mas não é regular, pois não é o cubo.



O cubo é poliedro regular e é poliedro de Platão.

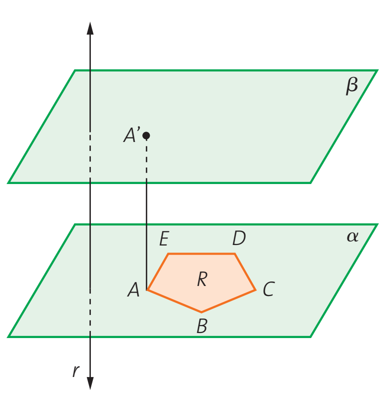
4 Prismas

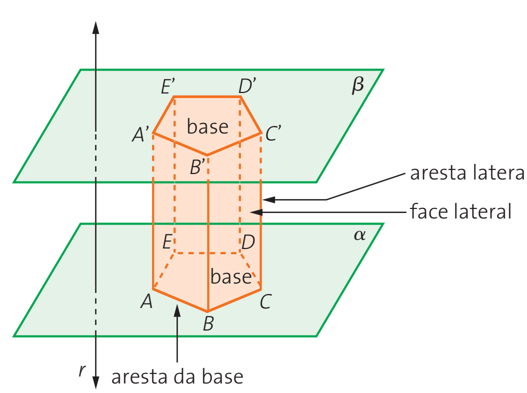
Entre os poliedros mais conhecidos, destacamos os prismas, que vamos estudar com mais detalhes. Veja alguns exemplos e procure perceber suas características.



Construção e definição de prisma

Considere uma região poligonal, por exemplo *ABCDE*, contida em um plano α. Escolha um ponto A' qualquer, não pertencente a α. Por A' trace o plano β paralelo a α. Pelos demais pontos, *B*, *C*, *D*, *E*, trace retas paralelas a AA' que cortam β nos pontos B', C', D', E'. Essas retas são paralelas entre si.





Tome dois segmentos consecutivos assim determinados, por exemplo $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$. O quadrilátero $AA'B'B$ é plano, pois seus lados AA' e BB' são paralelos. Isso acarreta que $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ também são paralelos (pois estão contidos em retas coplanares que não se intersectam por estarem contidas em planos paralelos). Logo, o quadrilátero $AA'B'B$ é um paralelogramo. As regiões limitadas por paralelogramos assim determinados, juntamente com as regiões poligonais $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$, determinam um poliedro chamado **prisma** de bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$.

A região do espaço ocupada por um prisma é formada pelos pontos dos segmentos nos quais cada extremidade está em uma das bases.

As arestas AA', BB', CC', DD' e EE' são chamadas **arestas laterais**. Todas as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento.

Arestas laterais consecutivas determinam regiões que têm a forma de paralelogramos e são chamadas **faces laterais** do prisma.

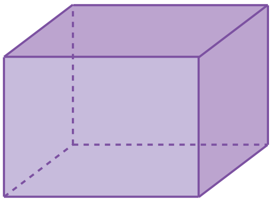
As bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são congruentes. A **altura** do prisma é a distância entre as bases.

Observação: Quando nos exercícios relacionados a esse assunto as bases forem citadas como polígonos, devemos entendê-las como regiões poligonais (por exemplo, a expressão **prisma cuja base é um quadrado** deve ser entendida como **prisma cuja base é uma região quadrada**).

Caso particular: o paralelepípedo

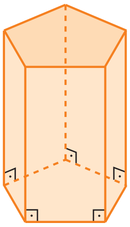
Quando a base é uma região em forma de paralelogramo, temos um prisma particular chamado **paralelepípedo**.

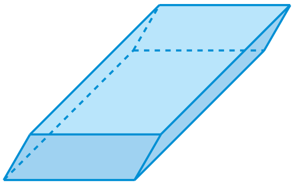
Paralelepípedos são prismas cuja particularidade é que qualquer de suas faces pode ser tomada como base, pois duas faces opostas quaisquer estão situadas em planos paralelos e são ligadas por arestas paralelas entre si.


paralelepípedo

Prismas retos

O prisma é reto quando as arestas laterais são perpendiculares às bases, e é oblíquo quando não o são.


prisma reto

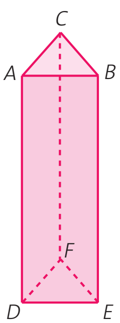

prisma oblíquo

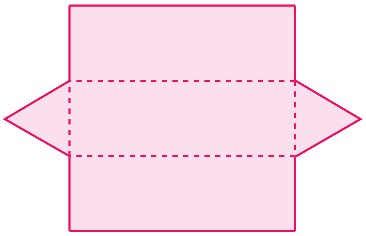
Fique atento!
Retângulo é um caso particular de paralelogramo.

Assim, em um prisma reto, as faces laterais são regiões retangulares.

De acordo com a região poligonal das bases, o prisma recebe nomes especiais. Veja alguns exemplos:

a) Prisma reto de base triangular ou prisma reto triangular

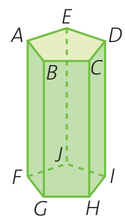


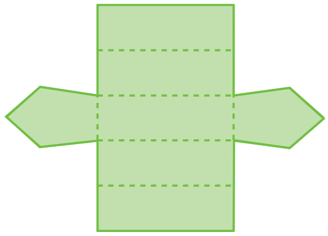

planificado

Fique atento!
As faces laterais são limitadas por paralelogramos particulares, ou seja, por retângulos.

Bases: regiões ABC e DEF
Faces laterais: regiões $ABED$, $ACFD$, $BCFE$
Arestas laterais: $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ e $\overline{BE}$

b) Prisma reto de base pentagonal ou prisma reto pentagonal

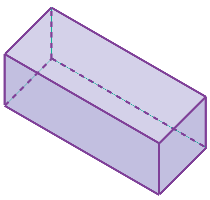




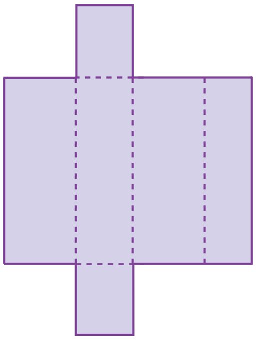
Planificado

Bases: regiões *ABCDE* e *FGHIJ*
Faces laterais: regiões *BCHG*, *CDIH*, *DEJI*, *AEJF* e *ABGF* (retangulares)
Arestas laterais: $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{EJ}$, $\overline{CH}$ e $\overline{DI}$

c) Prisma reto de base retangular ou paralelepípedo retângulo ou bloco retangular
Quando o prisma é reto e a base é uma região retangular, obtemos um **paralelepípedo retângulo** ou **bloco retangular**, no qual cada face é uma região retangular.



Paralelepípedo retângulo ou bloco retangular

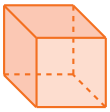


Paralelepípedo retângulo planificado

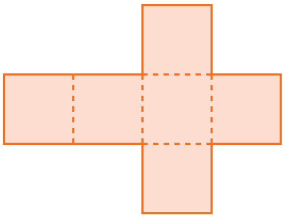
Fique atento!
Um paralelepípedo retângulo é um prisma reto em que qualquer face serve de base.

d) Cubo ou hexaedro regular
Quando, em um prisma reto, a base é uma região poligonal regular, temos um **prisma regular**. Um exemplo é o cubo ou hexaedro regular, que é um caso particular de paralelepípedo retângulo, no qual cada face é uma região quadrada. Assim:

Prisma regular é um prisma reto cuja base é uma região poligonal regular.



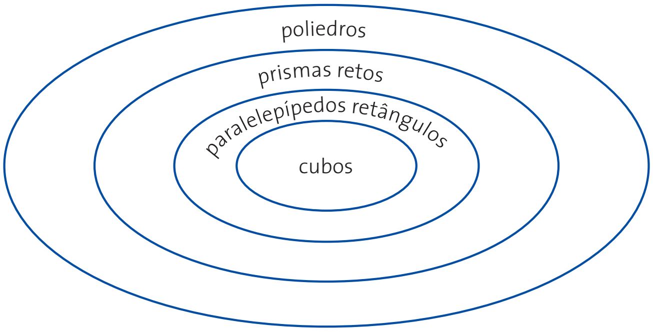
Cubo ou hexaedro regular



Cubo planificado

Fique atento!
Todo quadrado é um retângulo.
Todo retângulo é um paralelogramo.
Então, todo quadrado é um paralelogramo.

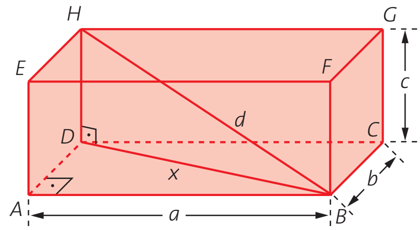
Examine essa classificação em um diagrama:



Fique atento!
Todo cubo é paralelepípedo, mas nem todo paralelepípedo é cubo.

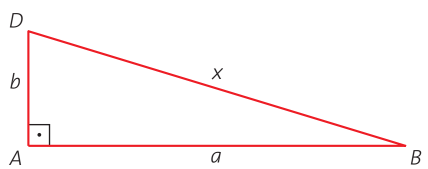
Cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo e de um cubo

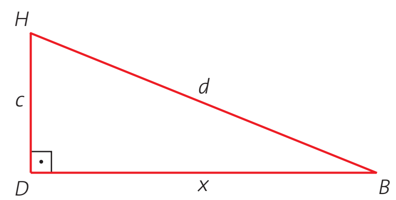
No paralelepípedo de dimensões a, b e c, temos:



d = medida da diagonal do paralelepípedo
x = medida da diagonal da base

Na figura podemos localizar dois triângulos retângulos:

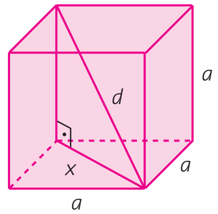




- Como o triângulo ABD é retângulo em A, temos, pela relação de Pitágoras:
  $x^2 = a^2 + b^2$ (I)
- Como o triângulo DBH é retângulo em D, temos, pela relação de Pitágoras:
  $d^2 = x^2 + c^2$ (II)
- Substituindo (I) em (II), vem:

$$d^2 = x^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

No cubo, como ele é um caso particular de paralelepípedo reto retangular, temos:



$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\boxed{d = a\sqrt{3}}$$

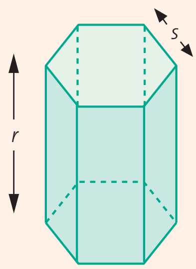
Área da superfície de um prisma

Em todo prisma, consideramos:

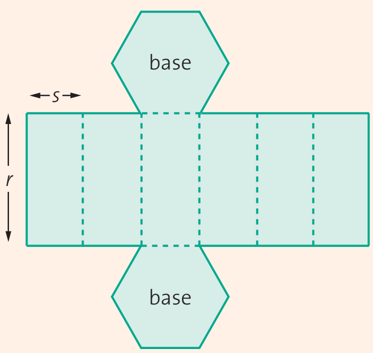
- **superfície lateral**: é formada pelas faces laterais;
- **área lateral** (A_ℓ): é a área da superfície lateral;
- **superfície total**: é formada pelas faces laterais e pelas bases;
- **área total** (A_t): é a área da superfície total.

Exercícios resolvidos

3. Em um prisma hexagonal regular, a aresta da base mede 3 cm e a aresta da face lateral mede 6 cm. Calcule a área total.



Montado



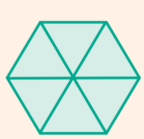
Planificado

Resolução:

Na figura, temos:
r: medida da aresta lateral = 6 cm
s: medida da aresta da base = 3 cm

Observando a figura, vemos que:
área lateral: $A_\ell = 6(r \cdot s) = 6(6 \cdot 3) = 108$
$A_\ell = 108 \text{ cm}^2$
área da base: A_b = área da região limitada pelo hexágono regular

A região hexagonal é formada por 6 regiões triangulares equiláteras:



Já estudamos no volume 2 que a área de uma região triangular equilátera de lado ℓ é dada por $A = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Nesse caso, temos:

$$A_b = 6 \cdot \frac{s^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} =$$

$$= A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Como são duas bases, temos:

$$2A_b = 2 \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_b = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

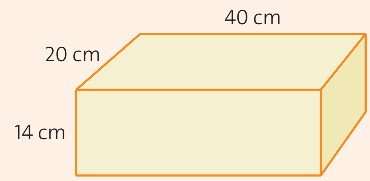
área total = área lateral + área das bases

Nesse caso, a área total é dada por:

$$A_t = A_\ell + 2A_b = \left(108 + 27\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$$

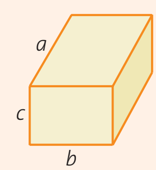
Como $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$, temos $A_t \simeq 153{,}9 \text{ cm}^2$.

4. Uma indústria precisa fabricar 10 000 caixas de sabão com as medidas da figura abaixo. Desprezando as abas, calcule, aproximadamente, quantos metros quadrados de papelão serão necessários.

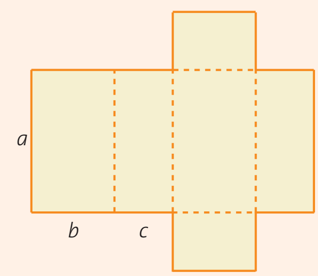


Resolução:

A caixa tem a forma de um paralelepípedo retângulo:



Montado



Planificado

Todo paralelepípedo retângulo é formado por 6 faces:

- duas regiões retangulares de medidas *a* e *b*;
- duas regiões retangulares de medidas *a* e *c*;
- duas regiões retangulares de medidas *b* e *c*.

Daí, temos:
área total: $A_t = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$

Nesse caso:
área de cada caixa: $A_t = 2(40 \cdot 20 + 40 \cdot 14 + 20 \cdot 14) =$
$= 2(800 + 560 + 280) = 3\,280$; $A_t = 3\,280 \text{ cm}^2$

Como são 10 000 caixas, temos:
$A = 3\,280 \cdot 10\,000 = 32\,800\,000$;
$32\,800\,000 \text{ cm}^2 = 3\,280 \text{ m}^2$

Portanto, serão necessários pelo menos 3 280 m^2 de papelão.

Fique atento!
Se 1 m = 100 cm,
então $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$

Exercícios

10. Quanto mede a diagonal de um paralelepípedo reto retangular no qual as dimensões são 10 cm, 6 cm e 8 cm?

11. Um cubo tem $10\sqrt{3}$ cm de aresta. Calcule a medida de sua diagonal.

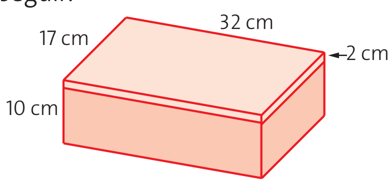
12. Em um cubo, a soma das medidas de todas as arestas é 48 cm. Calcule a medida da diagonal desse cubo.

13. A diagonal de um paralelepípedo reto retangular mede $20\sqrt{2}$ cm. As dimensões desse paralelepípedo são proporcionais aos números 5, 4 e 3, respectivamente. Calcule as dimensões desse paralelepípedo.

14. Um cubo tem aresta de 6 cm. Qual é a área total desse cubo?

15. Um paralelepípedo reto retangular tem dimensões de 4 cm, 5 cm e 8 cm. Qual é a área total desse paralelepípedo?

16. Quantos centímetros quadrados de papelão são gastos para fazer uma caixa de sapatos do tipo e tamanho a seguir?

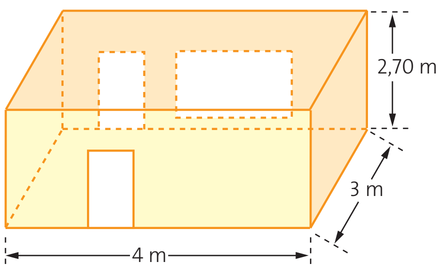


17. Um cubo tem área total de 96 m^2. Qual é a medida da aresta do cubo?

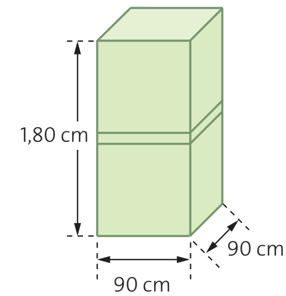
18. Em um prisma triangular regular, a aresta da base mede 4 cm e a aresta lateral mede 9 cm. Calcule a área lateral e a área total do prisma.

19. É dado um prisma pentagonal regular no qual a aresta da base mede 5 cm e a aresta lateral mede 10 cm. Calcule a área lateral do prisma.

20. Quantos metros quadrados de azulejo são necessários para revestir até o teto as quatro paredes de uma cozinha com as dimensões da figura abaixo? Sabe-se também que cada porta tem 1,60 m^2 de área e a janela tem uma área de 2 m^2.

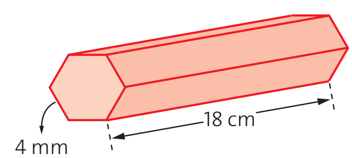


21. Quantos metros quadrados de madeira são gastos, aproximadamente, para fabricar 100 caixas para transportar geladeiras? (A forma e as medidas da caixa estão na figura ao lado.)

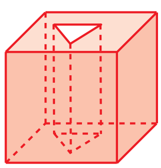


22. A diagonal de um cubo mede $10\sqrt{3}$ m. Qual é a área total desse cubo?

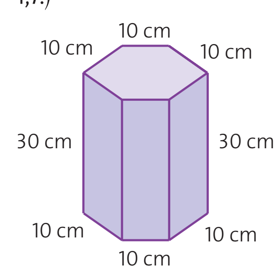
23. Quantos centímetros quadrados de papel adesivo são gastos para cobrir a superfície total de uma peça sextavada cuja forma e medidas estão na figura abaixo?



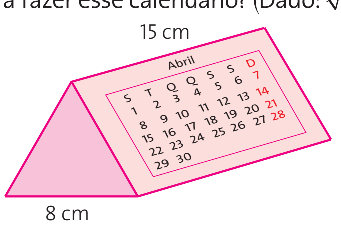
24. A figura ao lado nos mostra uma peça de enfeite. A aresta do cubo mede 20 cm. A cavidade, em forma de prisma regular de base triangular de aresta 5 cm, estende-se da face inferior à face superior do cubo. Determine a área total da peça.



25. Quantas caixas do tipo e tamanho abaixo podem ser feitas com 41 000 cm^2 de papelão? (Dado: $\sqrt{3} = 1{,}7$.)

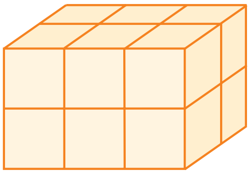


26. Um calendário tem o tipo e o tamanho da figura abaixo. Quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer esse calendário? (Dado: $\sqrt{3} = 1{,}7$.)

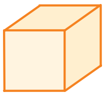


5 Ideia intuitiva de volume

Suponha que queiramos medir a quantidade de espaço ocupado por um sólido *S*. Para isso, precisamos comparar *S* com uma unidade de volume. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes o sólido *S* contém a unidade de volume. Esse número é a medida do volume de *S*, que costumamos dizer, simplesmente, volume de *S*.



Sólido *S*



Unidade de volume: U

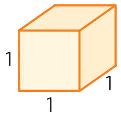
Por exemplo, o volume do sólido *S* acima é de 12 unidades de volume: 12 U, ou seja:

$$\text{volume de } S = 12 \text{ U}$$

Cubo unitário

Vamos estabelecer como **unidade de volume** um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado **cubo unitário**.

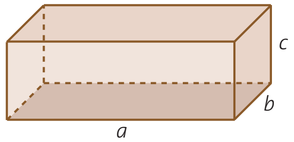
Qualquer cubo cuja aresta meça 1 terá, por definição, volume igual a 1.



Cubo unitário

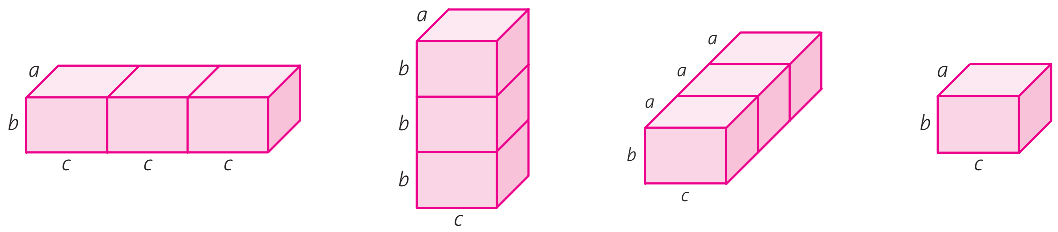
Volume do paralelepípedo retângulo ou bloco retangular

O bloco retangular é um poliedro formado por 6 faces retangulares. Ele fica determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c). Indicaremos o volume desse bloco retangular por $V(a, b, c)$ e o volume do cubo unitário por $V(1, 1, 1) = 1$.



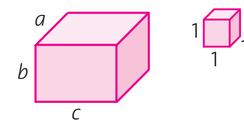
O volume do bloco retangular é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, se mantivermos constantes duas das dimensões e multiplicarmos a terceira dimensão por um número natural qualquer, o volume também será multiplicado pelo mesmo número natural. Isso pode ser observado no exemplo abaixo:

$$V(a, b, 3c) = V(a, 3b, c) = V(3a, b, c) = 3V(a, b, c)$$



É possível provar que esse fato, constatado com um número natural, vale para qualquer número real positivo. Ou seja, mantidas constantes duas dimensões do bloco retangular, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Assim, temos:

$V(a, b, c) = a \cdot V(1, b, c) = ab \cdot V(1, 1, c) = abc \cdot V(1, 1, 1) = abc \cdot 1 = abc$



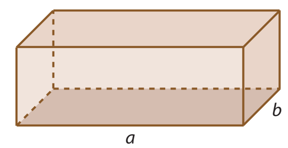
Logo:

$$\boxed{V(a, b, c) = abc}$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é dado pelo produto das suas dimensões.

Observações:

1ª) Como ab indica a área da base e c indica a altura, é possível também indicar o volume do paralelepípedo retângulo assim:

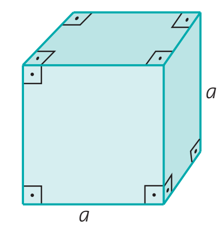


$$\boxed{V = A_b h}$$

em que $A_b = ab$ (área da base); $h = c$ (altura correspondente).

Assim, pode-se dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

2ª) Como o cubo é um caso particular de paralelepípedo retângulo com todas as arestas de medidas iguais, seu volume é dado por:



$$\boxed{V = a \cdot a \cdot a} \quad \text{ou} \quad \boxed{V = a^3}$$

3ª) Agora podemos provar o fato de figuras geométricas semelhantes de razão k entre suas grandezas lineares terem volumes com razão k^3. De fato, se $V(x, y, z)$ é o volume de um sólido qualquer e $V(kx, ky, kz)$ é o volume do sólido semelhante, então:

$V(kx, ky, kz) = kV(x, ky, kz) = k^2V(x, y, kz) = k^3V(x, y, z)$

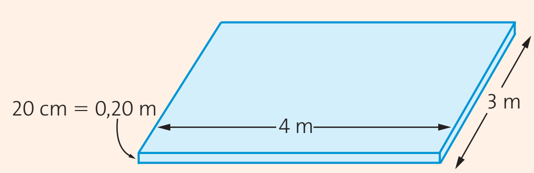
Ou seja:

$$\boxed{V(kx, ky, kz) = k^3V(x, y, z)}$$

passo a passo: exercício 7

Exercícios resolvidos

5. Qual é o volume de concreto necessário para construir uma laje de 20 cm de espessura em uma sala de 3 m por 4 m?



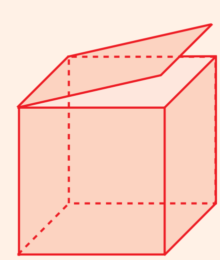
Resolução:

área da base: $A_b = 3 \cdot 4 = 12$; $A_b = 12\ \text{m}^2$

$V = \text{área da base} \cdot \text{altura} = A_b h = 12\ \text{m}^2 \cdot 0{,}20\ \text{m} = 2{,}40\ \text{m}^3$

São necessários $2{,}40\ \text{m}^3$ de concreto.

6. Sabendo que foram gastos $0{,}96\ \text{m}^2$ de material para montar a caixa cúbica cuja figura está ao lado, calcule o volume dessa caixa.



Resolução:

Nesse caso, a área total do cubo é:

$0{,}96\ \text{m}^2 = 96\ \text{dm}^2 = 9\,600\ \text{cm}^2$

Sabendo que $A_t = 6a^2$, temos:

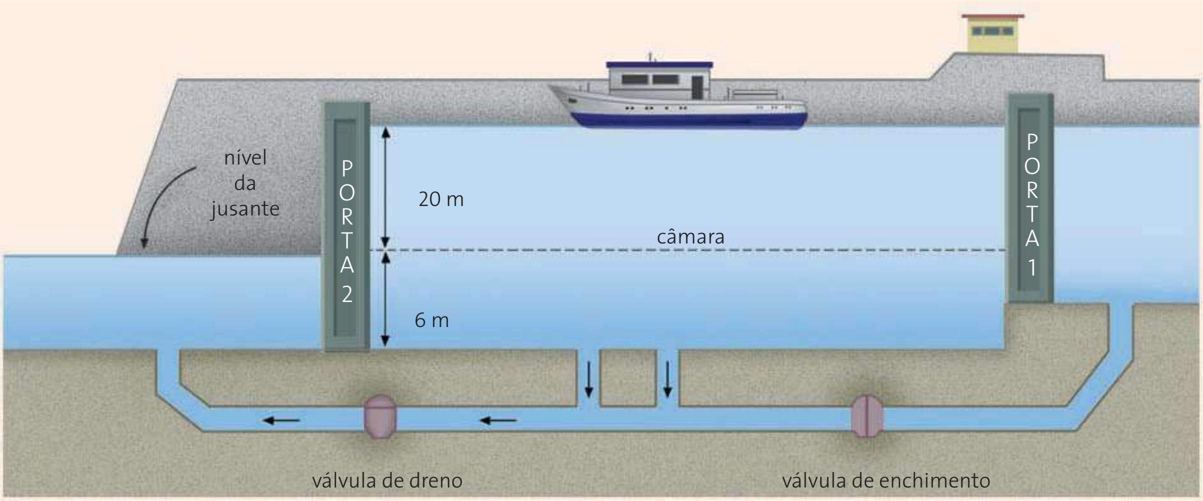
$9\,600 = 6a^2 \Rightarrow a^2 = 1600 \Rightarrow a = 40\ \text{cm}$

Como $V = a^3$, temos:

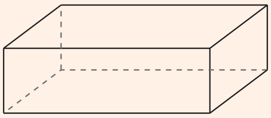
$V = (40\ \text{cm})^3 = 64\,000\ \text{cm}^3 = 64\ \text{dm}^3 = 0{,}064\ \text{m}^3$

Resolvido passo a passo

7. (Enem) Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema abaixo, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do rio Paraná até o nível da jusante.



Paulo Manzi/Arquivo da editora



Enquanto a válvula de enchimento está fechada e a de dreno, aberta, o fluxo de água ocorre no sentido indicado pelas setas, esvaziando a câmara até o nível da jusante. Quando, no interior da câmara, a água atinge o nível da jusante, a porta 2 é aberta, e a embarcação pode continuar navegando rio abaixo.

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4 200 m^3 por minuto. Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de:

a) 2 minutos. b) 5 minutos. c) 11 minutos. d) 16 minutos. e) 21 minutos.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dados o esquema de funcionamento da eclusa do porto Primavera, as dimensões da câmara da eclusa (200 m $\times$ 17 m), a diferença de nível de água entre as duas partes do rio Paraná (20 m) e a vazão de água quando a câmara é esvaziada (4 200 m^3/min).

b) O que se pede?

Pede-se o tempo que uma embarcação leva para descer pela eclusa.

2. Planejando a solução

O tempo que a embarcação leva para descer equivale ao tempo que a câmara leva para ser esvaziada. Dessa forma, sabendo-se o volume de água que precisa ser retirado da câmara e a vazão de saída da água, podemos calcular esse tempo.

3. Executando o que foi planejado

A câmara de água equivale a um paralelepípedo reto retângular, de dimensões 200 m $\times$ 20 m $\times$ 17 m.

Assim, seu volume é dado por $V = 200\text{ m} \cdot 20\text{ m} \cdot 17\text{ m} = 68000\text{ m}^3$ de água.

Uma vazão de 4 200 m^3 de água por minuto significa que, a cada minuto, saem da câmara 4 200 m^3 de água.

Logo, o tempo necessário para escoar toda a água é de $\frac{68\,000}{4\,200} \simeq 16{,}20$ min.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **d**.

5. Ampliando o problema

a) Suponha que se deseje que o tempo de descida da embarcação não supere 10 min. Nesse caso, qual teria de ser a vazão mínima de água?

b) *Discussão em equipe*

Eclusa é uma obra de Engenharia que permite que barcos subam ou desçam os rios ou mares em locais onde há desníveis (barragem, quedas-d'água ou corredeiras), permitindo assim a navegação em trechos que de outro modo não seriam navegáveis. São "elevadores", que levam o navio de um "andar" para outro em um rio ou mar.

Troque ideias com seus colegas sobre estas questões:

- O transporte fluvial (pelos rios) é importante?
- Ele é necessário?
- Vale a pena gastar dinheiro fazendo eclusas?

Para ajudar a formação de opinião, leiam o texto abaixo sobre o Canal do Panamá:

O Canal do Panamá é um canal com 82 quilômetros de extensão, que corta o istmo do Panamá, ligando assim o oceano Atlântico e o oceano Pacífico, no Panamá. O canal possui dois grupos de eclusas no lado do Pacífico e um no do Atlântico. Neste último, as portas maciças de aço das eclusas triplas de Gatún têm 21 metros de altura e pesam 745 toneladas cada uma, mas são tão bem contrabalançadas que um motor de 30 kW é suficiente para abri-las e fechá-las. O lago Gatún, que fica a 26 metros acima do nível do mar, é alimentado pelo rio Chagres, onde foi construída uma barragem para a formação do lago. Do lago Gatún, o canal passa pela falha de Gaillard e desce em direção ao Pacífico, primeiramente através de um conjunto de eclusas em Pedro Miguel, no lago Miraflores, a 16,5 metros acima do nível do mar e, depois, através de um conjunto duplo de eclusas em Miraflores. Todas as eclusas do canal são duplas, de modo que os barcos possam passar nas duas direções. Os navios são dirigidos ao interior das eclusas por pequenos aparelhos ferroviários. O lado do Pacífico é 24 centímetros mais alto do que o lado do Atlântico, e tem marés muito mais altas.

Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Canal_do_Panamá>.
Acesso em: 16 out. 2012.

c) *Pesquisa*

- Quando o Canal do Panamá entrou em atividade?
- Que grande acontecimento mundial teve início no mesmo ano da inauguração do Canal do Panamá?

Exercícios

27. Qual é o volume de um cubo de aresta $5\sqrt{3}$ cm?

28. Quanto mede a aresta de um cubo que tem 1000 dm^3 de volume?

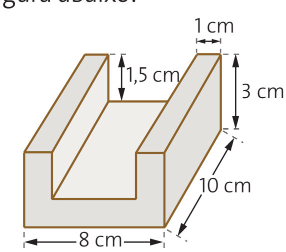
29. Em um paralelepípedo, as dimensões da base são 4 cm e 7 cm. Se a altura do paralelepípedo é de 5 cm, determine o seu volume.

30. Quantos litros de água são necessários para encher uma caixa-d'água cujas dimensões são: 1,20 m por 0,90 m por 1 m? (Lembre-se: $1000\ \ell = 1\ m^3$.)

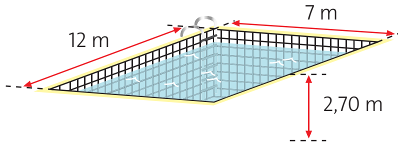
31. Quantos dados podem ser colocados em uma caixa cúbica de 20 cm de aresta, se esses dados forem cubos de 2 cm de aresta?

32. Três cubos de chumbo, com arestas de 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente, são fundidos em uma só peça cúbica. Qual é o volume da peça cúbica obtida?

33. Qual é o volume de um sólido cuja forma e medidas estão na figura abaixo?



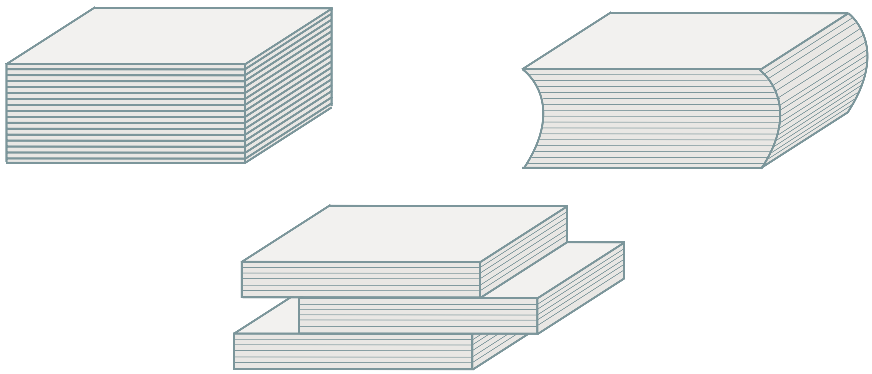
34. Observe a piscina representada abaixo e as dimensões indicadas. Qual é a quantidade máxima de água, em litros, que essa piscina pode conter?



Formato Comunicação/Arquivo da editora

6 Princípio de Cavalieri

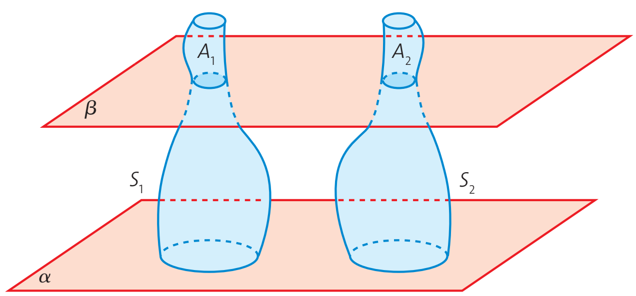
Imagine três pilhas com o mesmo número de folhas de papel, arrumadas de formas diferentes, como indicam as figuras:



Note que qualquer plano horizontal que seccione as três pilhas terá intersecções de mesma área (uma folha); note também que as três pilhas têm volumes iguais (só mudam as formas).

Essa situação serve para ilustrar o **princípio de Cavalieri**, que veremos em seguida.

Vamos considerar os sólidos S_1 e S_2 apoiados em um plano horizontal α. Consideremos também o plano β, paralelo a α, que, ao seccionar S_1, também secciona S_2, determinando duas regiões planas de áreas A_1 e A_2.



Nessas condições, podemos afirmar que, **se para todo plano β temos $A_1 = A_2$**, então:

$$\textbf{volume } S_1 = \textbf{volume } S_2$$

É possível demonstrar o princípio de Cavalieri, mas aqui vamos considerá-lo verdadeiro sem fazer sua demonstração. Veremos que esse princípio simplifica muito o cálculo de volumes.

CURIOSIDADE

O italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que foi discípulo de Galileu, publicou em 1635 sua **teoria do indivisível**, contendo o que hoje é conhecido como “princípio de Cavalieri”. Entretanto, sua teoria, que permitia que se encontrasse rapidamente e com exatidão a área e o volume de muitas figuras geométricas, foi duramente criticada na época. Segundo seus críticos, a teoria não se mostrava suficientemente embasada.

Mal sabiam estes que o princípio de Cavalieri seria um dos pilares do que hoje conhecemos como cálculo integral, ajudando a definir a noção de integral.

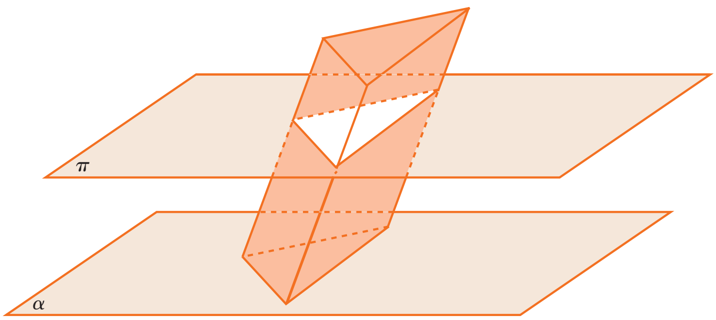
Em 1647 Cavalieri publicou a obra *Exercitationes geometricae sex*, na qual apresentou de maneira mais clara sua teoria. Esse livro transformou-se em fonte importante para os matemáticos do século XVII. Cavalieri também escreveu sobre Astronomia e Óptica.

Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/cavaliere.htm>. Acesso em: 16 out. 2012.

7 Volume do prisma

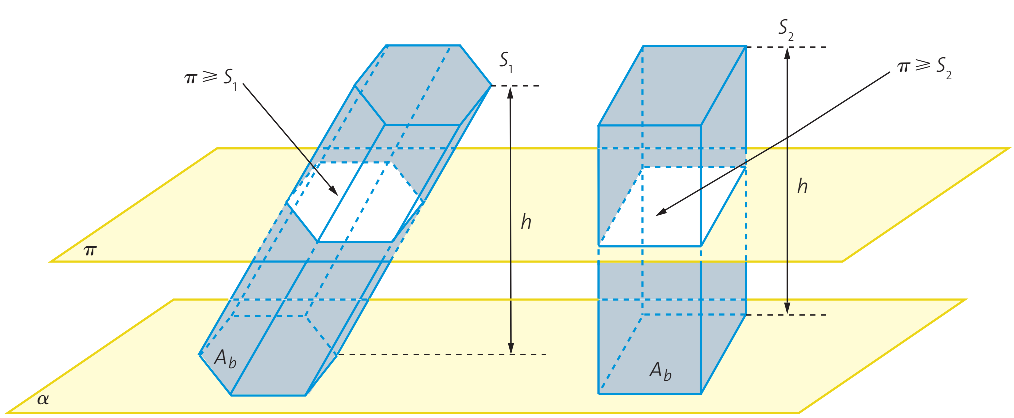
Para calcular o volume de um prisma qualquer, aplicamos o princípio de Cavalieri.

Inicialmente, observamos que, em um prisma qualquer com a base contida em um plano α, se π é paralelo a α, a secção determinada por π no prisma será sempre congruente à base, e por isso essa secção e a base terão sempre áreas iguais.



Fique atento!
Em todo prisma, uma secção paralela à base é congruente a essa base.

Podemos agora calcular o volume de um prisma qualquer, utilizando o paralelepípedo retângulo como auxílio.



Vamos considerar um prisma S_1, cuja área da base é A_b e a altura é h, e também um paralelepípedo retângulo S_2, cuja área da base é A_b e a altura é h. O plano α que contém as bases é horizontal. Qualquer plano horizontal π que secciona os dois sólidos determina no prisma S_1 a secção $\pi \cap S_1$, cuja área é igual a A_b, e no paralelepípedo retângulo S_2 determina a secção $\pi \cap S_2$, cuja área é igual a A_b.

Como área $(\pi \cap S_1) = A_b$ e área $(\pi \cap S_2) = A_b$, para qualquer plano horizontal π temos:

$$\text{área } (\pi \cap S_1) = \text{área } (\pi \cap S_2)$$

Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que:

$$\text{volume do prisma} = \text{volume do paralelepípedo retângulo}$$

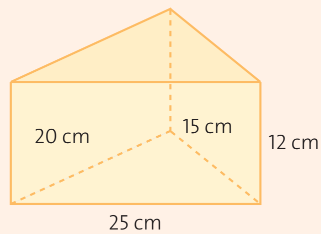
Como o volume do paralelepípedo retângulo é obtido multiplicando a área da base pela altura, temos:

$$\text{volume do prisma} = \text{área da base} \cdot \text{altura}$$

$$V = A_b h$$

Exercícios resolvidos

8. Calcule o volume do prisma reto indicado na figura abaixo, cuja base é um triângulo retângulo.



Resolução:

A base desse prisma é um triângulo retângulo de catetos 15 cm e 20 cm:

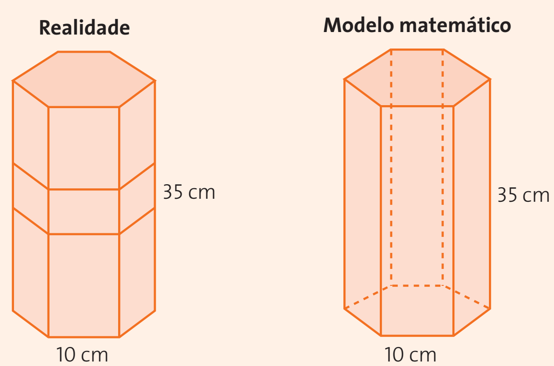
$A_b = \dfrac{15 \cdot 20}{2} = 150$

A altura do prisma é de 12 cm. Seu volume é:

$V = A_b h = 150 \cdot 12 = 1800$

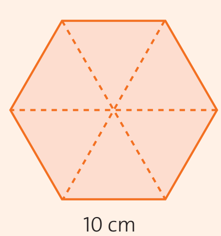
Logo, o volume do prisma é de 1800 cm^3.

9. Queremos encher de areia a caixa indicada na figura abaixo à esquerda. Qual é o volume de areia que cabe nessa caixa?



Resolução:

A área da base é a área de um hexágono regular cujo lado mede 10 cm.



Sabemos que o hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros e que a área de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Logo, a área da base é dada por:

$A_b = 6 \cdot \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$

O volume do prisma é dado por $V = A_b h$, sendo $A_b \simeq 150\sqrt{3}$ cm^2 e $h = 35$ cm.

$V = 150\sqrt{3}\ cm^2 \cdot 35\ cm = 5250\sqrt{3}\ cm^3$

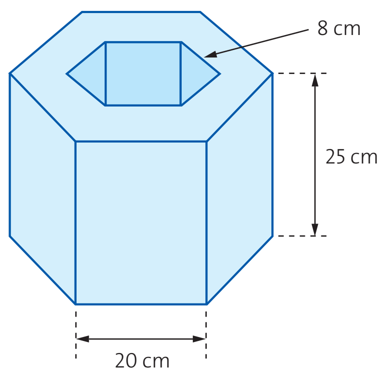
O volume de areia que cabe nessa caixa é de, aproximadamente, $5250\sqrt{3}$ cm^3.

Exercícios

35. Determine o volume de um prisma triangular regular no qual a aresta da base mede 4 cm e a altura mede $10\sqrt{3}$ cm.

36. Uma barra de ouro é fundida na forma de um prisma cuja base é um trapézio. As bases desse trapézio medem 8 cm e 12 cm e a altura da barra é 5 cm. O comprimento da barra é 30 cm. Qual é o seu volume?

37. Calcule o volume de uma peça de metal cuja forma e medidas estão na figura abaixo:

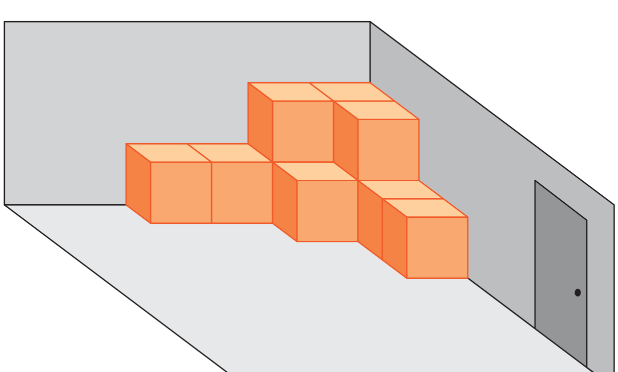


38. A área lateral de um prisma triangular regular é 36 cm^2. A altura do prisma é o triplo da aresta da base. Calcule o volume do prisma.

39. O volume de um prisma regular de base quadrada é 700 cm^3. O perímetro da base é de 40 cm. Calcule a altura e a área total do prisma.

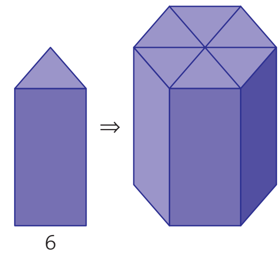
40. A base de um prisma reto é um hexágono regular de lado 8 cm. As faces laterais desse prisma são quadradas. Calcule o volume e a área total do prisma.

41. No canto da sala, foram empilhados alguns cubos, como mostra a figura.



Todos os cubos têm a mesma medida da aresta, que mede 1 m. Qual é o volume total dos cubos empilhados na sala?

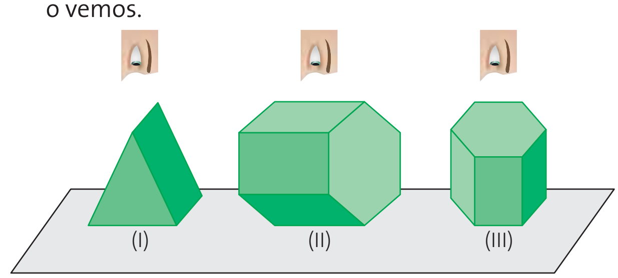
42. Seis prismas triangulares regulares de aresta da base 2 cm foram juntados formando um prisma hexagonal regular, como mostra a figura:



a) O volume total dos 6 prismas triangulares somados é igual, maior ou menor que o volume do prisma hexagonal? Justifique.

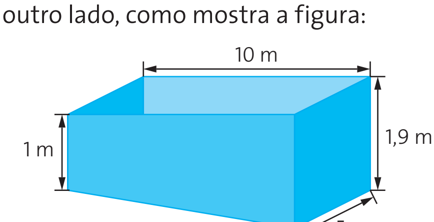
b) A área total dos 6 prismas triangulares somados é igual, maior ou menor que a área total do prisma hexagonal? Justifique.

43. Uma pessoa observa de cima cada um destes prismas, conforme indica a figura. Desenhe, em seu caderno, o que ela vê em cada caso. Lembre-se de que o contorno de uma figura é sempre aparente, ou seja, nós o vemos.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

44. Antônio é proprietário de uma chácara e decidiu fazer uma piscina para seus filhos. Para isso quer utilizar uma área de 5 m de largura por 10 m de comprimento. Antônio quer que sua piscina tenha uma profundidade de 1 m em um lado e uma profundidade de 1,90 m em outro lado, como mostra a figura:



Quantos metros cúbicos serão necessários para que Antônio encha essa piscina de modo que falte 0,4 metro, na altura, para enchê-la totalmente?

a) 52,5 m^3
b) 72,5 m^3
c) 95 m^3
d) 9,5 m^3
e) 57 m^3

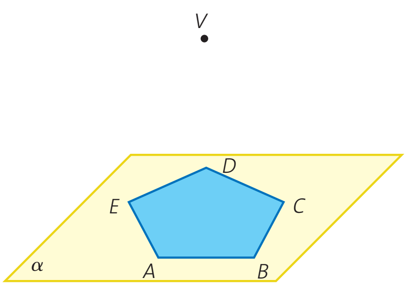
8 Pirâmides

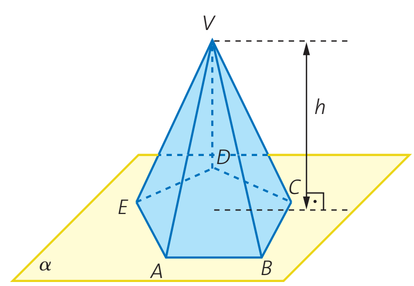
CONTEÚDO DIGITAL

Construção e definição de pirâmide

Considere uma região poligonal, por exemplo *ABCDE*, contida em um plano α e um ponto *V* exterior ao plano da região poligonal.

Traçamos os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$. Cada dois vértices consecutivos de *ABCDE* determinam com *V* uma região triangular. Essas regiões triangulares, juntamente com a região poligonal *ABCDE*, determinam um poliedro chamado **pirâmide** de base *ABCDE* e vértice *V*.





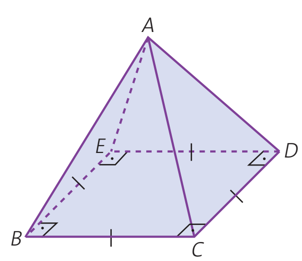
A região do espaço ocupada pela pirâmide é formada pelos pontos dos segmentos de reta que ligam o vértice *V* aos pontos da região poligonal (base).

A distância do vértice ao plano da base, que indicamos por *h*, é chamada **altura** da pirâmide.

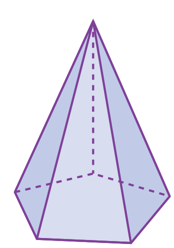
Os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$ são chamados **arestas laterais**, e as regiões triangulares *VAB*, *VBC*, *VCD*, *VDE* e *VEA* são chamadas **faces laterais** da pirâmide.

Veja a seguir alguns exemplos de pirâmides:

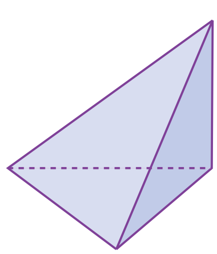
1º)



2º)



3º)



A 1ª pirâmide, *ABCDE*, é uma pirâmide de base quadrada (ou pirâmide quadrangular); a região poligonal *BCDE* é sua base, $\overline{AC}$ é uma aresta lateral, $\overline{BC}$ é uma aresta da base e a região triangular *ACD* é uma das faces laterais.

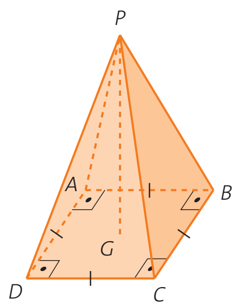
A 2ª é uma pirâmide de base pentagonal (ou pirâmide pentagonal) e a 3ª tem base triangular (tetraedro).

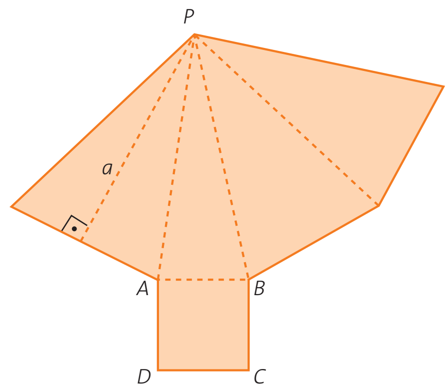
Observação: Se todas as arestas laterais são congruentes, a pirâmide é **reta**; caso contrário, ela é **oblíqua.** Nos exemplos dados, a 1ª e a 2ª são pirâmides retas e a 3ª é oblíqua.

Pirâmide regular

Pirâmide regular é uma pirâmide reta cuja base é uma região poligonal limitada por um polígono regular.

Vamos considerar uma pirâmide cuja base é uma região quadrada e com arestas laterais congruentes:





Pirâmide planificada

> **Fique atento!**
> Polígono regular é o que tem todos os lados e todos os ângulos internos congruentes. Ele pode sempre ser inscrito em uma circunferência, cujo centro é considerado também centro do polígono regular.

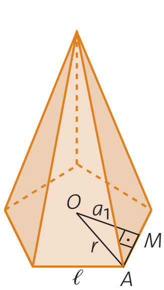
Essa pirâmide é regular, pois sua base é uma região poligonal regular (quadrada) e suas arestas são congruentes (pirâmide reta).

Nesse caso, podemos ainda afirmar que:

- o segmento ($\overline{PG}$) que liga o vértice ao centro da base é a altura da pirâmide;
- as faces laterais são regiões triangulares isósceles e congruentes;
- a altura de cada face lateral é conhecida por **apótema** da pirâmide regular (a).

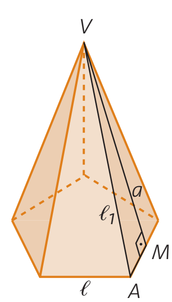
Observação: Em toda pirâmide regular devemos destacar quatro importantes triângulos retângulos nos quais aparecem: a aresta da base (ℓ), a aresta lateral (ℓ_1), o raio da base (r), o apótema da pirâmide (a), o apótema da base (a_1) e a altura da pirâmide (h).

Veja, em uma pirâmide regular pentagonal, a aplicação da relação de Pitágoras nestes triângulos:



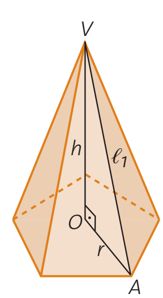
$\triangle OMA$

$$r^2 = a_1^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$



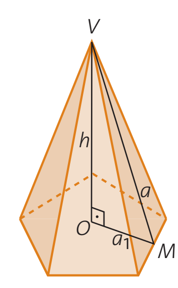
$\triangle VMA$

$$\ell_1^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$



$\triangle VOA$

$$\ell_1^2 = h^2 + r^2$$



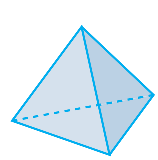
$\triangle VOM$

$$a^2 = h^2 + a_1^2$$

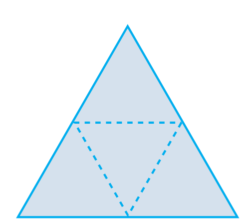
Caso particular importante: o tetraedro regular

Uma pirâmide particular formada por quatro regiões triangulares congruentes e equiláteras é o **tetraedro regular** (*tetra*: quatro; *edro*: face).

Nele, qualquer uma das faces pode ser considerada base. O tetraedro regular é um caso particular de pirâmide regular.



Tetraedro regular



Planificado

Área da superfície da pirâmide

Do mesmo modo que foi visto nos prismas, nas pirâmides também temos:

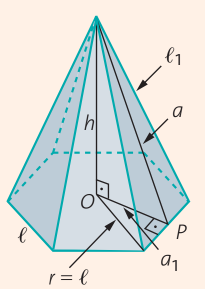
- **superfície lateral**: é formada pelas faces laterais (triangulares);
- **área lateral**: é a área da superfície lateral;
- **superfície total**: é formada pelas faces laterais e pela base;
- **área total**: é a área da superfície total.

Exercício resolvido

10. Uma pirâmide regular hexagonal tem 8 cm de altura e a aresta da sua base mede $4\sqrt{3}$ cm. Calcule a área total.

Resolução:

Sabemos que:



$$\begin{cases} A_{total} = A_{base} + A_{lateral}\ (A_t = A_b + A_\ell) \\ a_1 = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \\ A_b = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \\ r = \ell \\ r^2 = \ell^2 = a_1^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \\ a^2 = h^2 + a_1^2 \\ \ell = 4\sqrt{3} \\ h = 8 \end{cases}$$

- Cálculo de A_b (área da base):

$$A_b = 6 \cdot \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 16 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3}$$

- Cálculo de a_1 (apótema da base):

$$a_1 = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$$

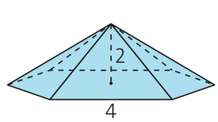
ou

$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = a_1^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1^2 = 48 - 12 = 36 \Rightarrow a_1 = 6$$

- Cálculo de a (apótema da pirâmide):
$a^2 = 8^2 + (6)^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow a = 10$
- Cálculo de A_ℓ (área lateral):
$A_\ell = 6 \cdot \dfrac{\ell a}{2} = 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 10 = 120\sqrt{3}$
- Cálculo de A_t (área total):
$A_t = A_b + A_\ell = 72\sqrt{3} + 120\sqrt{3} =$
$= 192\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 192\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Exercícios

45. Uma pirâmide regular hexagonal tem 2 cm de altura e a aresta da sua base mede 4 cm. Calcule:
a) o apótema da base;
b) o apótema da pirâmide;
c) a aresta lateral;
d) a área da base;
e) a área lateral;
f) a área total.



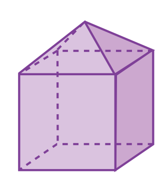
46. Determine a área total de uma pirâmide regular cuja altura é 15 cm e cuja base é um quadrado de 16 cm de lado.

47. Uma pirâmide quadrangular regular tem todas as arestas iguais e a área da base é igual a 16 cm². Qual é a área total da pirâmide?

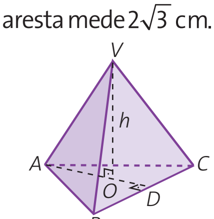
48. Determine a área total de uma pirâmide regular hexagonal, sabendo que a aresta da base mede 8 cm e a altura da pirâmide mede 12 cm.

49. A soma das medidas de todas as arestas de um tetraedro regular é 72 cm. Calcule a área total do tetraedro.

50. A base de uma pirâmide é uma das faces de um cubo de aresta 2 cm. Sendo a aresta lateral da pirâmide igual à diagonal do cubo e supondo que a pirâmide e o cubo estão em semiespaços opostos em relação ao plano da base da pirâmide (figura ao lado), calcule a área total do sólido formado pela união da pirâmide com o cubo.

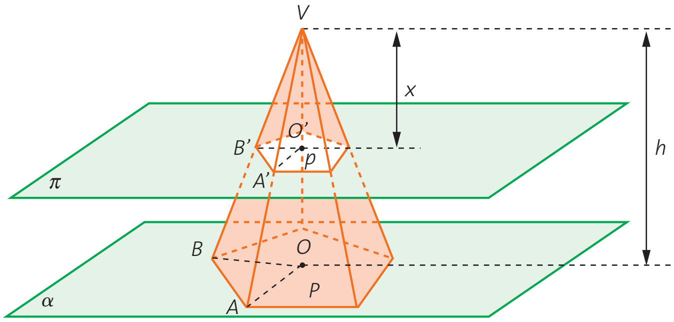


51. ATIVIDADE EM DUPLA Em um tetraedro regular, a aresta mede $2\sqrt{3}$ cm. Calculem:
a) a altura do tetraedro;
b) a área total.
(Dica: o ponto O é o baricentro do triângulo ABC.)



Volume da pirâmide

Observe a figura abaixo:



Fique atento!

Regiões poligonais semelhantes têm ângulos congruentes e segmentos correspondentes proporcionais. Se $\frac{a}{b}$ é a razão constante entre seus segmentos correspondentes, então $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ é a razão entre suas áreas.

A pirâmide tem a base *P* contida no plano α e está sendo seccionada pelo plano horizontal π, paralelo a α.

A secção da pirâmide pelo plano π é uma região poligonal *p* semelhante à base *P*. É interessante notar que a secção de uma pirâmide por um plano paralelo à base destaca uma pirâmide menor, que é semelhante à original. A pirâmide miniatura tem base *p* e altura *x* (distâncias do ponto *V* ao plano π), e a pirâmide original tem base *P* e altura *h*.

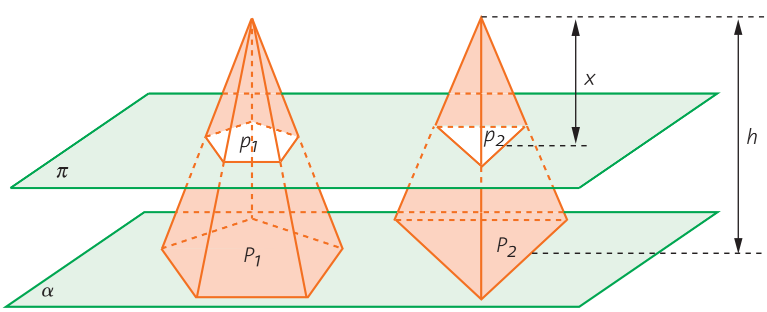
Como já estudamos, se duas figuras geométricas são semelhantes, com razão *k* entre suas dimensões lineares, então suas áreas têm razão k^2. No caso, *k* é a razão entre as alturas *h* e *x* das pirâmides semelhantes.

$$k = \frac{h}{x} \Rightarrow k^2 = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

Assim, se *p* e *P* são semelhantes, então:

$$\frac{\text{área de } P}{\text{área de } p} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

Vamos agora considerar duas pirâmides cujas áreas das bases são iguais e que têm a mesma altura. Vejamos o que acontece com as áreas das secções transversais situadas a uma mesma distância do vértice da pirâmide.



Já vimos que $\frac{\text{área de } P_1}{\text{área de } p_1} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$ e $\frac{\text{área de } P_2}{\text{área de } p_2} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$.

Daí tiramos $\frac{\text{área de } P_1}{\text{área de } p_1} = \frac{\text{área de } P_2}{\text{área de } p_2}$.

Como consideramos inicialmente que área de P_1 = área de P_2, concluímos que:

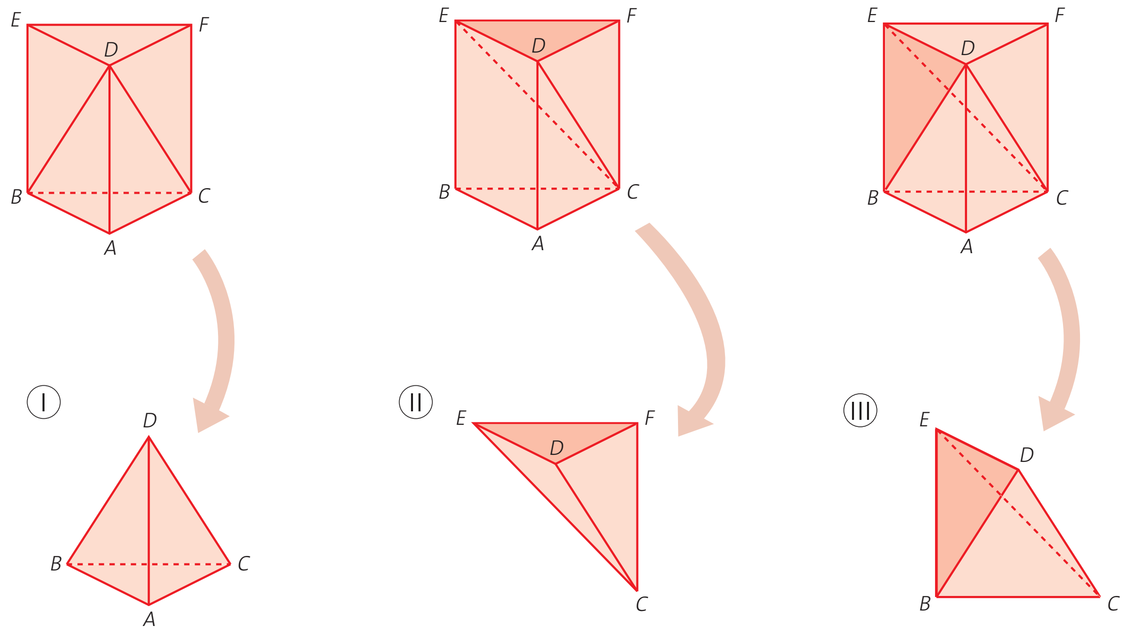
área de p_1 = área de p_2 para qualquer plano horizontal π.

Então, pelo princípio de Cavalieri, os volumes das pirâmides são iguais, ou seja:

Pirâmides com áreas das bases iguais e com mesma altura têm volumes iguais.

Cálculo do volume da pirâmide triangular

Vamos agora decompor um prisma triangular em três pirâmides, como indicam as figuras:



Observações:

1ª) As pirâmides **I** e **II** têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, os triângulos *ABC* e *DEF* são congruentes e a distância de *D* ao plano (*ABC*) é igual à distância de *C* ao plano (*DEF*) – altura do prisma original. Logo, **I** e **II** têm mesmo volume.

2ª) As pirâmides **II** e **III** também têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo *CEF* é congruente ao triângulo *BCE*, pois cada um deles é a metade do paralelogramo *BCFE*, e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de *D* ao plano (*BCFE*). Logo, **II** e **III** têm o mesmo volume. Assim, $V_{I} = V_{II}$ e $V_{II} = V_{III}$ e, portanto, os três volumes são iguais.

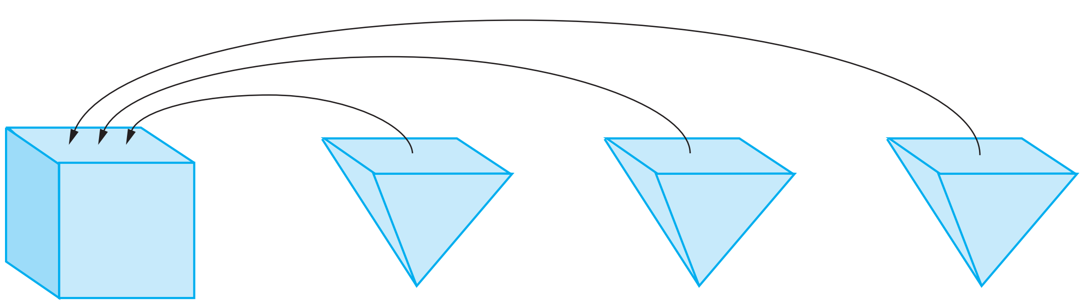
Lembrando que $V_{prisma} = V_{I} + V_{II} + V_{III}$ e fazendo $V_{I} = V_{II} = V_{III} = V$, temos:

$$V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Como $V_{prisma} =$ área da base · altura, temos:

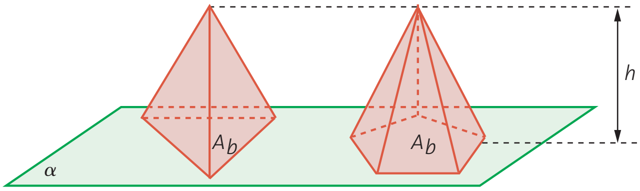
$$V \text{ ou } V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

3ª) A propriedade citada na 2ª observação pode ser verificada experimentalmente. Se quiséssemos encher de água uma vasilha em forma de prisma usando um recipiente em forma de pirâmide, com mesma base e mesma altura, seria necessário usá-lo três vezes para encher a vasilha.



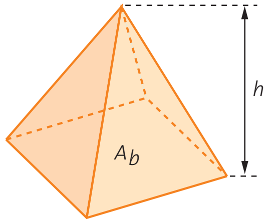
Cálculo do volume de uma pirâmide qualquer

Agora, para determinarmos o volume de uma **pirâmide qualquer**, usamos a conclusão anterior e o princípio de Cavalieri. Assim, dada uma pirâmide qualquer, consideramos uma pirâmide triangular que tenha a mesma área da base e a mesma altura que uma pirâmide qualquer.



O princípio de Cavalieri garante que duas pirâmides com áreas das bases iguais e com a mesma altura têm volumes iguais. Então:

volume da pirâmide triangular = volume de uma pirâmide qualquer (de mesma área da base e mesma altura)



Como o volume da pirâmide triangular é obtido fazendo $\frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$, concluímos que:

$$\text{volume de uma pirâmide qualquer} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

ou seja:

$$\boxed{V = \frac{A_b h}{3}}$$

Exercícios resolvidos

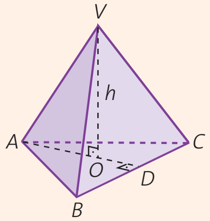
11. Qual é o volume de um tetraedro regular de aresta a?

Resolução:

Sabemos que, em um tetraedro regular (figura abaixo), as quatro faces são triângulos equiláteros.

Vamos calcular a área da base: $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (área de um triângulo equilátero de lado a).

Calculamos, agora, a altura do tetraedro:



- O é o centro do triângulo equilátero ABC
- $\overline{AD}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$
- $\overline{AO} = \frac{2}{3}\,\overline{AD}$
- $\overline{AD}$ é a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$:

$\overline{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Das observações feitas, podemos concluir que:

$$\overline{AO} = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Considerando o triângulo retângulo AOV ($\hat{O}$ é reto), temos:

$$\overline{AV}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OV}^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vamos, agora, calcular o volume:

$$V = \frac{A_b h}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Então, o volume do tetraedro regular é $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

12. Calcule o volume de uma pirâmide quadrada cuja aresta da base mede 4 cm e a altura, 7 cm.

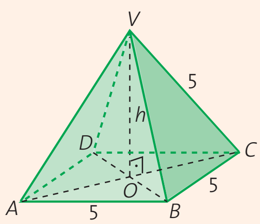
Resolução:

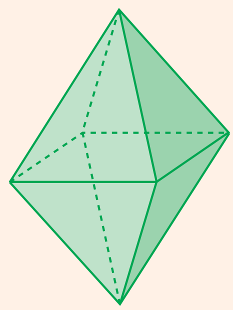
$A_b = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$

$h = 7\text{ cm}$

$$V = \frac{A_b h}{3} = \frac{16\text{ cm}^2 \cdot 7\text{ cm}}{3} = \frac{112\text{ cm}^3}{3} \simeq 37{,}3\text{ cm}^3$$

13. Quando duas pirâmides regulares de bases quadradas e cujas faces laterais são triângulos equiláteros são colocadas base a base, o sólido resultante (figura abaixo à direita) é chamado octaedro regular. Calcule o volume do octaedro regular de aresta 5 cm.





Resolução:

Vamos calcular a altura de cada pirâmide:

- $\overline{AC} \to$ diagonal do quadrado: $5\sqrt{2}$
- $\overline{VO} \to$ altura da pirâmide (h)
- $\overline{OC} \to$ metade da diagonal do quadrado: $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

No triângulo retângulo VOC ($\hat{O}$ é reto) temos:

$$5^2 = h^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 25 - \frac{50}{4} = \frac{50}{4} \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Vamos calcular o volume:

$A_b = 5 \cdot 5 = 25$

$$V = \frac{A_b h}{3} = \frac{25 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}}{3} \simeq \frac{125 \cdot 1{,}4}{6} \simeq 29{,}1$$

Como são duas pirâmides, temos:

$V \simeq 2 \cdot 29{,}1 = 58{,}2$

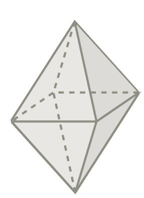
Portanto, o volume do octaedro regular é de aproximadamente $58{,}2\text{ cm}^3$.

Exercícios

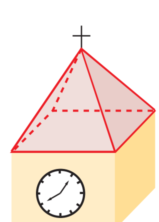
52. Calcule o volume de uma pirâmide quadrada cuja aresta da base mede 15 cm e a altura mede 9 cm.

53. A aresta da base de uma pirâmide quadrada mede 10 cm e a altura da pirâmide mede 12 cm. Determine o volume da pirâmide.

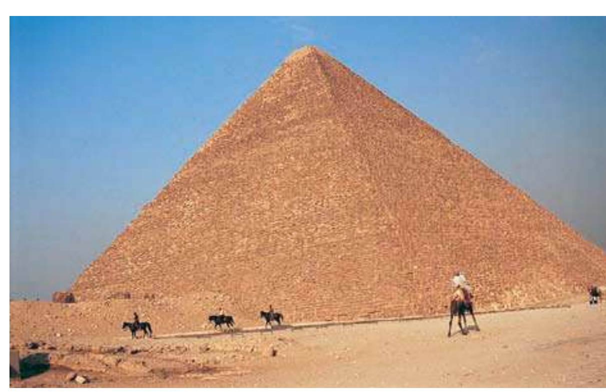
54. Uma pedra preciosa tem a forma da figura ao lado. Sabendo que a pedra tem 6 mm em todas as arestas, calcule o volume da pedra.



55. A parte mais alta da torre de uma igreja é uma pirâmide quadrada (figura ao lado). A aresta da base tem 6 m e a altura da pirâmide é 4 m. Qual é o volume dessa parte da torre?



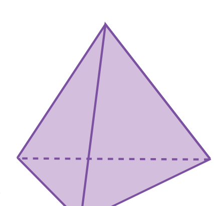
56. A Pirâmide de Quéops é conhecida como a Grande Pirâmide do Egito. Sua base tem aproximadamente 230 m de aresta e sua altura é de 137 m. Qual é o volume dessa pirâmide?



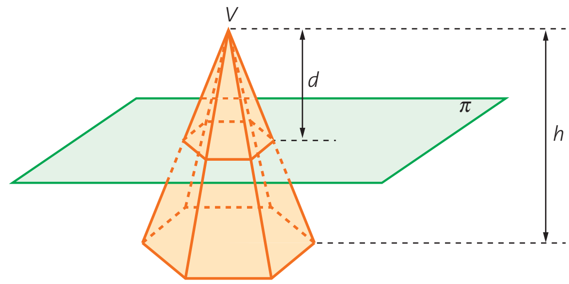
Petr Svarc/Getty Images

Pirâmide de Quéops.

57. Uma peça maciça de cristal tem o formato de um tetraedro (figura ao lado). Sabendo que cada aresta da peça mede 10 cm, qual é o volume de cristal usado para fazer essa peça?



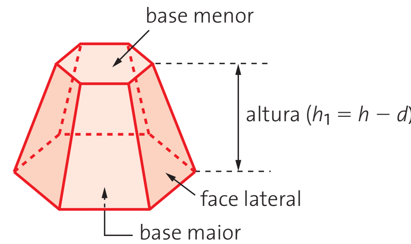
Tronco de pirâmide



Vamos considerar uma pirâmide de vértice *V* e altura *h*. Traçando um plano π paralelo à base, que secciona a pirâmide a uma distância *d* do vértice, obtemos dois poliedros: uma pirâmide de vértice *V* e altura *d* e um poliedro que é chamado **tronco** da pirâmide inicial.

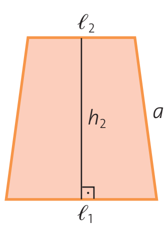
No tronco da pirâmide, destacamos:

- duas bases: a base da pirâmide inicial (base maior do tronco) e a secção determinada por π (base menor do tronco);
- as faces laterais, que são regiões limitadas por trapézios;
- a distância entre as bases do tronco, que se chama altura do tronco; sua medida é expressa por $h_1 = h - d$.



Quando a pirâmide original é regular, o tronco de pirâmide é chamado regular e, nesse caso:

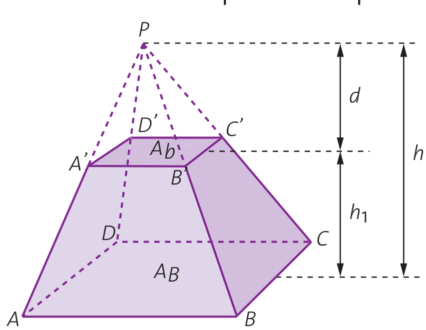
- as bases são regiões poligonais regulares e semelhantes;
- as faces laterais são regiões limitadas por trapézios isósceles;
- a altura de um desses trapézios é chamada **apótema** do tronco.



ℓ_1 = aresta da base maior do tronco
ℓ_2 = aresta da base menor do tronco
a = aresta lateral do tronco
h_2 = apótema do tronco (ou altura da face lateral)

Volume do tronco de pirâmide

Consideremos o tronco de pirâmide representado pela figura abaixo.



A_B = área da base maior
A_b = área da base menor
h = altura da pirâmide *PABCD*
d = altura da pirâmide *PA'B'C'D'*
h_1 = altura do tronco
V = volume do tronco

Demonstra-se que o volume do tronco da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{h_1}{3}\left(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b\right)$$

Fique atento!
Na prática, em geral é mais adequado obter o volume do tronco pela subtração dos volumes das pirâmides semelhantes (o original e a miniatura), em vez de decorar a fórmula acima. Entretanto, fica a critério de cada um o processo a ser usado.

CONTEÚDO DIGITAL

Exercícios resolvidos

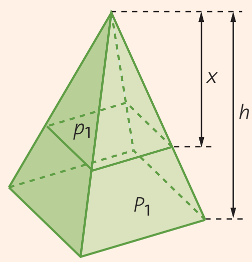
14. A área da base de uma pirâmide é 36 cm². Uma secção transversal feita a 3 cm da base tem 9 cm² de área. Calcule a altura da pirâmide.

Na figura, temos:

$P_1 = 36\text{ cm}^2$

$p_1 = 9\text{ cm}^2$

$h - x = 3\text{ cm} \Rightarrow x = h - 3$



$\dfrac{P_1}{p_1} = \dfrac{h^2}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{36}{9} = \dfrac{h^2}{(h-3)^2} \Rightarrow$

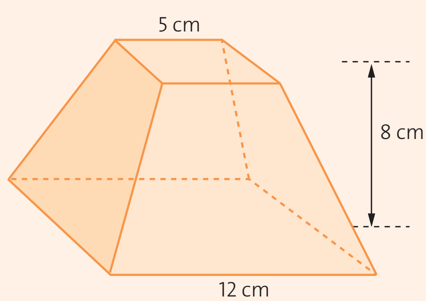
$\Rightarrow 4 = \dfrac{h^2}{(h-3)^2} \Rightarrow 2 = \dfrac{h}{h-3} \Rightarrow 2h - 6 = h \Rightarrow h = 6$

A altura da pirâmide é 6 cm.

15. Um tronco de pirâmide tem como bases duas regiões quadradas de lados 5 cm e 12 cm. A altura do tronco é 8 cm. Calcule o volume desse tronco.

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula



$A_B = 12\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 144\text{ cm}^2$

$A_b = 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 25\text{ cm}^2$

$h_1 = 8\text{ cm}$

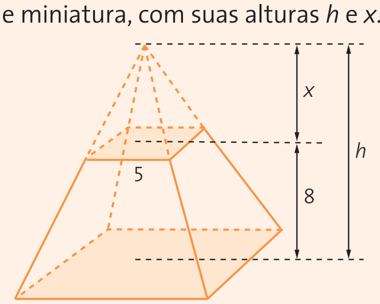
$V = \dfrac{h_1}{3}\left(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b\right) = \dfrac{8}{3}(144 + 60 + 25) =$

$= \dfrac{8}{3} \cdot 229 = \dfrac{1\,832}{3} \simeq 610{,}6$

O volume do tronco é de 610,6 cm³, aproximadamente.

2ª maneira: sem usar a fórmula

A partir do tronco, consideremos as pirâmides original e miniatura, com suas alturas h e x.



Temos que $h = x + 8$ e que a razão de semelhança entre as duas pirâmides semelhantes é:

$k = \dfrac{5}{12} = \dfrac{x}{h} \Rightarrow 5h = 12x \Rightarrow 5(x + 8) = 12x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{40}{7}$ e $h = \dfrac{96}{7}$

O volume da pirâmide original é

$\dfrac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot \dfrac{96}{7} = \dfrac{4\,608}{7}.$

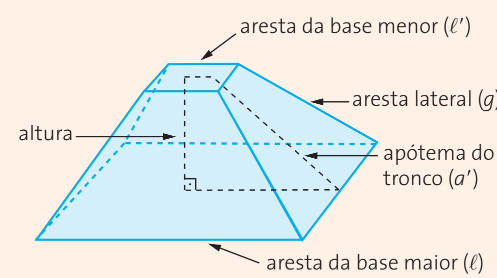
O volume da pirâmide miniatura é

$\dfrac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \dfrac{40}{7} = \dfrac{1\,000}{21}.$

Então, o volume do tronco é

$\dfrac{4\,608}{7} - \dfrac{1\,000}{21} = \dfrac{1\,832}{3} \simeq 610{,}6$; 610,6 cm³.

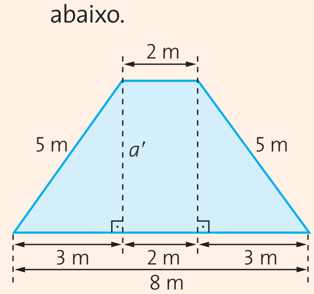
16. As bases de um tronco de pirâmide regular são regiões quadradas de lados 8 m e 2 m, respectivamente. A aresta lateral do tronco mede 5 m. Calcule o volume do tronco.



Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula

A face lateral desse tronco de pirâmide determina um trapézio isósceles, conforme mostra a figura abaixo.

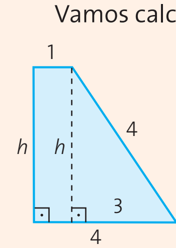


Pela figura, temos:

$5^2 = a'^2 + 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a'^2 = 16 \Rightarrow a' = 4\text{ m}$

Vamos calcular a altura do tronco:



Pela figura, temos:

$4^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 7 \Rightarrow h = \sqrt{7}\text{ m}$

Para refletir

Localize a figura da esquerda no desenho do tronco e justifique os valores 4, 1, 4 e 3.

Vamos calcular o volume do tronco no qual temos $A_B = 64\ m^2$, $A_b = 4\ m^2$, $h = \sqrt{7}$ m:

$$V = \frac{h}{3}\left(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b\right) =$$

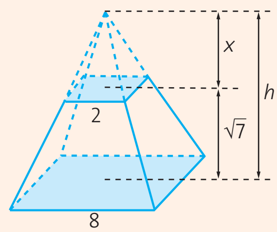
$$= \frac{\sqrt{7}}{3}(64 + \sqrt{64 \cdot 4} + 4) = \frac{\sqrt{7}}{3}(64 + 16 + 4) =$$

$$= \frac{84\sqrt{7}}{3} = 28\sqrt{7}$$

Logo, o volume do tronco é $28\sqrt{7}\ m^3$.

2ª maneira: sem usar a fórmula

Mesmo procedimento até obter $h = \sqrt{7}$; depois, a partir do tronco, consideremos as pirâmides original e miniatura, com suas alturas h e x.



Temos que $h = x + \sqrt{7}$ e que a razão de semelhança entre as duas pirâmides semelhantes é:

$$k = \frac{2}{8} = \frac{x}{h} \Rightarrow 2h = 8x \Rightarrow h = 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{7} = 4x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Não calcularemos h.

O volume da pirâmide miniatura é:

$$\frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{9}$$

A razão entre os volumes da pirâmide miniatura e da original é $k^3 = \left(\frac{2}{8}\right)^3 = \frac{1}{64}$. Assim:

$$\frac{V_{mini}}{V_{original}} = \frac{1}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{original} = V_{mini} \cdot 64 = \frac{256\sqrt{7}}{9}$$

Então, o volume do tronco é:

$$\frac{256\sqrt{7}}{9} - \frac{4\sqrt{7}}{9} = \frac{252\sqrt{7}}{9} = 28\sqrt{7};\ 28\sqrt{7}\ m^3$$

Exercícios

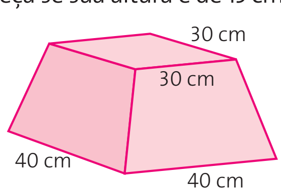
58. Uma pirâmide tem por base um quadrado de lado 8 cm. A altura da pirâmide é 20 cm. Calcule a área da secção transversal feita a 12 cm do vértice.

59. A área da base de uma pirâmide é 100 cm^2. A área da secção transversal feita a 5 cm da base da pirâmide é 25 cm^2. Calcule a altura da pirâmide.

60. Uma secção transversal é feita a 4 cm do vértice de uma pirâmide. A área da secção transversal é igual a $\frac{4}{9}$ da área da base da pirâmide. Calcule a altura da pirâmide.

61. Uma pirâmide é de base hexagonal. O lado do hexágono da base mede 6 cm. A altura da pirâmide é 30 cm. Uma secção transversal é feita a 10 cm do vértice da pirâmide. Qual é a área da secção transversal?

62. Uma peça de cristal tem a forma e as medidas da figura abaixo. Qual é o volume de cristal empregado para fazer essa peça se sua altura é de 15 cm?



63. DESAFIO EM EQUIPE Um tronco de pirâmide tem como bases dois quadrados de lados 8 cm e 12 cm, respectivamente. A altura do tronco é 10 cm. Calculem o volume do tronco.

64. *História*

Em São Paulo, no Parque do Ibirapuera, há um monumento de concreto chamado Obelisco aos Heróis de 1932, uma homenagem aos que morreram na Revolução Constitucionalista de 1932. Esse monumento tem a forma de um tronco de pirâmide (foto ao lado) e tem 72 m de altura. Suas bases são quadrados de arestas 9 m e 7 m. Qual é o volume de concreto usado na construção desse monumento?

Heudes Regis/Arquivo da editora

Obelisco aos Heróis.

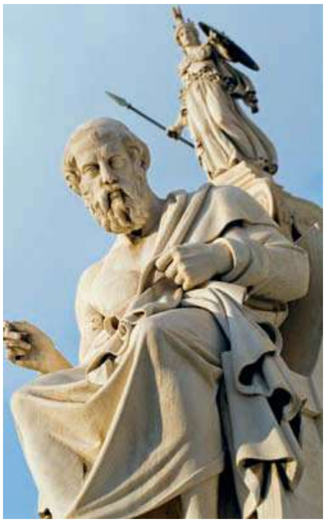
Leitura

Platão e seus poliedros

Filósofo grego, Platão foi discípulo de Sócrates. Nasceu em Atenas em 427 a.C. e morreu em 347 a.C., com 80 anos de idade. Fundou uma escola em Atenas, no ano de 386 a.C., a “Academia”, onde transmitia seus ensinamentos aos seus discípulos. Via nos filósofos-governantes a solução para os problemas políticos. Suas obras são conhecidas como *Diálogos*, pois retratavam diálogos (reais e imaginários) entre Sócrates e outras pessoas, que focavam principalmente a política e a moral. Os *Diálogos* de Platão estão entre as maiores obras literárias do mundo, sendo considerados por muitos verdadeiras obras de arte.

O mais importante diálogo de Platão é a *República*, sendo também um dos mais longos. Nesse diálogo, Platão enfoca a Política, a Educação, a Arte, a Poesia e a Filosofia pura, ocupando-se principalmente da natureza da justiça. É uma visão geral de toda a filosofia de Platão e é nele que está a famosa “Alegoria da caverna”.

Platão defendia o *quadrivium*, os quatro campos da Matemática no estudo das artes liberais, que compreendia a Aritmética, a Geometria plana, a Geometria espacial e a Astronomia. Acreditava que a busca da compreensão das coisas levava à pureza do conhecimento. Na porta de sua academia, Platão escreveu “Que não entre aqui aquele que ignore a Geometria ”.



Richard Nowitz/National Geographic Creative/Getty Images

Estátua de Platão (427 a.C.-347 a.C.) na Academia de Atenas, Grécia.

No diálogo *Timeu* (350 a.C.), Platão apresentou um estudo do Universo, que para ele consistia em formas; em objetos particulares; em Deus, o artesão; em espaço absoluto e em matéria bruta. Platão acreditava que tudo era composto de terra, ar, fogo e água, e que a cada um desses elementos correspondia um poliedro regular – que já era conhecido dos gregos. Platão associou à terra o hexaedro (mais especificamente, o cubo) por causa da sua “estabilidade”; ao fogo, o tetraedro; ao ar, o octaedro; e à agua, o icosaedro, por serem sólidos constituídos de triângulos, para ele a unidade básica de todas as coisas. O dodecaedro representava o elemento do qual o Universo seria feito.

Leia, a seguir, um trecho do *Timeu*:

Devemos prosseguir distribuindo as figuras cujas origens acabamos de descrever pelo fogo, terra, água e ar. Atribuímos o cubo à terra, uma vez que é o mais imóvel dos quatro corpos e o que tem a forma mais estável, sendo estas características que deve possuir a figura com as formas mais estáveis. [...]

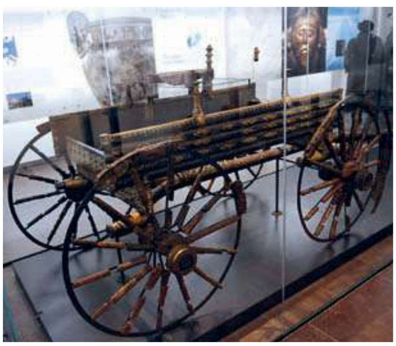
Mantemos assim o nosso princípio de verossimilhança atribuindo o cubo à terra e, de forma semelhante, atribuímos à água a menos móvel das outras figuras, a mais móvel ao fogo e a intermédia ao ar. E de novo atribuímos a menor figura ao fogo, a maior à água, a intermédia ao ar; a mais cortante ao fogo, a segunda mais cortante ao ar e a menos cortante à água. Resumindo, a figura que tem o menor número de faces deverá ser, pela natureza das coisas, a mais móvel, assim como a mais cortante e a mais penetrante e, finalmente, sendo composta pelo menor número de partes semelhantes, a mais leve. A nossa segunda figura será a segunda em todas essas características, e a nossa terceira será a terceira. Deste modo, a lógica e a verossimilhança exigem que olhemos a pirâmide como a figura sólida que é a unidade básica ou a semente do fogo; e podemos olhar a segunda das figuras que construímos (o octaedro) como a unidade básica do ar, a terceira (icosaedro) a da água.

Adaptado de: MAGEE, Bryan. *História da Filosofia*. São Paulo: Loyola, 1999.

CAPÍTULO 10

Corpos redondos

Album/Prisma/Latinstock



Carroça

Nasa/Corbis/Latinstock

Planeta Terra

Historicamente considerada a maior invenção científica, a roda é uma das formas geométricas mais inspiradoras para o ser humano. Seu formato permite a mobilidade sem esforço e sem mecanismos sofisticados de objetos concretos, como as carroças.

Na Geometria espacial (que estuda as três dimensões) esse formato desempenha papel muito abrangente por sua incalculável aplicação. A esfera, símbolo dos planetas no Universo, apresentando em seu contorno uma infinidade de “rodas” — as circunferências — expressa o conjunto de pontos equidistantes de um mesmo ponto, o centro.

Pode-se dizer que todas as áreas do conhecimento lançam mão de sua estrutura e usufruem de suas propriedades. Para os antigos filósofos ela era a “forma perfeita”.

No campo da Arquitetura, desde os mais remotos tempos, a forma redonda foi muito prestigiada. Vários castelos construídos ao longo da História apresentavam torres cilíndricas, próprias do estilo gótico, além de coberturas em formato cônico, úteis em países sujeitos a nevascas por favorecerem o escoamento da neve.

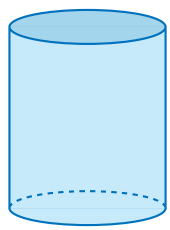
Cilindro, cone e esfera compõem o conjunto de corpos redondos que vamos estudar neste capítulo.

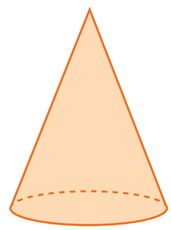
Snow Turtle/Shutterstock/Glow Images

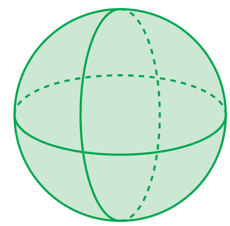
Castelo Neuschwanstein, localizado na Alemanha.

1 Corpos redondos

No capítulo anterior iniciamos o estudo dos sólidos geométricos, com os poliedros e, em especial, os prismas e as pirâmides. Agora, neste capítulo, estudaremos os sólidos que possuem superfícies curvas, os chamados **corpos redondos**. São eles:


Cilindro

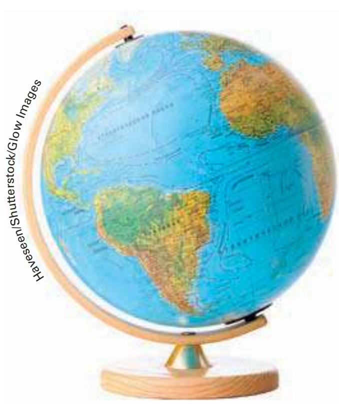

Cone


Esfera

Para refletir
Por que esses sólidos são chamados corpos redondos?

Estudar os corpos redondos e conhecer suas características e propriedades permite-nos representar teoricamente uma grande quantidade de elementos da vida cotidiana.

» Junte-se com um colega e avaliem que tipo de corpo redondo seria mais indicado para representar geometricamente cada um dos elementos abaixo:



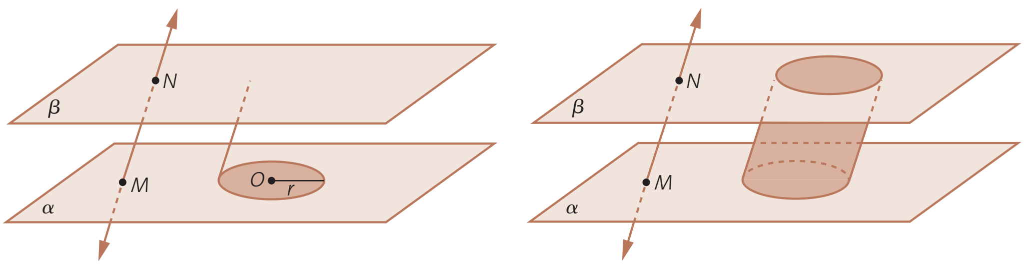
Agora, observe este copo:

Este copo não se encaixa em nenhum dos três corpos redondos, mas um deles pode ser usado para representá-lo, desde que com a estratégia adequada (juntando-se ou retirando-se partes, por exemplo).

» Qual seria então o corpo redondo e qual seria a estratégia indicada para usá-lo?

2 O cilindro

Considere dois planos α e β, distintos e paralelos, e um segmento de reta MN com M pertencente a α e N pertencente a β. Dado um círculo C de centro O e raio r, contido em α, chamamos **cilindro circular** (ou simplesmente **cilindro**) à reunião de todos os segmentos de reta, paralelos e congruentes ao segmento MN, que unem um ponto do círculo C a um ponto de β. No caso de $\overline{MN}$ ser perpendicular a α, o cilindro é reto.

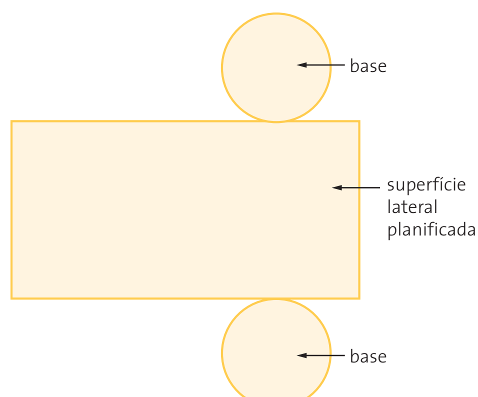


Intuitivamente, podemos imaginar um cilindro como o conjunto de pontos gerado por uma translação de um círculo.

A superfície do cilindro é formada por duas partes planas, que são as bases, e uma parte não plana, "arredondada", que é a superfície lateral.

A altura do cilindro é a distância entre os planos das bases.

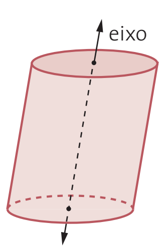
Cilindro reto

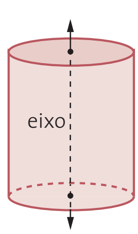


Cilindro reto planificado

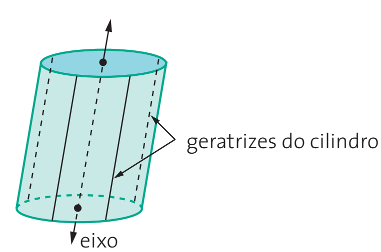
A reta que passa pelos centros das bases de um cilindro é chamada **eixo** do cilindro.

Os segmentos paralelos ao eixo, cujas extremidades são pontos das circunferências das bases, são chamados **geratrizes** do cilindro.

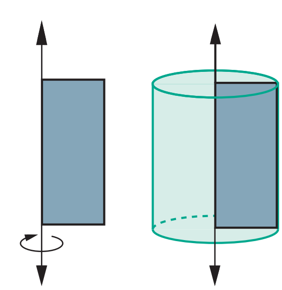




No cilindro reto o eixo é perpendicular aos planos das bases.

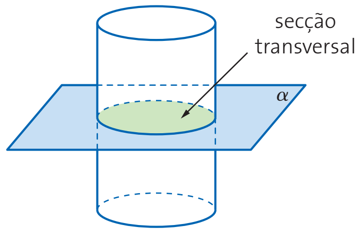


Um cilindro reto também pode ser obtido ao girar uma região retangular em torno de uma reta que contém um de seus lados. Por isso, o cilindro circular reto pode ser chamado também **cilindro de revolução**, uma vez que é o sólido obtido quando uma região retangular faz um giro completo em torno do eixo determinado por um de seus lados.



Para refletir
Em que caso a altura e a geratriz do cilindro têm a mesma medida?

Secções de um cilindro

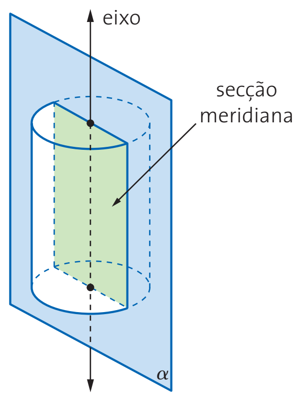


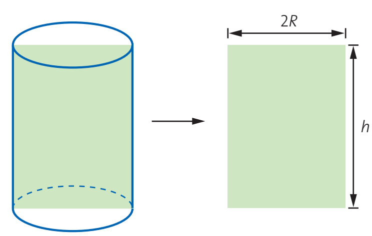
Secção transversal

É a intersecção do cilindro com um plano paralelo às suas bases.
A secção transversal é um círculo congruente às bases.

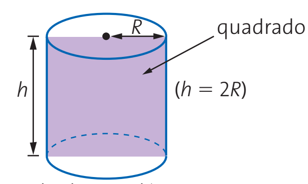
Secção meridiana

É a intersecção do cilindro com um plano que contém o seu eixo.
A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo.



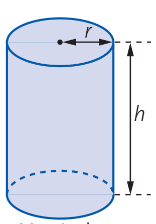


Observação: Se a secção meridiana for um quadrado, dizemos que o cilindro é **equilátero**. Nesse caso, $h = 2R$.

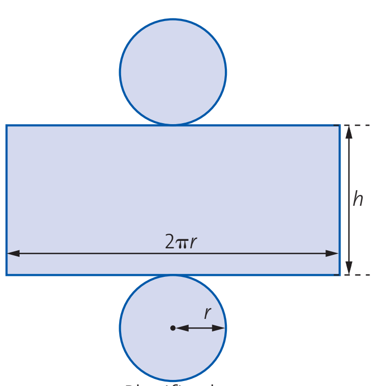


Cilindro equilátero

Área da superfície de um cilindro reto



Montado



Planificado

Fique atento!
A superfície lateral planificada do cilindro reto é uma região retangular cujas dimensões são: a altura do cilindro (h) e o comprimento da circunferência da base ($2\pi r$). Cada base do cilindro é um círculo com área πr^2.

A superfície total do cilindro é formada pela superfície lateral mais as superfícies das duas bases. Assim:

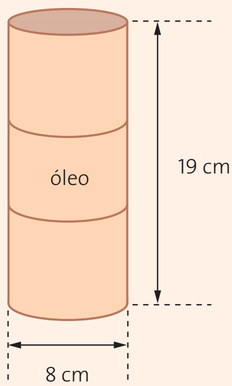
área lateral: $A_\ell = (2\pi r)h = 2\pi rh \Rightarrow \boxed{A_\ell = 2\pi rh}$

área das bases: $\boxed{2A_b = 2\pi r^2}$

área total: $A_t = A_\ell + 2A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) \Rightarrow \boxed{A_t = 2\pi r(h + r)}$

Exercícios resolvidos

1. Quantos centímetros quadrados de material são usados, aproximadamente, para fabricar a lata de óleo indicada abaixo?



Resolução:

diâmetro $= 8$ cm

$r = 4$ cm

$h = 19$ cm

Vamos resolver esse problema em função de π.

Veja:

$A_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 19 = 152\pi$

$2A_b = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 4^2 = 32\pi$

$A_t = 152\pi + 32\pi = 184\pi$

São necessários 184π cm^2 de material.

2. Qual deve ser o comprimento de um tubo, de forma cilíndrica, se a sua superfície total pode ser coberta com $8{,}32\pi$ cm^2 de plástico e o diâmetro de cada base tem 8 mm?

Resolução:

O diâmetro da base é 8 mm $= 0{,}8$ cm.

Logo, $r = 0{,}4$ cm.

$2A_b = 2\pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4^2 = 0{,}32\pi$

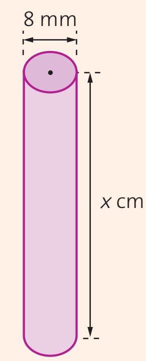
$A_\ell = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4x = 0{,}8\pi x$

$A_t = 2A_b + A_\ell = 8{,}32\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}32\pi + 0{,}8\pi x = 8{,}32\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}8\pi x = 8 \Rightarrow x = 10$

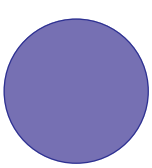
Portanto, o comprimento do tubo deve ser de 10 cm.

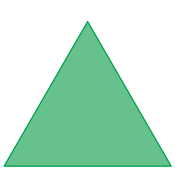


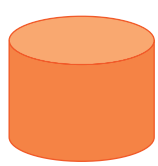
Exercícios

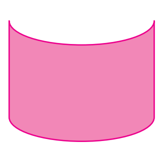
1. Identifique quais das figuras abaixo nunca poderão ser a sombra de um cilindro.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

2. A base de um cilindro reto tem 4 cm de diâmetro. A altura do cilindro mede, também, 4 cm. Determine:

a) a área das bases;

b) a área lateral;

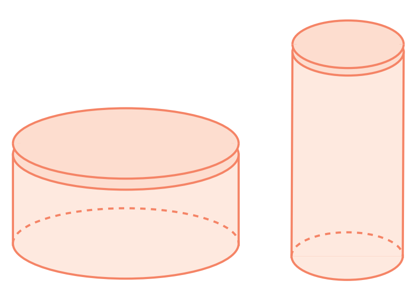
c) a área total.

> **Fique atento!**
> O cilindro reto deste exercício é um exemplo de **cilindro equilátero**, pois nele o diâmetro da base tem a mesma medida que a altura.

3. Uma lata de refrigerante tem forma cilíndrica, com 8 cm de diâmetro nas bases e 15 cm de altura. Quantos centímetros quadrados de material são necessários, aproximadamente, para fabricar essa lata de refrigerante?

4. Sabe-se que a área lateral de um cilindro é 20π cm^2. Se o raio da base é 5 cm, calcule a medida h da altura e a área total do cilindro.

5. Duas latas têm forma cilíndrica. A lata mais alta tem o dobro da altura da outra, mas seu diâmetro é a metade do diâmetro da lata mais baixa.

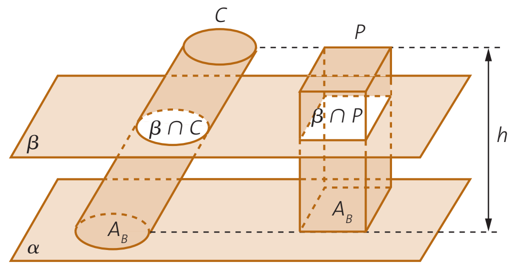


Em qual das duas latas se utilizou menos material?

Volume do cilindro

Vamos novamente usar o princípio de Cavalieri, agora para determinar o volume do cilindro.

Dado um cilindro com a base contida em um plano α, vamos considerar um paralelepípedo retângulo, também com a base contida em α, que tem a área da base igual à área da base do cilindro e altura igual à do cilindro.



Cada plano β, paralelo a α, que secciona um dos sólidos, também secciona o outro, e as secções determinadas por β em cada um deles têm a mesma área de suas bases.

Como área $(\beta \cap C) = A_B$ e área $(\beta \cap P) = A_B$, temos:

$$\text{área } (\beta \cap C) = \text{área } (\beta \cap P)$$

para qualquer plano horizontal β.

Pelo princípio de Cavalieri concluímos que:

volume do cilindro = volume do paralelepípedo retângulo

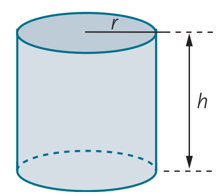
Como o volume do paralelepípedo retângulo é obtido fazendo área da base · altura, segue que:

Fique atento!
Observe que o volume do cilindro é calculado da mesma forma que calculamos o volume de um prisma: área da base · altura.

volume do cilindro = área da base · altura

Sendo a base do cilindro um círculo de raio r e área πr^2, temos:

volume do cilindro: $V = \pi r^2 h$



passo a passo: exercício 5

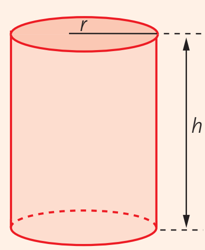
Exercícios resolvidos

3. Qual é a capacidade de uma lata de molho de tomate que tem forma cilíndrica, com 8 cm de diâmetro e 11 cm de altura? (Use $\pi = 3$.)

Realidade

Hely Demutti/Acervo do fotógrafo

Modelo matemático



Cilindro

Resolução:

Se o diâmetro é de 8 cm, então $r = 4$ cm.

$h = 11$ cm

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 11 = 176\pi$

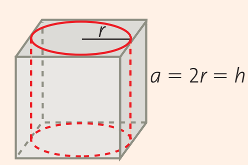
Considerando $\pi = 3$ e sabendo que

$1\ dm^3 = 1\ \ell$ e $1\ cm^3 = 1\ m\ell$, temos:

$176 \cdot 3 \simeq 528$

Logo, a capacidade da lata é de aproximadamente 528 mℓ.

4. A figura ao lado mostra um cilindro inscrito em um cubo. O volume do cilindro é $64\pi\ cm^3$. Calcule o volume do cubo.



Resolução:

Como a altura do cilindro é igual ao seu diâmetro, temos:

$V = \pi r^2 h$

$\Rightarrow 64\ \cancel{\pi} = \cancel{\pi} r^2 \cdot 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^3 = 64 \Rightarrow r^3 = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 2\sqrt[3]{4}$

Fique atento!
Todo cilindro inscrito em um cubo é um cilindro equilátero: o diâmetro da base e a altura têm a mesma medida da aresta do cubo.

Como a aresta do cubo é igual ao diâmetro do cilindro, temos:

$a = 2r + \ 4\sqrt[3]{4}$

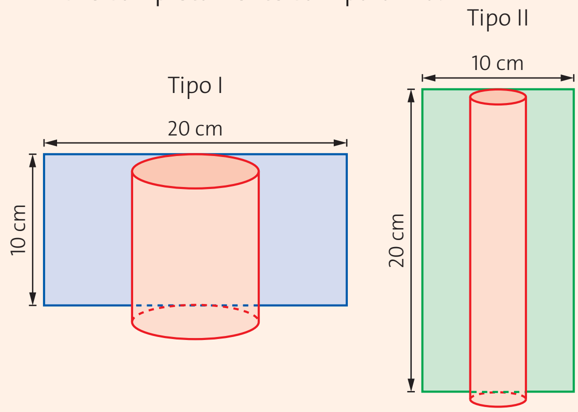
Vamos então calcular o volume do cubo:

$V = a^3 = \left(4\sqrt[3]{4}\right)^3 = 256$

Portanto, o volume do cubo é $256\ cm^3$.

Resolvido passo a passo

5. (Enem) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm × 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será:

a) o triplo.
b) o dobro.
c) igual.
d) a metade.
e) a terça parte.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?
São dadas as dimensões de dois moldes usados por uma artesã na confecção de velas; é explicado como esses moldes são feitos a partir do papel-cartão.

b) O que se pede?
Pede-se a relação entre o custo dos dois tipos de vela fabricados pela artesã.

2. Planejando a solução

De acordo com as instruções de montagem dos dois tipos de molde, vamos obter as dimensões necessárias para o cálculo do volume dos cilindros (raio e altura). Com as dimensões para os dois casos, calcularemos o volume, e como o custo das velas é proporcional ao volume, poderemos determinar a relação pedida entre os custos.

3. Executando o que foi planejado

Vamos determinar as dimensões da altura (h) e do raio (r) para cada um dos moldes:

No tipo I, a altura é $h = 10$ cm e o comprimento da circunferência da base é 20 cm. Como o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi r$, temos:

$$2\pi r = 20 \Rightarrow r = \frac{10}{\pi}$$

No tipo II, a altura é $h = 20$ cm e o comprimento da circunferência da base é 10 cm. Então, temos:

$$2\pi r = 10 \Rightarrow r = \frac{5}{\pi}$$

Vamos calcular o volume de parafina empregado em cada molde. Para isso, devemos lembrar que o volume de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$.

Volume no molde do tipo I:

$$V_{\text{I}} = \pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{I}} = \pi \cdot \frac{100}{\pi^2} \cdot 10 = \frac{1000}{\pi}$$

Volume no molde do tipo II:

$$V_{\text{II}} = \pi\left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{II}} = \pi \cdot \frac{25}{\pi^2} \cdot 20 = \frac{500}{\pi}$$

A relação entre os volumes é a relação entre os custos. Assim:

$$\frac{V_{\text{I}}}{V_{\text{II}}} = \frac{\frac{1000}{\pi}}{\frac{500}{\pi}} = \frac{1000}{\pi} \cdot \frac{\pi}{500} = 2$$

Ou seja, o volume de parafina empregado no molde do tipo I é o dobro do volume de parafina empregado no molde do tipo II. Assim, o custo da vela I é o dobro do custo da vela II.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **b**.

5. Ampliando o problema

a) Qual deve ser o tamanho de um cartão retangular para que uma vela de 20 cm de altura custe o mesmo que uma vela de 10 cm feita com o molde do tipo I do enunciado?

b) *Discussão em equipe*

Os primeiros artesãos surgiram no Período Neolítico (6 000 a.C.) quando o homem aprendeu a polir a pedra, a fabricar a cerâmica e a tecer fibras animais e vegetais. [...] O artesão é aquele que, através da sua criatividade e habilidade, produz peças de barro, palha, tecido, couro, madeira, papel ou fibras naturais, matérias brutas ou recicladas, visando produzir peças utilitárias ou artísticas, com ou sem uma finalidade comercial.

Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/disciplinas/cultura-brasileira/artesanato-ceramicas-rendas-e-outros-tipos-de-artesanato-brasileiro.htm>. Acesso em: 15 mar. 2013.

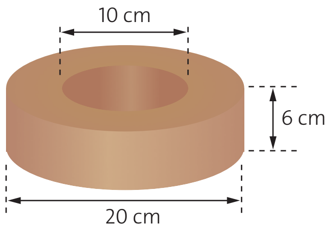
Troque ideias com seus colegas sobre o texto acima. Vocês acham que o artesanato reflete a história do povo? Ou é apenas um passatempo?

Exercícios

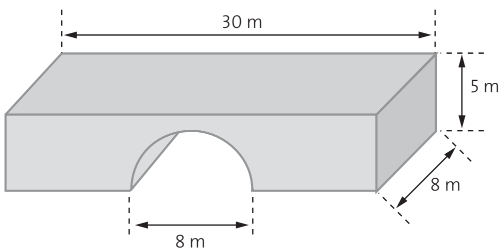
6. O reservatório de tinta de uma caneta esferográfica tem forma cilíndrica. Seu diâmetro é de 2 mm e seu comprimento é de 12 cm. Quantos mℓ de tinta podem ser acondicionados nesse reservatório?

7. ATIVIDADE EM DUPLA Um cano cilíndrico de plástico (figura abaixo) tem 70 cm de comprimento. O raio externo tem 10 cm e o raio interno tem 6 cm. Qual é o volume de plástico usado para fazer esse cano?

8. Uma peça de madeira tem as dimensões e a forma da figura abaixo. Qual é o volume de madeira empregado para fabricar essa peça?

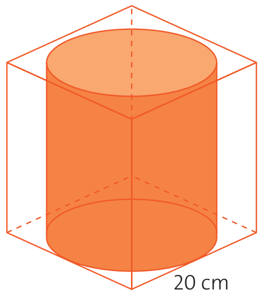


9. Uma ponte de concreto tem a forma da figura a seguir. Suas dimensões estão assinaladas na figura. Qual é o volume de concreto usado para construir a ponte? Use $\pi = 3$.



10. Um cilindro reto tem raio 4 cm. Determine seu volume.

11. Determine o volume de um cilindro inscrito em um cubo de aresta 20 cm.



12. ATIVIDADE EM DUPLA Um suco de frutas é vendido em dois tipos de latas cilíndricas. Uma delas (figura I) tem raio da base x e altura y. A outra (figura II) tem raio da base $\frac{x}{2}$ e altura $2y$. A primeira delas é vendida por R$ 16,00 e a segunda por R$ 10,00. Qual das duas latas é mais vantajoso comprar?

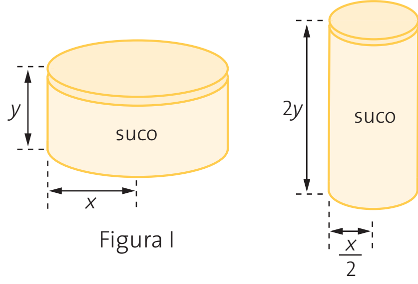
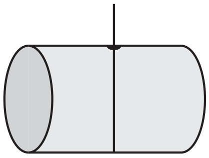


Figura I

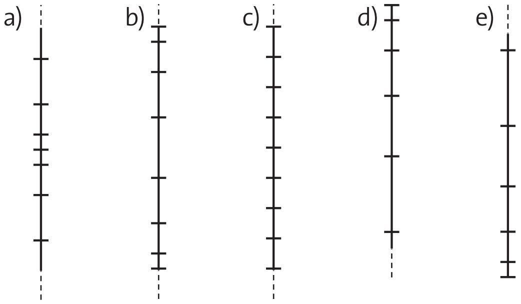
Figura II

13. ATIVIDADE EM DUPLA Um reservatório cilíndrico de altura 10 m e diâmetro 4 m está inicialmente vazio. No instante $t = 0$ ele passa a receber água a uma taxa constante de $\frac{\pi}{15}$ ℓ/min.
   a) Determinem a função que relaciona o volume V de água, em litros, no reservatório com o tempo t em horas.
   b) Determinem a função que relaciona a altura h, em metros, de água no reservatório com o tempo t em horas.
   c) Determinem o tempo total, em horas, necessário para encher totalmente o tanque.

14. ATIVIDADE EM DUPLA (Enem) Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.



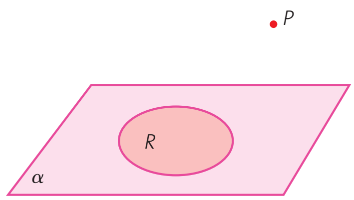
A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:

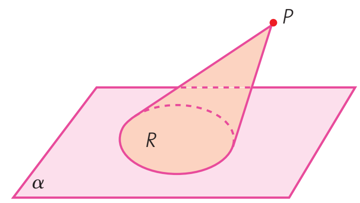


3 O cone

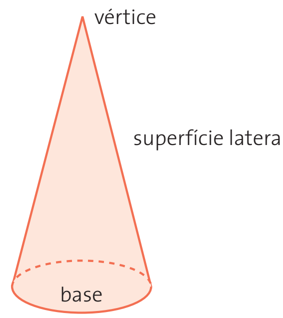
Vamos considerar um plano α, uma região circular R nesse plano e um ponto P não pertencente a α.

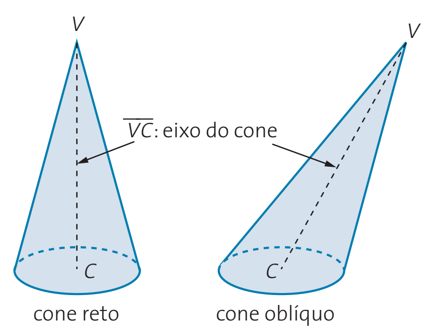
A reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto de R ao ponto P é um sólido chamado **cone circular**.





A superfície do cone é formada por uma parte plana, a região circular, que é a sua base, e uma parte não plana, “curva”, “arredondada”, que é a sua superfície lateral.





O eixo do cone é o segmento de reta que liga o vértice ao centro da base.

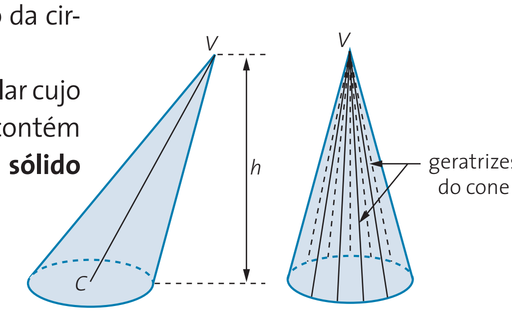
Se o eixo é perpendicular à base, o cone denomina-se **cone reto**.

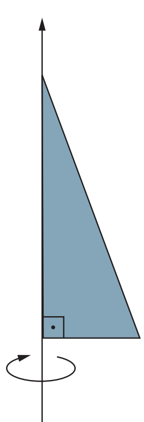
Se o eixo é oblíquo à base, o cone é chamado **cone oblíquo**.

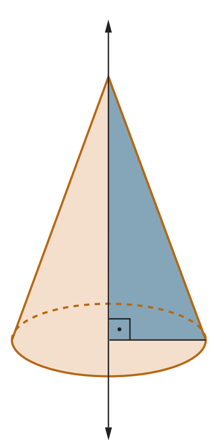
A altura h do cone é o segmento de reta perpendicular traçado do vértice ao plano da base. No caso do cone reto, a medida do eixo coincide com a da altura h.

No cone reto, cada segmento que liga o vértice a um ponto da circunferência da base é chamado **geratriz** do cone.

Um cone reto pode ser obtido girando-se uma região triangular cujo contorno é um triângulo retângulo em torno de uma reta que contém um dos catetos. Por esse motivo, o cone reto é considerado um **sólido** ou **corpo de revolução** e é chamado **cone de revolução**.



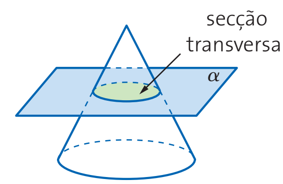




Para refletir
O que indicam o outro cateto e a hipotenusa?

Secções do cone

Secção transversal



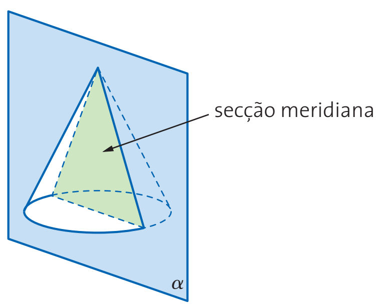
A secção transversal é a intersecção do cone com um plano paralelo à sua base.

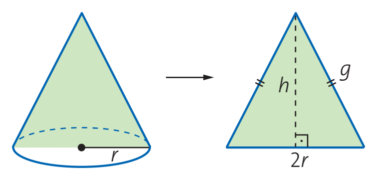
A secção transversal do cone é um círculo.

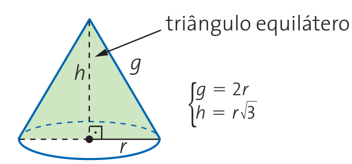
Secção meridiana

A secção meridiana é a intersecção do cone com um plano que contém o seu eixo.

A secção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles.



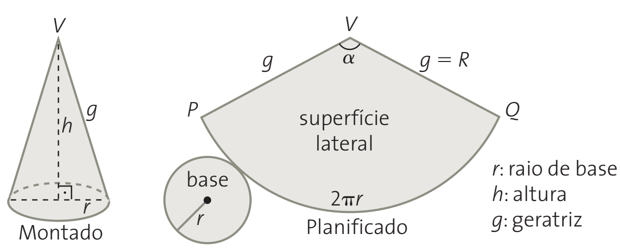




Cone equilátero

Observação: Se a secção meridiana for um triângulo equilátero, dizemos que o cone é **equilátero**.
Nesse caso, $g = 2r$ e $h = r\sqrt{3}$.

Área da superfície de um cone reto



> **Fique atento!**
> A geratriz (g) do cone reto é o raio do setor circular ($g = R$).
> Não se deve confundir o raio da base (r) com o raio do setor (R).

A superfície total do cone reto é formada pela superfície lateral (um setor circular) mais a superfície da base (um círculo), isto é, $A_t = A_\ell + A_b$. Inicialmente calculamos a área do setor (A_ℓ).

No capítulo 7, vimos que a área de um setor circular é proporcional à área do círculo correspondente, de forma que:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{\pi R^2} = \frac{\alpha_{\text{graus}}}{360°} = \frac{\alpha_{\text{rad}}}{2\pi} = \frac{\ell}{2\pi R}$$

Assim, podemos calcular a área do setor como $A_{\text{setor}} = \dfrac{\ell}{2\pi R} \cdot \pi R^2$.

Neste caso do cone temos $\ell = 2\pi r$ e $R = g$. Logo:

$$A_\ell = \frac{2\pi r}{2\pi g} \cdot \pi g^2 = \pi r g$$

A área da base é a área do círculo de raio r: $A_b = \pi r^2$.

Logo, a área total do cone reto é $A_t = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$.

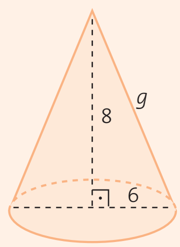
Resumindo, para um cone reto de geratriz g e raio da base r, temos:

$$\boxed{A_\ell = \pi r g} \qquad \boxed{A_b = \pi r^2} \qquad \boxed{A_t = \pi r(g + r)}$$

Exercícios resolvidos

6. Um cone reto tem 8 cm de altura e raio da base igual a 6 cm.
Calcule a medida da sua geratriz, a área lateral, a área total e a medida do ângulo do setor circular.

Resolução:



- medida da geratriz:
  $g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = \sqrt{100} \simeq 10$
  $g = 10$ cm
- área lateral:
  $A_\ell = \pi r g = \pi \cdot 6 \cdot 10 \simeq 60\pi$
  $A_\ell = 60\pi$ cm^2
- área total:
  $A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\ \pi$
  $A_b = 36\pi$ cm^2
  $A_t = A_\ell + A_b = 60\pi + 36\pi = 96\pi;$
  $A_t = 96\pi$ cm^2
- medida do ângulo do setor circular:
  Neste caso, $R = g = 10$ cm e $\ell = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{\ell}{2\pi R} \Rightarrow \frac{\alpha}{360°} = \frac{12\pi}{2\pi \cdot 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{12\pi \cdot 360°}{2\pi \cdot 10} = 216°$$

Logo, $\alpha = 216°$.

7. A geratriz de um cone reto mede 5 cm e o ângulo central do setor circular mede 72°.
Calcule a área lateral do cone.

Resolução:

De acordo com os dados do problema, temos $\alpha = 72°$ (ângulo central) e $g = R =$ raio do setor circular $= 5$ cm. Então:

$$\frac{A_\ell}{\pi \cdot 5^2} = \frac{72}{360} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\ell = \pi(5)^2 \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{72}}}{\underset{5}{\cancel{360}}} = \pi \cdot \overset{5}{\cancel{25}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{5}}} =$$

$= 5\pi = 5 \cdot 3{,}14 = 15{,}70$

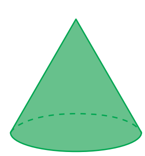
Assim, $A_\ell = 15{,}7$ cm^2.

> **Fique atento!**
> A superfície lateral neste exemplo é um setor circular cuja área é $\frac{1}{5}$ do círculo de raio 5. Logo,
> $A_\ell = \frac{25\pi}{5} = 5\pi.$

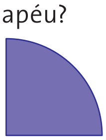
Exercícios

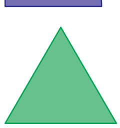
15. Um cone reto tem 24 cm de altura e o raio da base é igual a 18 cm. Calcule:
a) a medida de sua geratriz;
b) a área lateral (aproximadamente);
c) a área total (aproximadamente).

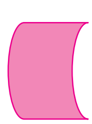
16. Mariana foi convidada para uma festa à fantasia e decidiu ir fantasiada de bruxa. Ela quis confeccionar a própria roupa, e para fazer o chapéu optou pela forma de um cone, como mostra a figura ao lado.



Para fazer o chapéu ela usou uma folha de cartolina e desenhou a planificação do cone para depois cortar, montar e colar. Qual dos itens abaixo foi o desenho que Mariana fez na folha para montar seu chapéu?

a) 

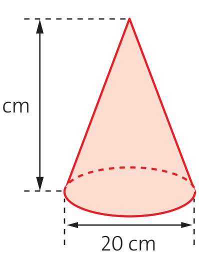
b) 

c) 

d) 

e) 

17. Quantos centímetros quadrados de cartolina serão gastos para fazer o chapéu de palhaço cujas medidas estão na figura abaixo?



18. ATIVIDADE EM DUPLA Desenvolvendo a superfície lateral de um cone reto, obtemos um setor circular de raio 6 cm e ângulo central de 60°. Calculem a área lateral do cone.

19. ATIVIDADE EM DUPLA A geratriz de um cone equilátero mede 4 cm. Determinem:
a) a altura e o raio do cone;
b) a área total.

20. Um cone tem altura 6 cm e diâmetro 10 cm. Considerando $\pi = 3{,}14$, determine a área total da superfície do cone.

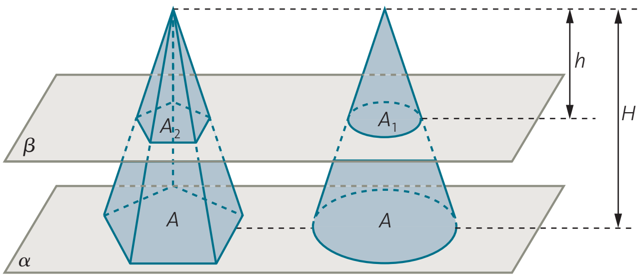
Volume do cone

Mais uma vez usaremos o princípio de Cavalieri.

Consideramos um cone de altura H e base de área A contida em um plano horizontal α.

Também consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A contida em α.

Se um plano horizontal β com distância h dos vértices secciona os dois sólidos, determinando regiões planas de áreas A_1 e A_2, temos:



$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} \text{ e } \frac{A_2}{A} = \frac{h^2}{H^2} \Rightarrow \frac{A_2}{A} = \frac{A_1}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

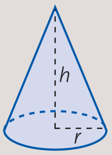
Pelo princípio de Cavalieri podemos afirmar que o cone e a pirâmide iniciais têm o mesmo volume. Como já sabemos o volume da pirâmide $\left(V = \frac{AH}{3}\right)$, o volume do cone também é o mesmo.

$$V_{\text{cone}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

Então, para um cone circular de raio r e altura h, podemos dizer que:

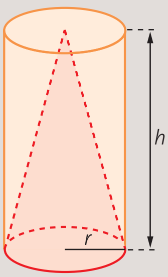
$$V = \frac{1}{3} A_b h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



Observação: Lembrando a relação entre os volumes do prisma e da pirâmide de mesma altura e mesma área da base e usando o princípio de Cavalieri, podemos concluir:

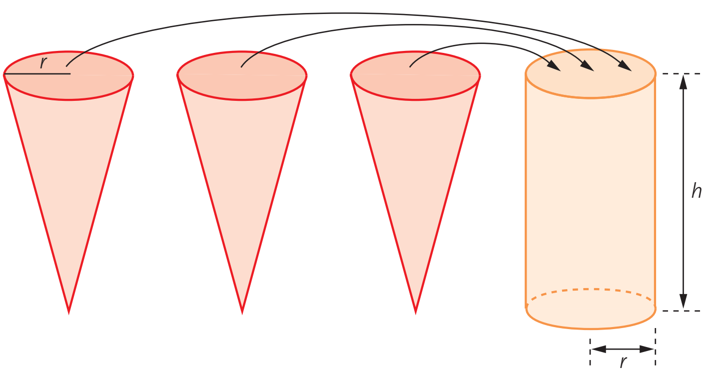
O volume de um cone de mesma área da base e mesma altura de um cilindro é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro.



$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

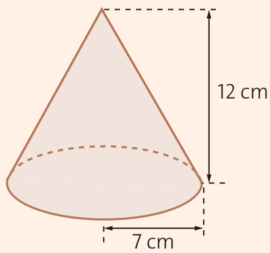
Podemos comprovar isso experimentalmente: para encher de água uma vasilha em forma de cilindro usando como medida um recipiente em forma de cone, de mesma área da base e mesma altura do cilindro, será necessário usar o recipiente três vezes:



Exercícios resolvidos

8. Qual é o volume de um cone de raio 7 cm e altura 12 cm?

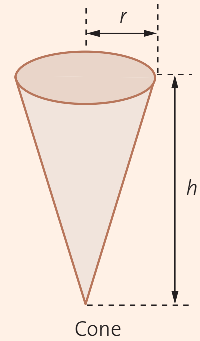
Resolução:



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 12 = 196\pi$

O volume do cone é 196π cm^3.

9. Qual é a capacidade de uma casquinha de sorvete de forma cônica cujo diâmetro é 6 cm e cuja altura é 10 cm? (Use $\pi = 3,14$.)



Resolução:

diâmetro = 6 cm; raio = 3 cm; $h = 10$ cm

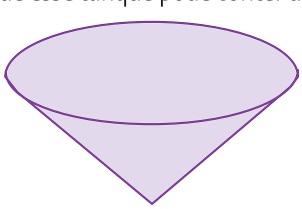
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 30\pi \simeq 94,20;$

$V = 94,20$ cm^3

Como 1 cm^3 = 1 mℓ, a capacidade da casquinha é de 94,20 mℓ aproximadamente.

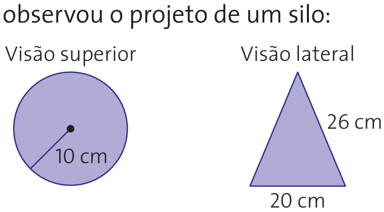
Exercícios

21. Um tanque cônico tem 4 m de profundidade e seu topo circular tem 6 m de diâmetro. Qual é o volume máximo, em litros, que esse tanque pode conter de líquido?



22. Uma empresa fabrica um chocolate em forma de guarda-chuvinha, com 7 cm de altura e 2 cm de diâmetro. Qual é o volume desse chocolate?

23. Carina observou o projeto de um silo:

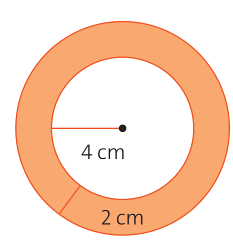


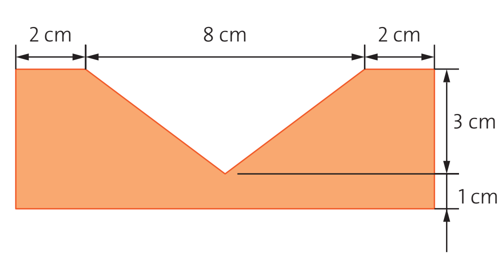
Com essas informações, Carina calculou o volume do silo. Usando $\pi = 3$, qual é esse volume?

24. Determine o volume de um cone de altura 6 cm e geratriz 7 cm. (Use $\pi = 3,14$.)

25. O volume de um cone equilátero é igual a $9\pi\sqrt{3}$ cm^3. Calcule a altura do cone.

26. ATIVIDADE EM DUPLA Um artista projetou um cinzeiro maciço de mármore com as seguintes dimensões:



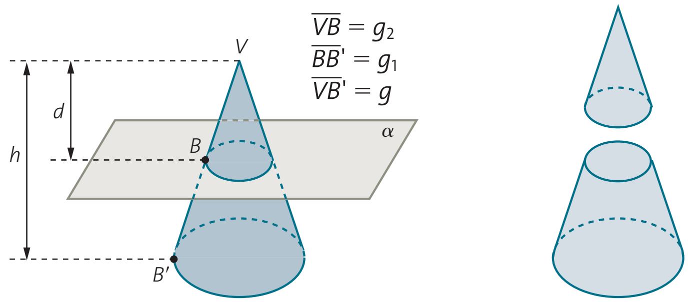


Qual é o volume de mármore que será usado nesse cinzeiro?

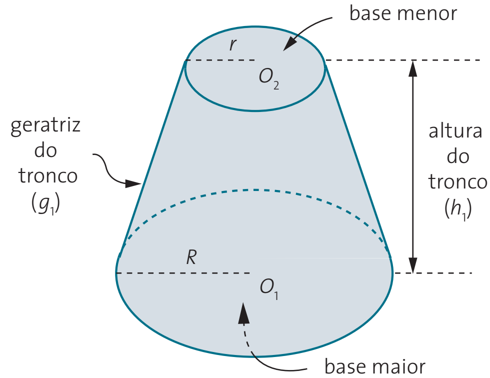
Tronco de cone reto

Vamos considerar um cone circular reto de vértice V e altura h e um plano α paralelo à base que secciona o cone a uma distância d do vértice, conforme a figura.

Nesse caso, obtemos dois sólidos: um cone de vértice V e altura d e o tronco do cone inicial.



No tronco do cone, destacamos:



- duas bases: a base maior (base do cone inicial) e a base menor (secção determinada por α);
- a altura (h_1), que é a distância entre as bases ($h_1 = h - d$);
- a geratriz, cuja medida (g_1) é obtida pela diferença das medidas das geratrizes dos dois cones: $g_1 = g - g_2$, em que g é a geratriz do cone inicial e g_2 é a geratriz do cone determinado por α.

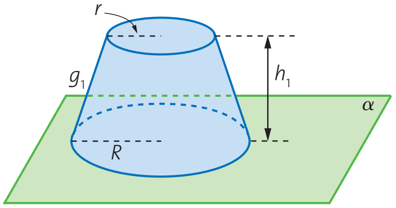
Observação: O tronco de cone pode ser considerado de forma análoga ao tronco de pirâmide. Assim como acontece com as pirâmides, um plano paralelo à base que secciona o cone origina um tronco e um cone miniatura semelhante ao original, de forma que para os dois cones podem ser usadas todas as relações de semelhança: lineares, de área e de volume.

Área e volume do tronco de cone reto

É possível verificar que:

área lateral (A_ℓ): $A_\ell = \pi g_1 (R + r)$

volume (V): $V = \dfrac{\pi h_1}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$



Na prática, em vez de usar a fórmula deduzida, em geral é mais adequado obter o volume do tronco de cone pela "subtração" dos volumes dos cones semelhantes (o original e a miniatura), como no caso do tronco de pirâmide. Entretanto, fica a critério de cada um a escolha da estratégia para a resolução dos exercícios.

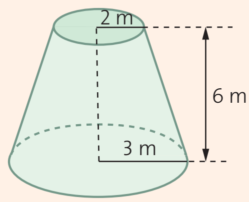
Exercício resolvido

10. Os raios das bases de um tronco de cone são 3 m e 2 m. A altura do tronco é 6 m. Calcule o seu volume.

Resolução:

1º método: usando a fórmula

$R = 3$ m
$r = 2$ m
$h_1 = 6$ m



$$V = \frac{\pi h_1}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{6\pi}{3}\,(3^2 + 3 \cdot 2 + 2^2) =$$

$= 38\pi$; $V = 38\pi$ m^3

2º método: sem o uso da fórmula

Seja $x + 6$ a altura do cone que deu origem ao tronco de cone.
Usando semelhança, podemos escrever:

$$\frac{x}{x + 6} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x = 2x + 12 \Rightarrow x = 12$

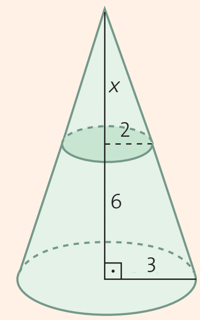
Podemos calcular o volume do tronco assim:

$V_{\text{tronco}} = V_{\text{cone maior}} - V_{\text{cone menor}} =$

$= \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 12 =$

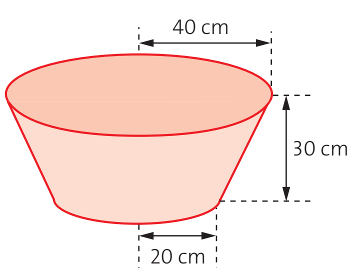
$= 54\pi - 16\pi = 38\pi$

O volume do tronco de cone é 38π m^3.

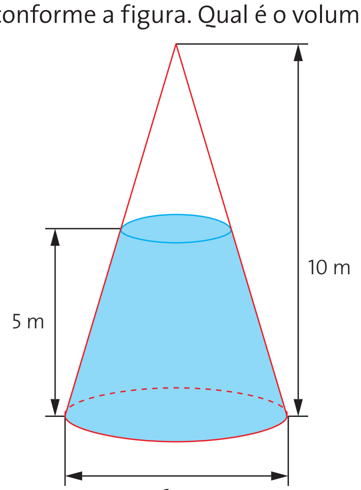


Exercícios

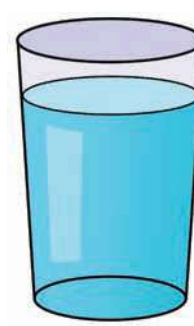
27. Uma vasilha (figura abaixo) tem a forma de um tronco de cone. Suas dimensões estão indicadas na figura. Qual é o volume máximo de água que a vasilha pode conter em litros?



28. Um reservatório cônico tem água até a metade de sua altura, conforme a figura. Qual é o volume de água?



29. O copo da figura tem as seguintes medidas internas: 6 cm e 8 cm de diâmetro nas bases e 9 cm de altura. Qual é o volume máximo de água que esse copo pode conter em mℓ?



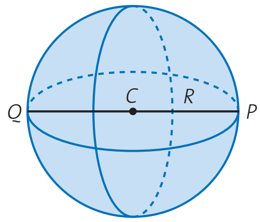
Ilustrações: Dam d'Souza/Arquivo da editora

30. Uma xícara tem a forma da figura dada, com dimensões em centímetros. Qual é o máximo volume de café que pode ser colocado nessa xícara? (Use $\pi = 3$.)

4 A esfera

Consideremos um ponto C e um número real positivo R qualquer.

A esfera de centro C e raio de medida R é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R do ponto C.



C: centro da esfera
$\overline{CP}$: raio da esfera
$\overline{PQ}$: diâmetro da esfera
R: medida do raio da esfera

A "casquinha" ou a fronteira da esfera chama-se **superfície esférica**.

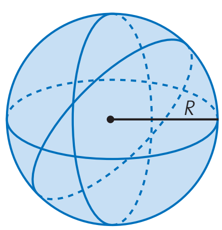
Área da superfície esférica

Na figura abaixo estão desenhados três círculos máximos. A área da superfície esférica é dada pelo quádruplo da área de um dos círculos máximos, ou seja:

$$A = 4\pi R^2$$

Por exemplo, se o raio de uma esfera é 9 cm, a área da superfície esférica será dada por:

$$A = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 144\pi;\ A = 144\pi \text{ cm}^2$$



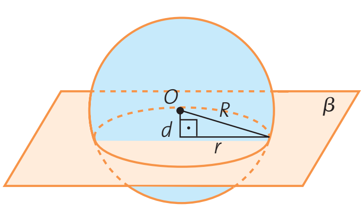
Observação: Essa fórmula será justificada na seção *Um pouco mais...*

Volume da esfera

O volume de uma esfera de raio R é igual a:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Observe a figura abaixo, em que aparece a secção determinada em uma esfera de raio R por um plano β.



A intersecção do plano β com a esfera é um círculo de raio r. Se d é a distância de O (centro da esfera) ao plano β, temos:

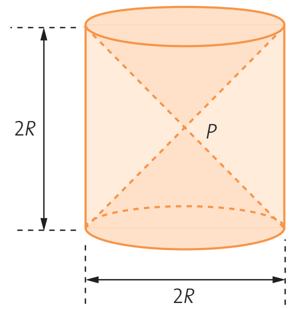
$$R^2 = d^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - d^2$$

Portanto, a área da secção é dada por:

$$\pi(R^2 - d^2)$$

Fique atento!
Se um plano secciona uma esfera, a secção é sempre um círculo.

O volume da esfera será determinado utilizando-se o princípio de Cavalieri. Para isso, vamos considerar inicialmente um sólido S que será obtido da seguinte maneira: de um cilindro equilátero de raio R e altura $2R$ retiramos dois cones de raio R, altura R e vértice P.

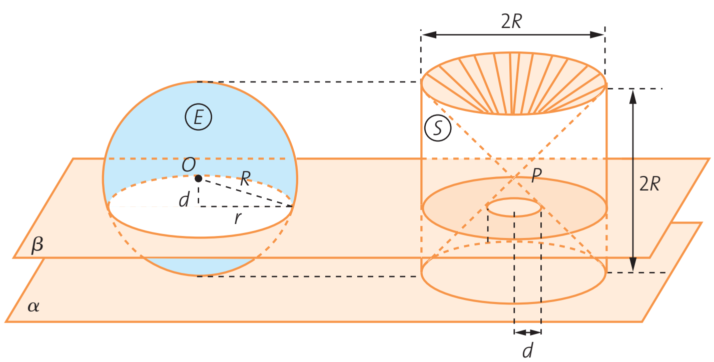


Você sabia?
Esse sólido S é conhecido como anticlepsidra.

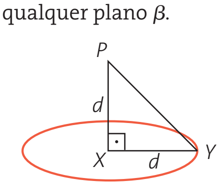
O volume do sólido S é tal que:

$$\text{volume de } S = \underbrace{\pi R^2 \cdot 2R}_{\text{cilindro}} - \underbrace{2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R}_{2 \text{ cones}} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Agora podemos considerar, apoiados em um plano α, esse sólido S e uma esfera E de raio R, conforme mostra a figura:



Fique atento!
A reta OP é paralela ao plano α.
O raio do círculo menor da coroa é d, pois o $\triangle PXY$ indicado abaixo é retângulo e isósceles para qualquer plano β.



Se um plano β, paralelo a α, seccionar a esfera E, a área da secção será $\pi(R^2 - d^2)$ conforme foi visto. Além disso, β também secciona o sólido S e a secção será uma coroa circular de raios R e d, e também de área igual a $\pi(R^2 - d^2)$.

A igualdade das áreas das secções permite concluir, pelo princípio de Cavalieri, que a esfera E tem o mesmo volume que o sólido S, que como sabemos é $\frac{4}{3}\pi R^3$.

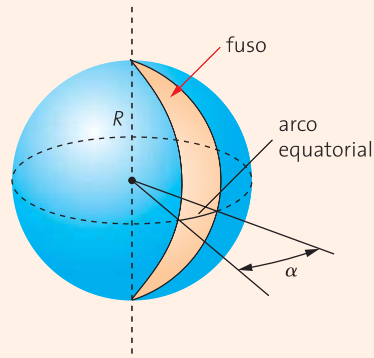
Podemos então concluir que, se uma esfera tem raio R, seu volume é:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

CONTEÚDO DIGITAL

Exercícios resolvidos

11. Um fuso esférico é uma parte da superfície esférica gerada pela rotação (de α graus ou radianos) de uma semicircunferência de raio R com as extremidades em um eixo. A área do fuso é proporcional ao ângulo α, de forma que, quando α for 360° (ou 2π rad), tem-se a área da superfície esférica, ou seja, $4\pi R^2$. Encontre a fórmula que permite obter a área do fuso em função do raio R e do ângulo α para graus e para radianos.



Resolução:

Pelo enunciado, temos:

$$\frac{A_{\text{fuso}}}{4\pi R^2} = \frac{\alpha_{\text{graus}}}{360°} = \frac{\alpha_{\text{rad}}}{2\pi}.$$

Então:

$$A_{\text{fuso}} = \frac{\alpha_{\text{graus}}}{360°} \cdot 4\pi R^2 = \frac{\alpha \pi R^2}{90°} \text{ } (\alpha \text{ em graus})$$

$$A_{\text{fuso}} = \frac{\alpha_{\text{rad}}}{2\pi} \cdot 4\pi R^2 = 2\alpha R^2 \text{ } (\alpha \text{ em radianos})$$

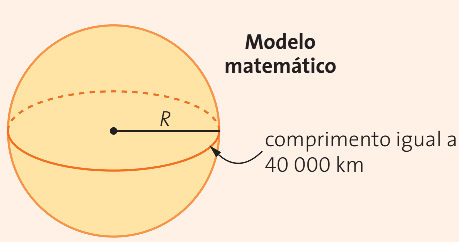
12. Responda às questões relativas ao planeta Terra.

a) Como calcular o seu volume e a área de sua superfície?

b) Como calcular a área coberta de água (em km²) em sua superfície?

Resolução:

a) Sabe-se que a linha do equador tem 40 000 km aproximadamente.



Considerando a Terra uma figura de forma esférica, temos $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Como $C = 40\,000$ km e $C = 2\pi R$, vamos determinar R, considerando $\pi = 3{,}14$:

$40\,000 = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{40\,000}{2\pi} \simeq 6\,369$;

$R \simeq 6369$ km

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6\,369^3 \simeq 1{,}08 \cdot 10^{12}$;

$V = 1{,}08 \cdot 10^{12}$ km³

A área da superfície da esfera é dada por $A = 4\pi R^2$. No caso do planeta Terra, como $R \simeq 6\,369$ km, temos:

$A \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,369^2 = 509\,485\,862{,}1$

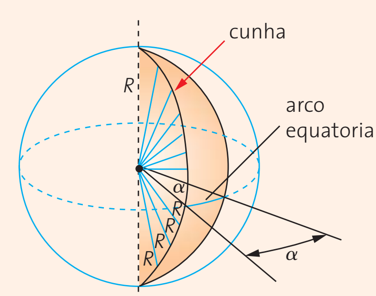
Portanto, o volume aproximado da Terra é $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km³ e sua área aproximada é $5{,}09 \cdot 10^8$ km².

b) Como três quartos da superfície da Terra são cobertos de água, temos:

$\frac{3}{4}A \simeq \frac{3}{4} \cdot 5{,}09 \cdot 10^8 \simeq 3{,}82 \cdot 10^8$

A área coberta de água é de aproximadamente $3{,}82 \cdot 10^8$ km².

13. Uma cunha esférica é uma parte da esfera, gerada pela rotação (de α graus ou radianos) de um semicírculo de raio R com as extremidades em um eixo. O volume da cunha é proporcional ao ângulo α, de forma que, quando α for 360° (ou 2π rad), tem-se o volume da esfera, ou seja, $\frac{4}{3}\pi R^3$. Encontre a fórmula que permite obter o volume da cunha em função do raio R e do ângulo α para graus e para radianos.



Resolução:

Pelo enunciado, temos:

$$\frac{V_{\text{cunha}}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\alpha_{\text{graus}}}{360°} = \frac{\alpha_{\text{rad}}}{2\pi}. \text{ Então:}$$

$$V_{\text{cunha}} = \frac{\alpha_{\text{graus}}}{360°} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\alpha \pi R^3}{270°} \text{ } (\alpha \text{ em graus})$$

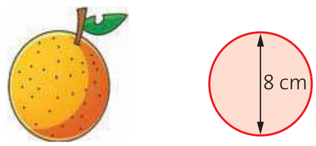
$$V_{\text{cunha}} = \frac{\alpha_{\text{rad}}}{2\pi} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2\alpha R^3}{3} \text{ } (\alpha \text{ em radianos})$$

Exercícios

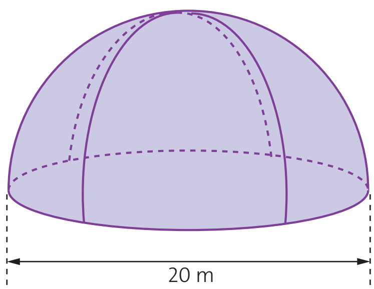
31. Determine a área da superfície esférica cujo raio é 6 cm.

32. Uma laranja tem a forma esférica com a medida indicada abaixo. Qual é a área aproximada da casca dessa laranja?

Ilustrações: Dam d'Souza/ Arquivo da editora



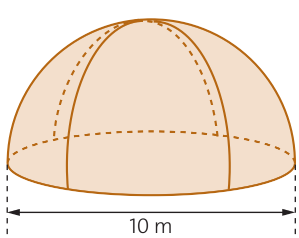
33. A figura abaixo representa um hemisfério. Qual é a área da superfície desse hemisfério?



34. Qual é o volume de uma bola de basquete cujo diâmetro mede 26 cm? Use $\pi = 3$.

35. O diâmetro de uma esfera de ferro fundido mede 6 cm. Qual é o volume dessa esfera?

36. Um reservatório tem a forma de um hemisfério (figura a seguir). Qual é o volume máximo de líquido que cabe nesse reservatório em litros? Use $\pi = 3$.



37. Considere uma laranja como uma esfera composta de 12 gomos exatamente iguais. Se a laranja tem 8 cm de diâmetro, qual é o volume de cada gomo?

38. Um reservatório de forma esférica (figura abaixo) tem 9 m de raio. Para encher totalmente esse reservatório são necessárias 20 horas. Nessas condições, o reservatório recebe água na razão de quantos m^3/h?

39. Calcule o volume de uma esfera de raio $\sqrt[3]{\pi}$ cm.

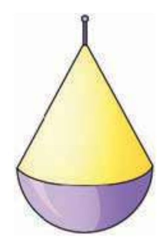
40. O volume de uma esfera é $\frac{512\pi}{3}$ cm^3. Calcule o raio e a área da superfície esférica.

41. Uma cunha tem ângulo de 60° e raio $r = 6$ cm. Determine seu volume.

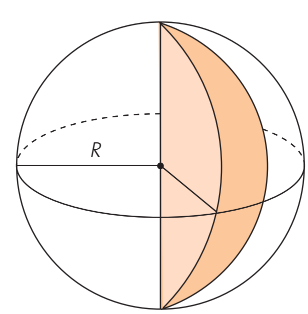
42. Um fuso de 30° tem 3 cm de raio. Qual é sua área?

43. ATIVIDADE EM DUPLA Uma cunha esférica correspondente a um ângulo de 72° tem volume igual a 6,4 m^3. Calculem a área do fuso esférico determinado por essa cunha na esfera. Considerem $\pi = 3$.

44. ATIVIDADE EM DUPLA Sabemos que uma boia (figura a seguir) serve para orientar os navios na entrada de um porto. Essa boia é formada por um hemisfério de 2 m de diâmetro e por um cone que tem 80 cm de altura. Qual é o volume da boia? Use $\pi = 3$.



45. ATIVIDADE EM DUPLA (Vunesp-SP) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, onde cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm^2, determine, em função de π e de R:

a) a área da casca de cada fatia de melancia (fuso esférico);

b) quantos centímetros quadrados de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

Um pouco mais...

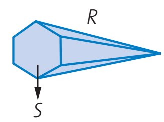
Área da superfície esférica

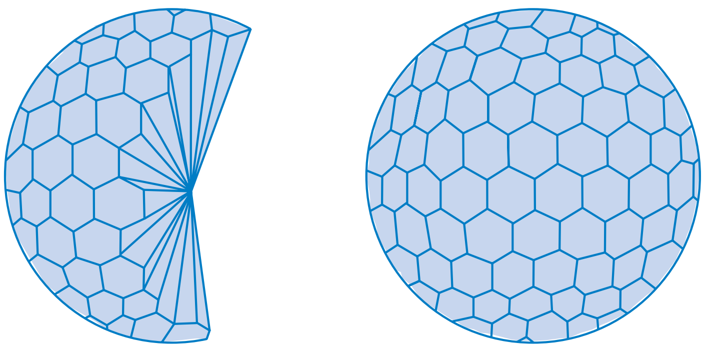
Conhecendo o volume da esfera, podemos mostrar intuitivamente por que a área da superfície esférica é:

$$A = 4\pi R^2$$

Vamos imaginar uma esfera de raio R como a reunião de sólidos que "parecem" pirâmides. De fato, esses sólidos **não são pirâmides** perfeitas, pois a base das pirâmides é plana e esses sólidos têm bases com superfície arredondada (as bases pertencem à superfície da esfera).

Contudo, tomando essas bases como sendo as menores possíveis, pode-se tratar essas superfícies arredondadas como superfícies planas, permitindo considerar os sólidos como "pirâmides". Assim, podemos admitir que o volume da esfera é equivalente à soma dos volumes de todas essas "pirâmides" de bases minúsculas.





Repare que a altura da "pirâmide" é o raio da esfera. Pensando desse modo, a superfície esférica fica dividida em um número infinitamente grande de "polígonos" (base das "pirâmides").

Digamos então que a superfície esférica tenha ficado dividida em n polígonos (n suficientemente grande), cujas áreas são $S_1, S_2, ..., S_n$.

Lembrando que o volume de cada "pirâmide" é:

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{SR}{3}$$

e que $S_1 + S_2 + ... + S_n = A$ é a área da superfície esférica, vem:

$$V = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + ... + \frac{1}{3}S_nR = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + ... + S_n)R = \frac{1}{3}AR$$

ou seja:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}AR \Rightarrow A = 4\pi R^2$$

Logo, a área da superfície esférica de raio R é:

$$A = 4\pi R^2$$

Fique atento!
Essa demonstração é meramente intuitiva.
Ela ajuda a entender melhor a conexão entre área e volume de uma esfera.
A rigor, precisaríamos usar a noção de limite para fazer a demonstração matemática.

Leitura

A Geometria e o conhecimento científico

A Geometria, ao longo de toda a sua história, acompanhou o ser humano na busca pelo conhecimento da natureza que o cerca. Quando a civilização grega chegou ao ápice, os gregos assumiram o desenvolvimento da Geometria. Passaram a privilegiar o conhecimento dedutivo e não o empírico, como ocorria até então. E questões que sempre intrigaram a humanidade, como o tamanho do raio da Terra, a distância da Terra à Lua ou da Terra ao Sol, já estimadas em outras épocas por outros sábios, passaram, a partir de então, a ser tratadas com o auxílio dos conhecimentos geométricos.

Com o fim da hegemonia grega, o mundo passou por quase 15 séculos de trevas. Apenas com a queda de Constantinopla e o início do Renascimento, os textos gregos voltaram à Europa, trazidos pelos que fugiam da invasão turca. E, com o seu ressurgimento, também voltaram as contribuições da Geometria aos outros campos do conhecimento científico.

Eis alguns bons exemplos de contribuições da Geometria à ciência ao longo do tempo:

O grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) foi brilhante em perceber como comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol usando triângulos retângulos, semelhanças de triângulos e proporções.*

Eratóstenes (276 a.C.-196 a.C.) não era grego, mas estudou em Atenas e viveu em Alexandria, importante centro cultural da época. Ficou conhecido por sua versatilidade e por uma engenhosa ideia para calcular o raio da Terra, baseado na proporcionalidade entre medida e comprimento de arcos, nos ângulos correspondentes em paralelas cortadas por transversais e na razão entre comprimento da circunferência e seu diâmetro.**

O polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) retomou as hipóteses heliocêntricas de Aristarco (que na época não vingaram) e elaborou toda uma teoria em que os planetas teriam órbitas circulares em torno do Sol, calculando os períodos de revolução dos planetas e suas distâncias até o Sol, com base na proporcionalidade de arcos e semelhança de triângulos (já na forma de Trigonometria).***

O alemão Johannes Kepler (1571-1630) aperfeiçoou as ideias de Copérnico ao afirmar que as órbitas planetárias são na verdade elípticas e apresentou as três leis que hoje conhecemos como "leis de Kepler", repletas de proporcionalidades, áreas e elipses.

A Geometria que estudamos hoje é essencialmente a mesma que serviu de alicerce para que os estudiosos do passado conseguissem cada vez mais adquirir conhecimento e entender melhor a natureza que nos cerca. Se hoje sabemos muito sobre ela e seus fenômenos, isso é resultado do esforço e da dedicação de muitos sábios da Antiguidade, alguns dos quais considerados os maiores astrônomos, geômetras ou matemáticos de suas épocas.

Cezary Wojtkowski/Other Images

Monumento em homenagem a Nicolau Copérnico esculpido por Bertel Thorvaldsen, localizado na cidade de Torun na Polônia.

Stock Montage/Getty Images

Johannes Kepler (1571-1630).

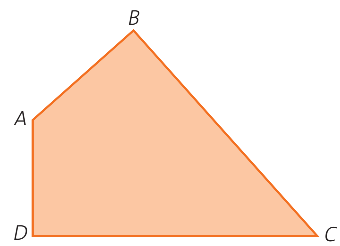
* Para mais detalhes, leia "Aristarco e as dimensões astronômicas", do Prof. Geraldo Ávila, em *Revista do Professor de Matemática 55*, SBM, 2004, p. 1-10.

** Sobre a ideia de Eratóstenes, leia "Se eu fosse professor de Matemática", do Prof. Geraldo Ávila, em *Revista do Professor de Matemática 54*, SBM, 2004, p. 2-9.

*** Para saber detalhes sobre os cálculos de Copérnico, leia "Geometria e Astronomia", do Prof. Geraldo Ávila, em *Revista do Professor de Matemática 13*, SBM, 1988, p. 5-12.

Pensando no ENEM

1. Guta e Felipe compraram uma pequena chácara de formato de um quadrilátero irregular, como na figura abaixo.



Curiosos em saber a área do terreno, eles perceberam que na planta havia somente as medidas dos lados. Uma maneira de calcular a área do terreno é:

a) multiplicar as medidas dos lados e depois extrair a raiz quadrada.

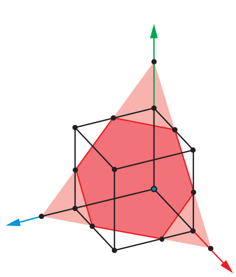
b) utilizar a fórmula $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, em que p é a medida do semiperímetro e a, b, c e d são as medidas dos lados.

c) simplesmente multiplicar as medidas da base pela altura.

d) fazer a medição de uma das diagonais, dividindo o quadrilátero em dois triângulos. Com as medidas dos lados dos dois triângulos, calcular as suas áreas e depois adicioná-las.

e) Como todo quadrilátero é circunscritível em uma circunferência, basta calcular a medida do raio da circunferência inscrita neste quadrilátero e depois multiplicar o semiperímetro pelo raio.

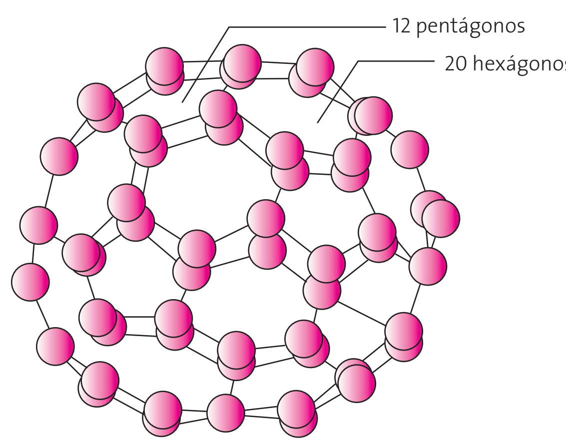
2. Quando um plano intercepta um cubo, sobre ele podem ser geradas várias figuras planas, por exemplo, um hexágono, como mostra a figura a seguir.
Assinale a alternativa que contém um polígono que não pode ser obtido na intersecção de um plano e um cubo.



a) triângulo
b) quadrado
c) pentágono
d) hexágono
e) heptágono

3. Uma bola de futebol é formada por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas com lados congruentes entre si. Sabe-se que, para costurar essas faces lado a lado, formando a superfície de um poliedro convexo, usam-se 20 cm de linha em cada aresta do poliedro. Essa mesma estrutura da bola de futebol repete-se em uma molécula tridimensional formada por átomos de carbono, o buckminsterfullereno, em que os átomos ocupam os vértices do poliedro convexo. Veja as figuras:

Le Do/Shutterstock/Glow Images



Com base nessas informações, pode-se inferir que:

a) a molécula possui 40 átomos de carbono e o número de ligações entre esses átomos é 90.

b) são necessários 20 metros de linha para costurar inteiramente a bola.

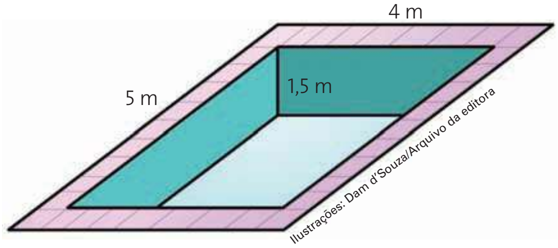
c) o número de ligações entre 60 átomos da molécula é 90.

d) a molécula possui 60 átomos de carbono e são necessários 18 metros de linha para costurar inteiramente a bola.

e) a bola de futebol possui 32 faces, 90 arestas e 30 vértices.

Veja a seção **Caiu no Enem** no final do livro.

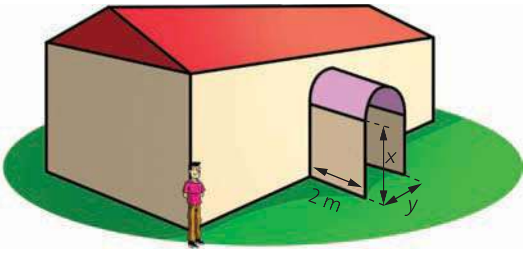
4. Artur quer encher a piscina de sua casa, pois a previsão do tempo indicou que o dia seguinte será muito quente e ele convidou sua família para um almoço nesse dia. Veja as dimensões da piscina:



A piscina receberá água através de uma mangueira. Como Artur está sem tempo para ficar acompanhando o enchimento da piscina, ele verifica que a mangueira despeja água durante 30 segundos para encher uma lata em forma de paralelepípedo de dimensões 0,2 m $\times$ 0,2 m $\times$ 0,5 m. Sabendo-se que a piscina estava completamente seca e Artur começou a enchê-la às 20h, a que horas a piscina estará completamente cheia?

a) 23h do mesmo dia.
b) 3h30min do dia seguinte.
c) 6h do dia seguinte.
d) 8h30min do dia seguinte.
e) 21h do dia seguinte.

5. O dono de um armazém deseja construir para um cão de guarda um abrigo anexo ao armazém. O abrigo será retangular e aberto, consistindo em dois lados verticais de 2 m de largura e um teto na forma da metade da superfície lateral de um cilindro.
O teto deve ser feito de um tipo de metal que custa R\$ 10,00 o metro quadrado, e os outros dois lados devem ser de compensado, que custa R\$ 30,00 o metro quadrado.
Levando em consideração as informações dadas, leia atentamente as alternativas a seguir e assinale a correta.



a) A área da superfície do abrigo a ser construído é dada em função de x e y por $A(x, y) = 4x + 6y$.
b) O custo em reais para a construção desse abrigo é dado em função de x e y por $C(x, y) = 30x + 10y$.
c) O volume do abrigo é expresso como função de x e y por $V(x, y) = 2xy + \pi y^2$.
d) Para dividir esse abrigo ao meio com uma folha de compensado retangular na posição vertical, essa folha deverá ter comprimento de 2 m e altura de $(x + y)$ m.
e) Se o dono do armazém tomar $x = 1$ m e $y = 2$ m, o custo de construção do abrigo será R\$ 182,80.

6. (Enem) O globo da morte é uma atração muito usada em circos.
Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

Reprodução/Enem 2012


Figura 1

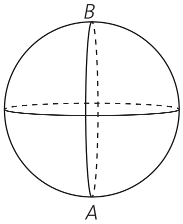
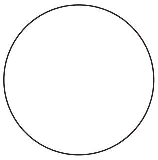


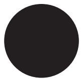
Figura 2

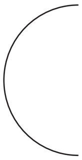
Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão.
Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

Disponível em: <www.baixaki.com.br>. Acesso em: 29 fev. 2012.

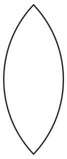
A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é mais bem representada por:

a) 

d) 

b) 

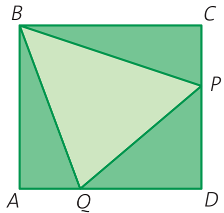
e)

c) 

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. (Ufam) Observe a figura ao lado: Nessa figura, o quadrado *ABCD* tem área igual a 4, o triângulo *BPQ* é equilátero, e os pontos *P* e *Q* pertencem, respectivamente, aos lados *CD* e *AD*. Assim sendo, a área do triângulo *ABQ* é:



a) $4 - \sqrt{3}$. c) $4 - 2\sqrt{3}$. e) $2 + 2\sqrt{3}$.

b) $4 + 2\sqrt{3}$. d) $4 + \sqrt{3}$.

2. (Ufam) Considere as afirmações:

I. Duas retas no espaço, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si.

II. Um plano α, perpendicular a uma reta de um plano β, é paralelo a β.

III. Dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos.

Então:

a) Todas são falsas. d) Somente I é falsa.

b) Todas são verdadeiras. e) Somente III é falsa.

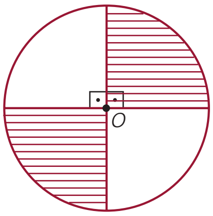
c) Somente II é falsa.

3. (Ufac) Um depósito de água tem base quadrada e laterais perpendiculares à base. Quando se adicionam 500 ℓ de água ao depósito, a altura da água sobe 10 cm. Dado que a altura do depósito mede 2 m, sua capacidade em m^3 é igual a:

a) 8. b) 5. c) 10. d) 0,5. e) 1.

Região Nordeste

4. (UFC-CE) Na figura ao lado, a razão entre o perímetro da região hachurada e o perímetro da circunferência é: (*O* é o centro da circunferência.)



a) $\frac{1}{3}$. d) $\frac{\pi + 4}{2\pi}$.

b) $\frac{\pi + 4}{4\pi}$. e) 2.

c) $\frac{\pi}{4}$.

5. (UFPB) Assinale a alternativa cuja proposição é sempre verdadeira.

a) A projeção ortogonal de uma reta num plano é uma reta.

b) Duas retas distintas que não têm ponto comum são paralelas.

c) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um é paralela a qualquer reta do outro.

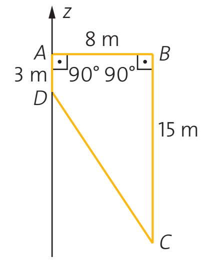
d) Se duas retas são ortogonais, então existe um único plano que passa por uma delas e é perpendicular à outra.

e) Dois planos secantes são perpendiculares.

6. (UFMA) O volume do sólido gerado pela rotação da figura plana *ABCD*, abaixo, em torno do eixo *z* é:

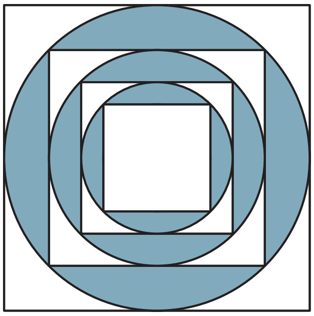
a) 532π m^3. c) 704π m^3. e) 725π m^3.

b) 360π m^3. d) 680π m^3.



Região Centro-Oeste

7. (UFMS) Uma sequência de quatro quadrados foi construída, na ordem do maior para o menor, de forma que um quadrado está circunscrito na circunferência na qual o quadrado seguinte está inscrito e assim sucessivamente, como ilustrado na figura ao lado:



Sabendo-se que a área do menor quadrado mede 4 m^2, então a área total destacada em azul mede: (Use $\pi = 3$, para obter o valor procurado final.)

a) 16 m^2. b) 14 m^2. c) 12 m^2. d) 10 m^2. e) 8 m^2.

8. (UEG-GO) Observe e classifique as afirmações abaixo como sendo verdadeiras ou falsas:

I. Se um plano intercepta dois outros planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.

II. Se dois planos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.

III. Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

IV. Se dois planos são paralelos, uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro.

Marque a alternativa correta:

a) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

b) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

c) Apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.

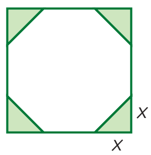
d) Apenas as afirmações II e IV são verdadeiras.

e) Apenas as afirmações III e IV são verdadeiras.

9. (UFMT) Considere um cilindro circular reto de perímetro da base 16π cm inscrito em um cubo que, por sua vez, está inscrito em uma esfera. Determine a área da superfície dessa esfera.

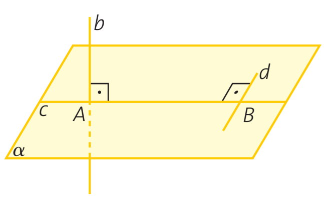
Região Sudeste

10. (UFV-MG) De um piso quadrado de 34 cm de lado recortam-se pequenos triângulos retângulos isósceles de cateto x, de modo a obter um piso em forma de octógono regular, conforme ilustra a figura abaixo. Considere $\sqrt{2} = 1{,}4$.



a) Determine o valor de x.
b) Calcule a área de um dos triângulos recortados.
c) Calcule a área do octógono.

11. (Fatec-SP) Na figura a seguir tem-se: o plano α definido pelas retas c e d, perpendiculares entre si; a reta b, perpendicular a α em A, com $A \in c$; o ponto B, intersecção de c e d.



Se X é um ponto de b, $X \notin \alpha$, então a reta s, definida por X e B:
a) é paralela à reta c.
b) é paralela à reta b.
c) está contida no plano α.
d) é perpendicular à reta d.
e) é perpendicular à reta b.

12. (UFRRJ) Observe o bloco retangular da figura 1, de vidro totalmente fechado com água dentro. Virando-o, como mostra a figura 2, podemos afirmar que o valor de x é:
a) 12 cm. c) 10 cm. e) 6 cm.
b) 11 cm. d) 5 cm.

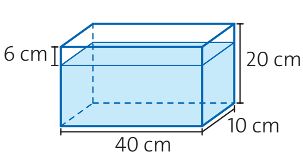


Figura 1

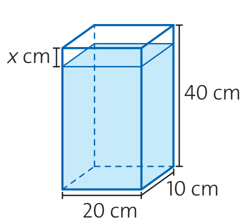
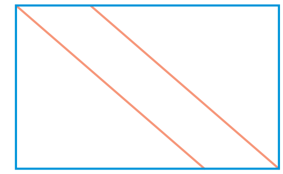


Figura 2

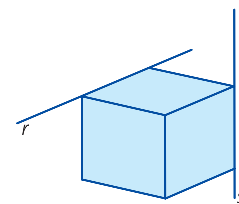
Região Sul

13. (PUC-RS) Um jardim de forma retangular com medidas 6 m × 8 m possui dois canteiros em forma de triângulos isósceles e um passeio no centro, como na figura ao lado.



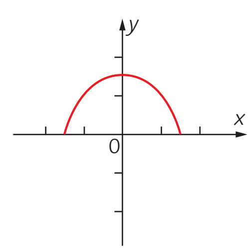
A área do passeio, em metros quadrados, é:
a) 64. c) 24. e) 2.
b) 36. d) 12.

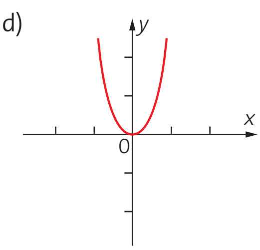
14. (UEL-PR) As retas r e s foram obtidas prolongando-se duas arestas de um cubo, como está representado na figura ao lado:

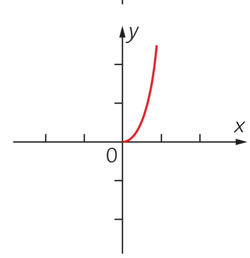


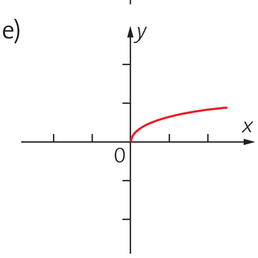
Sobre a situação dada, assinale a afirmação incorreta.
a) r e s são retas paralelas.
b) r e s são retas reversas.
c) r e s são retas ortogonais.
d) Não existe plano contendo r e s.
e) $r \cap s = \varnothing$

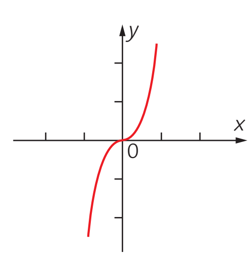
15. (PUC-RS) A representação geométrica da função que calcula o volume de uma esfera de raio x é:

a)


d)


b)


e)


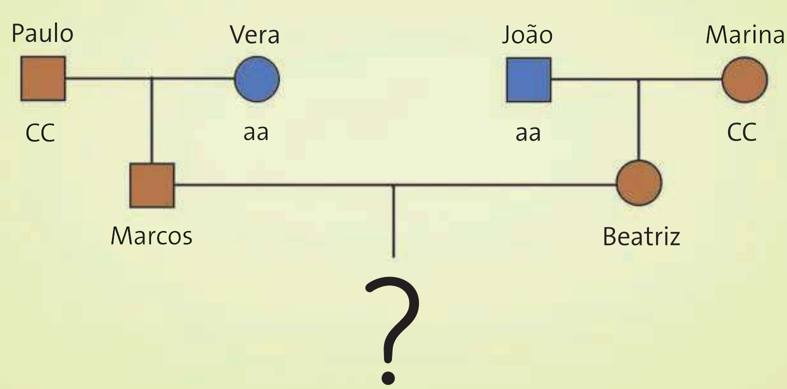
c)


UNIDADE

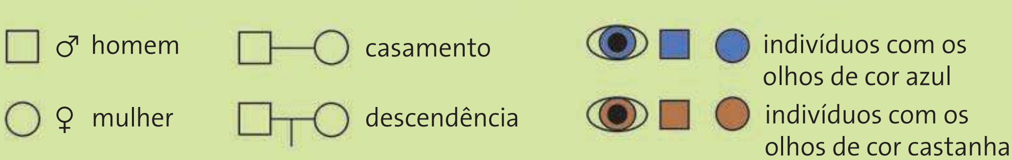
4 Análise combinatória e probabilidade

Acredita-se que na herança da cor da íris dos olhos estejam envolvidos pelo menos 4 pares de genes que determinam 9 tonalidades distintas: azul-claro, azul-médio, azul-escuro, cinza, verde, avelã (mel), castanho-claro, castanho-médio e castanho-escuro (preto).

Sem levar em conta as tonalidades possíveis, consideremos qualquer tonalidade de azul como simplesmente azul e qualquer tonalidade de castanho como simplesmente castanho. Desse modo, vejamos a árvore genealógica de Marcos e Beatriz, que estão à espera de um bebê.



Nessa árvore, temos:



Crédito das fotos da esquerda para a direita: Malyugin/Shutterstock/Glow Images, Altafulla/Shutterstock/Glow Images, Yuri Arcurs/Shutterstock/Glow Images (olhos azuis); Remy Musser/Shutterstock/Glow Images, Wallenrock/Shutterstock/Glow Images, Pressmaster/Shutterstock/Glow Images (olhos verdes); Rocketclips/Shutterstock/Glow Images, Inga Ivanova/Shutterstock/Glow Images, ZouZou/Shutterstock/Glow Images (olhos castanhos).

Sendo a cor castanha dominante, ou seja, a cor castanha prevalecendo mesmo que haja um gene da cor azul, tanto Marcos quanto Beatriz podem ter a combinação de genes CC ou Ca. Assim, as possibilidades de combinação dos seus genes na fecundação são:

♂ \ ♀	**C**	**a**
C	CC	Ca
a	Ca	aa

Dessa forma, podemos afirmar que a probabilidade de Beatriz e Marcos terem um bebê com olhos castanhos é de 75% e com olhos azuis é de 25%.

Szefei/Shutterstock/Glow Images

Yuri Arcurs/Shutterstock/Glow Images

75%

25%

1. De acordo com a árvore genealógica, qual é o grau de parentesco entre Marcos e as pessoas que têm olhos azuis?
2. É mais provável que o bebê de Marcos e Beatriz tenha olhos azuis ou castanhos? Por quê?

CAPÍTULO 11

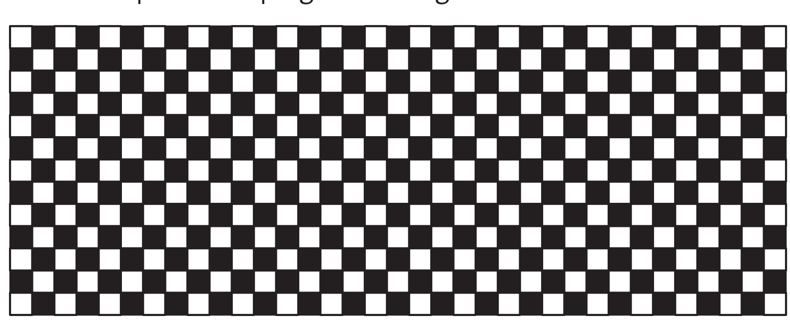
Análise combinatória

A análise combinatória é o campo da Matemática que trata das técnicas de contagem. Se dermos a uma criança de 8 anos um punhado de moedas para que sejam contadas, ela provavelmente contará uma a uma. Já o adulto com a mesma tarefa costuma usar algumas técnicas que evitam ou minimizam os erros de contagem, por exemplo, fazendo grupinhos de 5 ou 10, e depois contando os grupinhos. Este capítulo vai tratar das principais técnicas de contagem.

Uppercut/Other Images

Claudia Gopperl/Getty Images

» Agora, forme dupla com um colega, observem a figura abaixo e tentem responder às perguntas a seguir.



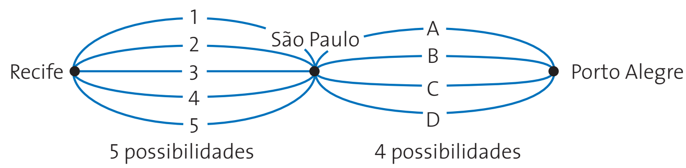
- Quantos quadradinhos no total (brancos e pretos) existem nessa figura?
- E quantos quadradinhos pretos?

1 Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

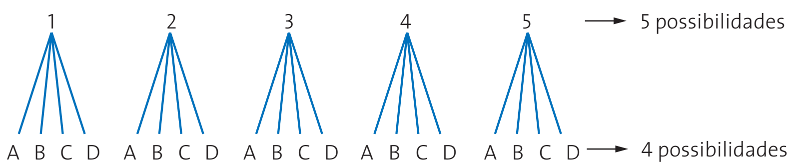
Acompanhe a seguir a resolução de alguns problemas.

1º) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Para facilitar a compreensão, vamos utilizar os esquemas seguintes:



ou



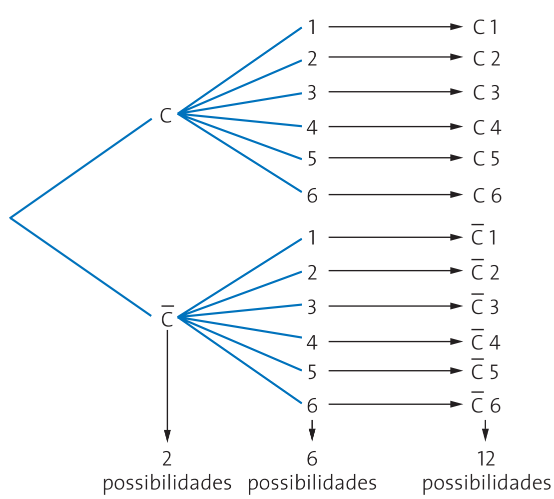
Para refletir
Dizemos que a viagem de Recife a Porto Alegre é um evento composto de duas etapas sucessivas e independentes. Quais são elas?

Total de possibilidades: $5 \cdot 4 = 20$.

São elas: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D, 4A, 4B, 4C, 4D, 5A, 5B, 5C e 5D.

Portanto, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo.

2º) Ao lançarmos uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado (sendo C: cara e $\overline{C}$: coroa):



Fique atento!
A esse segundo esquema damos o nome de **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore**.

Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 12 possibilidades ($2 \cdot 6 = 12$).

De modo geral, podemos dizer:

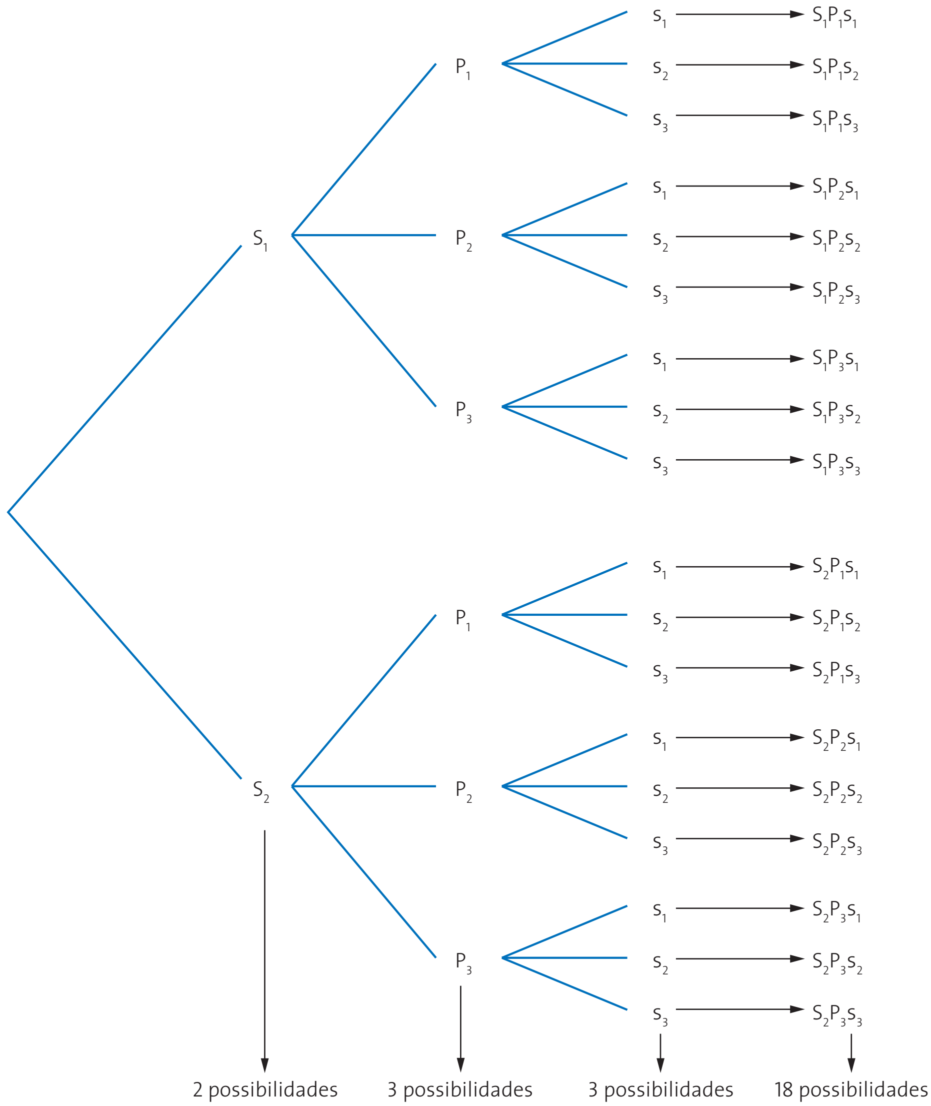
> Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Esse é o **princípio fundamental da contagem**.

Observação: O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.

3º) Em um restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

Representando por S_1 e S_2 os 2 tipos de salada; por P_1, P_2 e P_3 os 3 tipos de pratos quentes; e por s_1, s_2 e s_3 os 3 tipos de sobremesa, temos:



Portanto, o número total de possibilidades é $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

4º) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

____ ____ ____
centena dezena unidade

Há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 8 para a dezena e 8 para a unidade. Portanto, podemos formar 448 números ($7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$).

b) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

____ ____ ____
centena dezena unidade

Com 3 algarismos distintos, há 7 possibilidades para a centena, 7 para a dezena e 6 para a unidade. Portanto, podemos formar 294 números ($7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$) de 3 algarismos distintos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Para refletir
O zero é excluído do algarismo das centenas, pois o número considerado deve ter 3 algarismos. Justifique.

2 Permutações simples e fatorial de um número

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição.

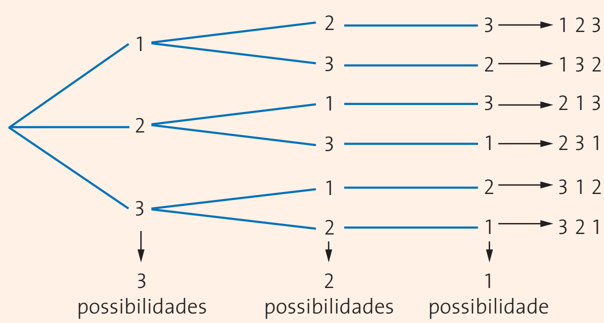
Vejamos agora quantos agrupamentos é possível formar quando temos n elementos e todos serão usados em cada agrupamento. Observe os exercícios resolvidos:

Exercícios resolvidos

1. Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los em um mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Resolução:

Podemos resolver por tentativa. Assim, temos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Concluímos então que são 6 os números procurados. Podemos também fazer uma árvore de possibilidades:



Pelo princípio fundamental da contagem, temos 6 possibilidades ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$).
Observe que a **ordem dos algarismos** é muito importante. Todos os números diferem entre si pela ordem de seus algarismos.

2. Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?

____ ____ ____ ____

Resolução:

Considerando as quatro letras: **a**, **n**, **e** e **l**, há 4 possibilidades para a primeira posição, 3 possibilidades para a segunda, 2 possibilidades para a terceira e 1 possibilidade para a quarta posição.
Pelo princípio fundamental da contagem, temos 24 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$), ou seja, são 24 anagramas.

De modo geral, se temos n elementos distintos, quantas filas podemos formar? Podemos escolher o primeiro elemento da fila de n maneiras. Agora, de quantas maneiras podemos escolher o segudo elemento da fila? De $n - 1$ maneiras. Prosseguindo dessa forma e usando o princípio multiplicativo, fica claro que o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses n elementos é dado por:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de **permutações simples**. Indicamos por P_n o número de permutações simples de n elementos:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Fatorial

O valor obtido com P_n é também chamado **fatorial** do número natural n e indicado por $n!$ (lê-se "fatorial de n" ou "n fatorial").

Assim, temos $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geqslant 1$.

Considera-se $0! = 1$.

Fique atento!

Podemos escrever:

$n! = n \cdot (n - 1)!$

$15! = 15 \cdot 14 \cdot 13!$

Exemplos:

a) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

Exercícios resolvidos

3. Calcule quantos são os anagramas:

a) da palavra PERDÃO;

b) da palavra PERDÃO que iniciam com *P* e terminam em *O*;

c) da palavra PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntas e nessa ordem (ÃO);

d) da palavra PERDÃO em que P e O aparecem nos extremos;

e) da palavra PERDÃO em que as letras PER aparecem juntas, em qualquer ordem.

Resolução:

a) Basta calcular $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

b) P __ __ __ __ O

Devemos permutar as 4 letras não fixas, ou seja, calcular P_4:

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Portanto, há 24 anagramas da palavra PERDÃO iniciados com *P* e terminados em *O*.

c) É como se a expressão ÃO fosse uma só letra: PERDÃO ; assim, temos que calcular P_5:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

d) P __ __ __ __ O

O __ __ __ __ P

Temos então $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$; 48 anagramas.

e) Considerando PER como uma só letra, PER DÃO, temos que calcular P_4:

$P_4 = 4! = 24$

Como as 3 letras de PER podem aparecer em qualquer ordem, temos $P_3 = 3! = 6$ possibilidades de escrevê-las juntas.

Assim, o número total de anagramas pedido é:

$P_4 \cdot P_3 = 24 \cdot 6 = 144$; 144 anagramas

4. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{20!}{18!}$ b) $\dfrac{48! + 49!}{50!}$ c) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$

Resolução:

a) $\dfrac{20!}{18!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$

b) $\dfrac{48! + 49!}{50!} = \dfrac{48! + (49 \cdot 48!)}{50!} = \dfrac{\cancel{48!}\ (1 + 49)}{50 \cdot 49 \cdot \cancel{48!}} =$

$= \dfrac{\cancel{50}}{\cancel{50} \cdot 49} = \dfrac{1}{49}$

c) $\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{\cancel{n!}}{(n+1)\ \cancel{n!}} = \dfrac{1}{n+1}$

5. Colocando todos os anagramas da palavra ÂNGULO listados em ordem alfabética, como em um dicionário, em que posição da lista estará a palavra:

a) ÂGLNOU? b) UONLGÂ? c) ÂNGULO?

Resolução:

a) Todas as letras estão em ordem alfabética, logo a palavra ÂGLNOU ocupa a 1ª posição.

b) As letras da palavra UONLGÂ estão na ordem inversa da 1ª posição, portanto esta palavra ocupa a última posição.

$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Assim, UONLGÂ ocupa a 720ª posição.

c) Â G __ __ __ __ $\rightarrow P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Â L __ __ __ __ $\rightarrow P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Â N G L __ __ $\rightarrow P_2 = 2 \cdot 1 = 2$

Â N G O __ __ $\rightarrow P_2 = 2 \cdot 1 = 2$

Â N G U L O $\rightarrow P_1 = 1$

Assim,

$24 + 24 + 2 + 2 + 1 = 53$

Portanto, ocupa a 53ª posição.

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Existem 2 vias de locomoção de uma cidade *A* para uma cidade *B* e 3 vias de locomoção de uma cidade *B* a uma cidade *C*. De quantas maneiras pode-se ir de *A* a *C* passando por *B*?

2. De quantas maneiras diferentes pode-se vestir uma pessoa que tenha 5 camisas, 3 calças, 2 pares de meia e 2 pares de sapato?

3. Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado?

4. Em uma lanchonete há 5 tipos de sanduíche, 4 tipos de refrigerante e 3 tipos de sorvete. De quantas maneiras podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 sorvete?

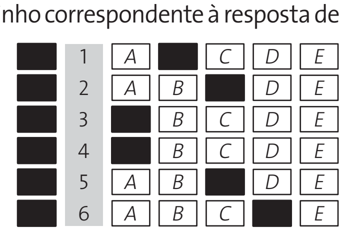
5. Quantos números de dois algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das dezenas corresponde a um múltiplo de 2 (diferente de zero) e o algarismo das unidades corresponde a um múltiplo de 3?

6. Usando somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números:
   a) de 2 algarismos podemos formar?
   b) pares de 2 algarismos podemos formar?
   c) ímpares de 2 algarismos podemos formar?
   d) de 2 algarismos distintos podemos formar?
   e) de 2 algarismos pares podemos formar?

7. DESAFIO EM DUPLA Uma prova é composta de 7 questões do tipo "Verdadeiro ou Falso". De quantas maneiras um aluno pode responder essa prova aleatoriamente, ou seja, "chutando" as respostas?

8. DESAFIO EM DUPLA Em um salão de festas há 6 janelas. De quantas maneiras podemos escolher quais janelas estarão abertas ou fechadas, de modo que pelo menos uma das janelas esteja aberta?

9. DESAFIO EM DUPLA Em uma prova de vestibular com 90 questões do tipo teste, cada questão tem 5 alternativas. O aluno deve preencher um cartão de respostas, assinalando o quadradinho correspondente à resposta de cada questão.



De quantas maneiras diferentes o cartão de respostas com as 90 questões dessa prova poderá ser preenchido aleatoriamente? (Suponham que todas as 90 questões foram respondidas no cartão.)

10. Calcule o valor ou simplifique:
    a) $6!$
    b) $\dfrac{7!}{4!}$
    c) $\dfrac{3!5!}{4!6!}$
    d) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$
    e) $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!}$
    f) $\dfrac{(n+3)!}{(n-2)!} \cdot \dfrac{(n-1)!}{(n+2)!}$

11. Determine o valor de *n* nas equações:
    a) $\dfrac{n!}{(n-2)} = 56$
    b) $(n+2)! + (n+1)! = 15n!$

12. Quantas palavras (com significado ou não) de 3 letras podemos formar com as letras **A**, **L** e **I**? Quais são essas palavras?

13. Quantos números de 4 algarismos podemos escrever com os algarismos 2, 4, 6 e 8? E de 4 algarismos distintos?

14. De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode se sentar em um banco de 5 lugares para tirar uma foto?

15. De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode se sentar em um banco de 5 lugares, ficando duas delas (por exemplo, pai e mãe) sempre juntas, em qualquer ordem?

16. Quantos são os anagramas da palavra AMOR?

17. Quantos números naturais de algarismos distintos entre 5 000 e 10 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4 e 6?

18. Considerem todos os anagramas da palavra TEORIA.
    a) Quantos são?
    b) Quantos começam por TEO?
    c) Quantos têm as letras TEO juntas nessa ordem?
    d) Quantos têm as letras TEO juntas em qualquer ordem?
    e) Quantos têm as vogais juntas, em ordem alfabética, e as consoantes juntas, em qualquer ordem?

19. Colocando todos os anagramas da palavra AMIGO listados em ordem alfabética, como em um dicionário, qual será a:
    a) 1ª palavra?
    b) 2ª palavra?
    c) 25ª palavra?
    d) penúltima palavra?
    e) 55ª palavra?

3 Permutações com repetição

Considere o exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra BATATA?

Se os **As** fossem diferentes e os **Ts** também, teríamos as letras **B**, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, e o total de anagramas seria $P_6 = 6!$.

Mas as permutações entre os 3 **As** não produzirão novo anagrama. Então precisamos dividir P_6 por P_3.

O mesmo ocorre com os dois **Ts**: precisamos dividir também por $\mathbf{P}_2$.

Portanto, o número de anagramas da palavra BATATA é:

$$\frac{P_6}{P_3 \cdot P_2} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = 60$$

Generalizando:

A permutação de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dada por:

$$P_n^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

CONTEÚDO DIGITAL

Exercícios resolvidos

6. Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

Resolução:

Nesse caso, há 3 três letras **A**, 2 letras **R** e um total de 5 letras. Então:

$$P_5^{3,\,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}2!} = 10$$

Logo, são 10 os anagramas da palavra ARARA.

7. Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com **A**?

Resolução:

Fixamos uma letra **A** e fazemos os possíveis anagramas com as demais: $\text{A}\underbrace{\text{CAMARAD}}$

$$P_7^{3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Logo, 840 anagramas de CAMARADA começam com **A**.

Exercícios

20. Determine quantos são os anagramas das palavras:

a) MISSISSIPPI;

b) ARARAQUARA;

c) ABÓBORA;

d) BISCOITO;

e) ARARAQUARA que começam e terminam com **A**.

Fique atento!
Por convenção, não se considera a acentuação gráfica nos anagramas. Na palavra *abóbora*, por exemplo, a letra **o** com acento ou sem acento tem o mesmo significado.

21. Em relação à palavra PAPA:

a) quantos são os anagramas?

b) quais são os anagramas?

22. DESAFIO EM DUPLA Uma matriz quadrada 3×3 deve ser preenchida com 4 "zeros", 3 "cincos" e 2 "setes". De quantas maneiras podemos preencher essa matriz?

23. DESAFIO EM DUPLA Uma prova tem 10 questões do tipo teste, cada uma valendo 1 ponto se estiver certa ou 0 ponto se estiver errada (não há "meio certo" nas questões). De quantos modos é possível tirar nota 7 nessa prova?

24. DESAFIO EM DUPLA Um casal pretende ter 4 filhos, sendo 2 meninas e 2 meninos, em qualquer ordem de nascimento. Quantas são as ordens possíveis em que podem ocorrer esses 4 nascimentos?

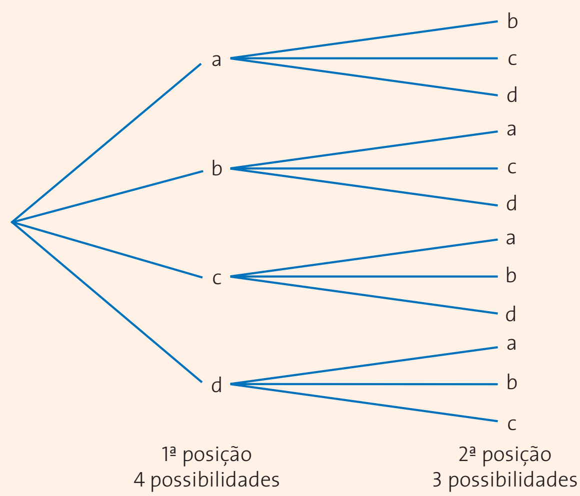
4 Arranjos simples

Vimos que **permutação simples de *n* elementos** é qualquer agrupamento ordenado desses n elementos. Agora, tendo n elementos, vamos estudar os **agrupamentos ordenados** de 1 elemento, de 2 elementos, de 3 elementos, ..., de p elementos, com $p \leqslant n$.

Exercícios resolvidos

8. Consideremos as letras **a**, **b**, **c** e **d**. Quais e quantos agrupamentos ordenados diferentes de 2 letras distintas é possível formar com elas?

Resolução:



Na primeira posição temos 4 possibilidades (pois temos 4 elementos disponíveis). Na segunda posição, 3 possibilidades (pois temos 3 elementos disponíveis).

Pelo princípio fundamental da contagem, há, no total, $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades.

Os 12 agrupamentos ordenados diferentes são:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Esses agrupamentos são chamados **arranjos simples**. Arranjamos 4 elementos 2 a 2, e o número desses arranjos foi 12. Escrevemos então:

$A_{4,\,2} = 4 \cdot 3 = 12$ (arranjo de 4 elementos tomados 2 a 2 é igual a 12)

9. Usando os algarismos 2, 3, 5, 7 e 9, quantos números naturais de 3 algarismos distintos podemos formar?

Resolução:

_______ _______ _______
centena dezena unidade

Há 5 possibilidades para o primeiro algarismo, 4 para o segundo e 3 para o terceiro.

No total podemos então formar 60 números $(5 \cdot 4 \cdot 3 = 60)$.

Dizemos nesse exercício que fizemos **arranjos** de 5 elementos 3 a 3, e o número desses arranjos é 60. Indicamos assim: $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Fórmula dos arranjos simples

Vejamos como calcular o número total desses agrupamentos no caso geral de n elementos arranjados p a p, com $n \geqslant p$, ou seja, como calcular $A_{n,\,p}$ (lê-se: arranjo de n elementos tomados p a p).

Para $n = p$, temos $\boxed{A_{n,\,n} = P_n = n!}$, já estudado.

Para $n > p$, temos n elementos distintos e vamos arranjá-los p a p. Construindo a árvore de possibilidades, obtemos:

- na primeira posição: n possibilidades (pois temos n elementos disponíveis)
- na segunda posição: $(n - 1)$ possibilidades (pois temos $(n - 1)$ elementos disponíveis)
- na terceira posição: $(n - 2)$ possibilidades (pois temos $(n - 2)$ elementos disponíveis)

⋮ ⋮

- na p-ésima posição: $n - (p - 1)$ possibilidades (pois temos $n - (p - 1)$ elementos disponíveis)

Aplicando o princípio fundamental da contagem, temos que o número total de possibilidades é dado por:

$$A_{n,\,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}}$$

Fique atento!
$n - (p - 1)$ é o mesmo que $n - p + 1$.

Podemos ainda indicar $A_{n,p}$ por meio de fatoriais. Observe:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando esse número por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Como $n > p$, multiplicar um número por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ significa multiplicá-lo por 1; logo, seu valor não se altera.

Portanto:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Resumindo:

Arranjos simples de n elementos tomados p a p ($p \leqslant n$) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com p dos n elementos dados.

Indica-se por $A_{n,\,p}$ ou A_n^p o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

ou

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Usando a segunda fórmula, podemos comprovar que: $A_{n,\,n} = P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

Exemplos:

a) $A_{10,\,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \underset{\uparrow \atop (10-4+1)}{7} = 5\,040$ ou $A_{10,\,4} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 5\,040$

b) $A_{8,\,2} = 8 \cdot \underset{\uparrow \atop (8-2+1)}{7} = 56$ ou $A_{8,\,2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

Observação: Você pode usar tanto o conceito de arranjo como o princípio fundamental da contagem para resolver problemas, como veremos nos exercícios resolvidos a seguir. Compreender o que está sendo feito é mais importante do que decorar uma fórmula e aplicá-la.

Exercícios resolvidos

10. Quantos números de 2 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula

Procuramos agrupamentos de 2 elementos em que a ordem é importante, pois, por exemplo, $12 \neq 21$. Temos 9 elementos para serem arranjados 2 a 2. Assim, temos de calcular:

$$A_{9,\,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7}!}{\cancel{7}!} = 72$$

Portanto, existem 72 números de 2 algarismos diferentes que podem ser escritos com os algarismos de 1 a 9.

2ª maneira: sem usar a fórmula

Para o algarismo das dezenas temos 9 opções, e para o algarismo das unidades, apenas 8 opções, pois não podemos repetir algarismos. Assim, temos $9 \cdot 8 = 72$. Portanto, são 72 números.

11. Responda às seguintes questões:

a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?

b) Quantas palavras de 4 letras distintas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?

c) Quantas dessas palavras começam com **E**?

d) Quantas terminam com **TA**?

e) Quantas contêm a letra **M**?

f) Quantas não contêm a letra **M**?

Resolução:

a) $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

b) *1ª maneira: sem usar a fórmula*

Temos 8 possibilidades para a 1ª letra, 7 para a 2ª, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra. Assim, temos

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$; 1680 palavras.

2ª maneira: usando a fórmula

$A_{8,\,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

c) *1ª maneira: sem usar a fórmula*

Fixando **E** como 1ª letra, restam 7 possibilidades para a 2ª letra, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra. Assim, temos $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

2ª maneira: usando a fórmula

Fixando **E** como 1ª letra, temos de arranjar as 3 restantes das 7 que sobraram. Assim:

$A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

d) *1ª maneira: sem usar a fórmula*

Fixando **TA** como 3ª e 4ª letras, restam 6 possibilidades para a 1ª letra e 5 para a 2ª. Assim, temos 30 palavras ($6 \cdot 5 = 30$).

2ª maneira: usando a fórmula

Fixando as duas últimas como sendo **TA**, temos de arranjar as 2 iniciais das 6 que sobraram. Assim:

$A_{6,\,2} = 6 \cdot 5 = 30$

e) *1ª maneira: sem usar a fórmula*

Fixando **M** como 1ª letra, restam 7 possibilidades para a 2ª letra, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra. Assim, temos 210 palavras ($7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$) com o **M** na 1ª posição. Da mesma forma, teremos 210 possibilidades para o **M** na 2ª, na 3ª e na 4ª posição. Assim, temos 840 palavras ($4 \cdot 210 = 840$).

2ª maneira: usando a fórmula

Colocado o **M**, temos $A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$; 210 possibilidades para as outras letras. Como podemos colocar o **M** de quatro maneiras diferentes:

M ___ ___ ___; ___ M ___ ___ ;

___ ___ M ___ e ___ ___ ___ M, temos:

$4 \cdot 210 = 840$

f) *1ª maneira: sem usar a fórmula*

Sem o **M**, teremos 7 letras para compor a palavra: 7 possibilidades para a 1ª letra, 6 para a 2ª, 5 para a 3ª e 4 para a 4ª letra. Assim, temos 840 palavras ($7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$).

2ª maneira: usando a fórmula

Retirando o **M**, passamos a ter 7 letras. Como os anagramas devem conter 4 letras, temos:

$A_{7,\,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Observação: Também poderíamos ter feito $1680 - 840$ para obter 840, subtraindo o número de palavras obtido em **e** do número total obtido em **b**.

12. De quantas maneiras 5 meninos podem se sentar em um banco que tem apenas 3 lugares?

Resolução:

1ª maneira: sem usar a fórmula

5 meninos são possíveis para o 1º lugar do banco, 4 para o 2º e 3 para o 3º. Então, são $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; 60 possibilidades.

2ª maneira: usando a fórmula

Estamos interessados nos agrupamentos ordenados de 3 elementos, retirados de 5 elementos, ou seja:

$$A_{5,\,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Portanto, há 60 maneiras possíveis.

13. Quantas frações diferentes (e não iguais a 1) podemos escrever usando os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13?

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula
Nesse caso estamos procurando agrupamentos de 2 elementos nos quais a ordem é importante $\left(\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}\right)$ e nos quais um mesmo número não pode ser repetido na mesma fração $\left(\frac{3}{3} = 1\right)$.

Esses agrupamentos de 2 elementos devem ser formados com os 6 elementos: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Logo, temos:

$$A_{6,\,2} = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$$

Portanto, podemos formar 30 frações nessas condições.

2ª maneira: sem usar a fórmula
Para o denominador temos 6 opções e, para o numerador, 5 opções. Então, $6 \cdot 5 = 30$; 30 frações.

14. Quantos números ímpares de 4 algarismos não repetidos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução:

1ª maneira: sem usar a fórmula
Para que o número seja ímpar, devemos ter como algarismo das unidades uma das 5 opções apresentadas (1, 3, 5, 7 ou 9).
Para a dezena, temos 8 opções, pois não podemos repetir o algarismo usado nas unidades.
Para a centena, 7 opções; para o milhar, 6 opções.
Assim, $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 = 1680$; 1680 números.

2ª maneira: usando a fórmula
Dos 9 algarismos, 5 deles são ímpares.
Terminando com um desses 5 algarismos (por exemplo, __ __ __ 1), podemos escrever $A_{8,\,3}$ números de 4 algarismos.

Como são 5 as possibilidades para a última posição, podemos escrever:

$$5A_{8,\,3} = 5 \cdot \frac{8!}{5!} = 5(8 \cdot 7 \cdot 6) = 1680$$

Portanto, há 1680 números ímpares de 4 algarismos não repetidos com os dígitos 1 a 9.

15. Um estudante tem 5 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar os estados da região Sul do Brasil, cada um de uma cor?

Resolução:

1ª maneira: sem usar a fórmula
São 3 estados: Rio Grande do Sul, Paraná e Santa Catarina. Para pintar o Rio Grande do Sul há 5 possibilidades, para o Paraná há 4 possibilidades e para Santa Catarina há 3 possibilidades. Logo, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; 60 possibilidades.

2ª maneira: usando a fórmula
Os estados do Sul do Brasil são 3: Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul. Logo, devemos calcular $A_{5,\,3}$.

$$A_{5,\,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Portanto, há 60 maneiras diferentes de pintar os estados do Sul usando 5 cores.

16. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de 3 algarismos distintos maiores do que 350 podemos formar?
Temos as possibilidades:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 6\ \_\ \_ \\ \bullet\ 5\ \_\ \_ \\ \bullet\ 4\ \_\ \_ \end{array}\right\} 3A_{5,\,2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 3\ \ 5\ \_ \\ \bullet\ 3\ \ 6\ \_ \end{array}\right\} 2A_{4,\,1}$$

Então, o total de números é:
$3A_{5,\,2} + 2A_{4,\,1} = 3(5 \cdot 4) + 2 \cdot 4 = 68$

17. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de 3 algarismos distintos maiores que 300 podemos formar?

Resolução:

1ª maneira: sem usar a fórmula
Para algarismos maiores do que 300 é necessário que o algarismo da centena seja 3, 4, 5 ou 6. Assim, temos 4 possibilidades para a centena.
Para a dezena, 5 possibilidades, pois não podemos repetir a centena, e para a unidade, 4 possibilidades.
Assim, $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ números.

2ª maneira: usando a fórmula
Temos as possibilidades:

- 3 __ __
- 4 __ __
- 5 __ __
- 6 __ __

Para preencher cada uma das lacunas temos $A_{5,\,2}$ possibilidades.
Portanto, podemos formar:
$4A_{5,\,2} = 4(5 \cdot 4) = 80$ números

Exercícios

25. Calcule:

a) $A_{4,\,2}$

b) $A_{6,\,3}$

c) $A_{8,\,2}$

d) $A_{4,\,4}$

e) $A_{5,\,1}$

f) $A_{7,\,0}$

g) $A_{8,\,5}$

h) $A_{n,\,0}$

26. Determine a expressão correspondente a:

a) $A_{x,\,2}$ b) $A_{x-3,\,2}$ c) $A_{2x+1,\,3}$

27. Determine o valor de x nas equações:

a) $A_{x-1,\,2} = 30$ b) $A_{x,\,3} = x^3 - 40$

28. Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?

> **Para refletir**
> Procure resolver o exercício 28 sem usar a fórmula e usando a fórmula.

29. Responda às questões:

a) Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados pelos dígitos 4, 5, 6, 7 e 8?

b) Quantos desses números formados são ímpares?

30. De quantas maneiras podemos escolher um pivô e uma ala em um grupo de 12 jogadoras de basquete?

Mark Dadswell/Getty Images

31. Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

a) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos escrever?

b) Quantos números de 4 algarismos distintos que terminem com 7 podemos escrever?

c) Quantos números de 7 algarismos distintos que iniciem com 3 e terminem com 8 podemos escrever?

d) Quantos números de 7 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 5 e 6 sempre juntos e nessa ordem?

32. Em um sofá há lugares para 4 pessoas. De quantas maneiras diferentes podem se sentar 6 pessoas?

Dam d'Souza/Arquivo da editora

33. Um estudante tem 6 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras ele poderá pintar os estados da região Sudeste do Brasil (São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Espírito Santo), cada um de uma cor?

34. Responda:

a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FILHO?

b) Quantas “palavras” de 4 letras distintas é possível formar com as letras da palavra FILHO?

c) Quantas dessas “palavras” de 4 letras começam com O?

d) Quantas dessas “palavras” de 4 letras terminam com FI?

e) Quantas “palavras” de 4 letras contêm a letra I?

35. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6:

a) quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar?

b) quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar tal que o último algarismo seja sempre 6?

c) quantos números pares de 4 algarismos distintos podemos formar?

d) quantos números ímpares de 4 algarismos distintos podemos formar?

36. De quantas maneiras diferentes podemos dispor uma equipe de 4 alunos em uma sala de aula que tem 30 carteiras?

37. Dispomos de 5 cores e queremos pintar uma faixa decorativa com 3 listras, cada uma de uma cor. De quantas maneiras isso pode ser feito?

5 Combinações simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos.

Observe com atenção estes dois exemplos:

a) Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?
   Representemos por A: Ane; E: Elisa; R: Rosana; F: Felipe; e G: Gustavo. Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos $\{A, E, R, F, G\}$. A ordem em que os elementos aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Ane-Elisa, por exemplo, é a mesma dupla que Elisa-Ane.
   Então, os subconjuntos de 2 elementos são: $\{A, E\}$, $\{A, R\}$, $\{A, F\}$, $\{A, G\}$, $\{E, R\}$, $\{E, F\}$, $\{E, G\}$, $\{R, F\}$, $\{R, G\}$, $\{F, G\}$.
   A esses subconjuntos chamamos **combinações simples** de 5 elementos tomados com 2 elementos, ou tomados 2 a 2, e escrevemos: $C_{5,\,2}$.
   Como o número total dessas combinações é 10, escrevemos $C_{5,\,2} = 10$.

b) Consideremos um conjunto com 5 elementos e calculemos o número de combinações simples de 3 elementos, ou seja, o número de subconjuntos com 3 elementos.
   Conjunto com 5 elementos: $\{a, b, c, d, e\}$.
   Combinações simples de 3 elementos: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, d, e\}$.
   Cada combinação dessas dá origem a 6 arranjos, permutando de todos os modos possíveis seus 3 elementos. Por exemplo: ao permutar todos os elementos da combinação $\{a, b, c\}$ encontramos os arranjos: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Isso significa que o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3 é seis vezes o número de combinações de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja: $A_{5,\,3} = 6C_{5,\,3}$.
   Como o 6 foi obtido fazendo permutações dos 3 elementos de, por exemplo, $\{a, b, c\}$, temos $P_3 = 6$. Logo,

$$A_{5,\,3} = P_3 \cdot C_{5,\,3} \Rightarrow C_{5,\,3} = \frac{A_{5,\,3}}{P_3} = \frac{\dfrac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Fórmula das combinações simples

A cada combinação de n elementos tomados p a p correspondem $p!$ arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} \text{ ou } C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leqslant n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

Indica-se por $C_{n,\,p}$, C_n^p ou $\dbinom{n}{p}$ o número total de combinações de n elementos tomados p a p e calcula-se por $C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $C_{n,\,p} = \dfrac{A_{n,\,p}}{p!}$.

Observações:

1ª) Como são subconjuntos de um conjunto, **a ordem dos elementos não importa**. Só consideramos subconjuntos distintos os que diferem pela natureza dos seus elementos.

2ª) Como foi observado acima, do mesmo modo que se obtém a fórmula da combinação por meio da divisão de um arranjo pela permutação, podemos obter a combinação sem usar a fórmula, calculando o arranjo sem a fórmula e dividindo o resultado pela permutação dos elementos escolhidos.

Uma propriedade importante das combinações

Observemos que:

- $C_{3,2} = C_{3,1}$, pois $C_{3,2} = 3$ e $C_{3,1} = 3$

  $2 + 1 = 3$

- $C_{5,3} = C_{5,2}$, pois $C_{5,3} = \dfrac{A_{5,3}}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ e $C_{5,2} = \dfrac{A_{5,2}}{2!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

  $3 + 2 = 5$

Fique atento!
Dado um conjunto de 5 elementos, para cada subconjunto de 3 elementos sobra um de 2 elementos. Daí: $C_{5,3} = C_{5,2}$.

De modo geral, vale a propriedade:

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

pois:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = C_{n,n-p}$$

Essa propriedade é muito útil para simplificar os cálculos e é conhecida por **igualdade de combinações complementares**.

Veja:

- $C_{100,98} = C_{100,2} = \dfrac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 4\,950$
- $C_{43,42} = C_{43,1} = 43$

Para refletir
Para $p = n$, temos $C_{n,n}$. Qual é seu valor?

passo a passo: exercício 20

Exercícios resolvidos

18. Calcule o valor de:

a) $C_{6,3}$

b) $\dbinom{4}{2}$

Resolução:

a) $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{3!\cancel{3!}} =$

$= \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

ou

$C_{6,3} = \dfrac{A_{6,3}}{3!} = \dfrac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 20$

b) $\dbinom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$

ou

$\dbinom{4}{2} = \dfrac{A_{4,2}}{2!} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$

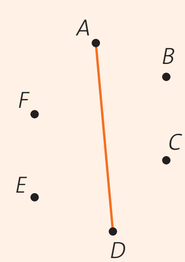
19. Em um plano marcamos 6 pontos distintos, dos quais 3 nunca estão em linha reta.

a) Quantos segmentos de reta podemos traçar ligando-os 2 a 2?

b) Quantos triângulos podemos formar tendo sempre 3 deles como vértices?

Resolução:

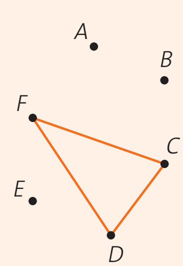
a) Marcamos 6 pontos em um plano, onde não existem 3 alinhados.



Como em cada segmento temos 2 extremos e, por exemplo, o segmento *AD* é o mesmo que o segmento *DA*, o número de segmentos é $C_{6,2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

Portanto, podemos traçar 15 segmentos de reta.

b) Como cada triângulo fica determinado por 3 pontos não colineares, temos, independentemente da ordem deles:



$C_{6,3} = \dfrac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$

Logo, podemos formar 20 triângulos.

Resolvido passo a passo

20. No primeiro dia de aula de Matemática do 2º ano, 30 alunos estavam presentes na sala de aula. Para se conhecerem melhor, o professor sugeriu que cada aluno cumprimentasse o outro com um aperto de mão e uma breve apresentação. Qual foi o total de apertos de mão?

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

O problema informa que há 30 alunos em uma sala. Eles vão se cumprimentar com um aperto de mão e uma pequena apresentação.

b) O que se pede?

Pede-se o número total de cumprimentos (apertos de mão) entre os alunos.

c) Entendendo melhor o enunciado

Se apenas 2 alunos estivessem na sala, teríamos 1 cumprimento. Por exemplo, se Pedro cumprimenta Maria, Maria estará cumprimentando Pedro, e isso conta apenas 1 cumprimento e não 2.

2. Planejando a solução

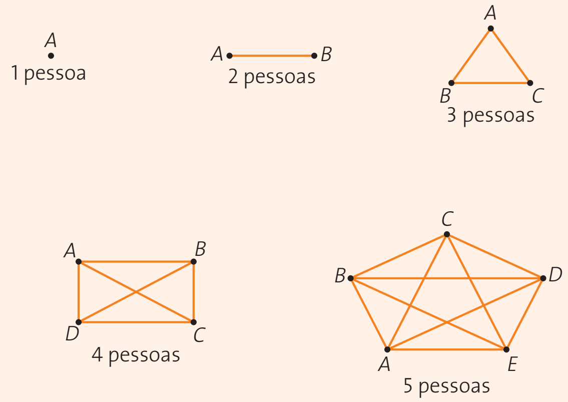
Há várias maneiras de resolver este problema. Vejamos três delas:

- *1ª maneira*: elaborando diagramas e analisando casos mais simples.
- *2ª maneira*: elaborando uma tabela, descobrindo regularidades e usando progressão aritmética (PA).
- *3ª maneira*: usando raciocínio combinatório, isto é, usando a ideia de combinação.

3. Executando o que foi planejado

- *1ª maneira*: com diagramas

Os diagramas abaixo representam os cumprimentos para 1, 2, 3, 4 e 5 pessoas.

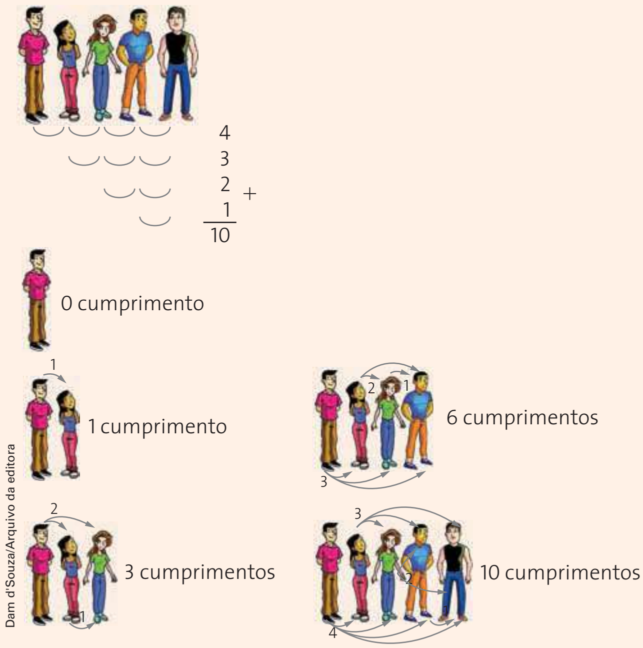


Observe que o problema dos cumprimentos se reduz à contagem do número de segmentos necessários para conectar vários números de pontos.

Vamos ver o caso de 4 pessoas. A cumprimenta 3 pessoas: *B*, *C* e *D* (3 cumprimentos). *B* também cumprimenta 3 pessoas: *A*, *C* e *D* (3 cumprimentos). E assim por diante. Cada pessoa cumprimenta outras 3 pessoas. Parece então que teremos $4 \cdot 3$ ou 12 cumprimentos. Mas note que os cumprimentos entre *A* e *B* foram contados 2 vezes. Isso ocorre com cada uma das 4 pessoas. Consequentemente, cada cumprimento foi contado 2 vezes. Assim, para obter a resposta, precisamos dividir 12 por 2, ou seja, fazer $\frac{4 \cdot 3}{2}$ ou 6, que é igual ao número de segmentos de reta traçados na figura ($\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$).

Faça esse mesmo raciocínio para o caso de 5 pessoas. Você descobrirá que serão $\frac{5 \cdot 4}{2}$ ou 10 cumprimentos ou 10 segmentos de reta ligando 5 pontos não alinhados do plano. Podemos generalizar esse raciocínio para um número qualquer de pessoas. Usando a estratégia acima, nosso problema fica resolvido fazendo $\frac{30 \cdot 29}{2} = \frac{870}{2}$ ou 435 cumprimentos.

- *2ª maneira*: elaborando uma tabela, descobrindo regularidades e usando PA.
  Observe os diagramas e a tabela a seguir:



Número de pessoas	Número de cumprimentos
1	0
2	1
3	$3 = 1 + 2$
4	$6 = 1 + 2 + 3$
5	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
⋮	⋮
10	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$
⋮	⋮
30	$1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29$

Observe a regularidade:

a) para 4 pessoas temos 6 $(1 + 2 + 3 = 6)$ cumprimentos;

b) para 5 pessoas temos $10(1 + 2 + 3 + 4 = 10)$ cumprimentos;

c) o último número da expressão $1 + 2 + 3 + \boxed{4}$ é igual ao número de pessoas menos 1.

Seguindo esse padrão, para 30 pessoas teremos:

$1 + 2 + 3 + 4 +... + 28 + 29$ cumprimentos

A sequência 1, 2, 3, 4, ..., 28, 29 é uma PA de razão igual a 1, onde o primeiro termo é 1, o último termo é 29 e o número de termos é 29.

Vimos no capítulo 7 do volume 1 que a soma de uma PA finita é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Nesse caso, $a_1 = 1$, $a_n = 29$ e $n = 29$.

Assim, $S_{29} = \dfrac{(1+29)29}{2} = \dfrac{30 \cdot 29}{2} = \dfrac{870}{2} = 435$.

Portanto, teremos 435 cumprimentos.

- *3ª maneira:* usando a ideia de combinação
  São 30 alunos que vão se cumprimentar. Já vimos que não importa a ordem no cumprimento, ou seja, quando *A* cumprimenta *B*, *B* já cumprimentou *A* (não conta duas vezes, conta uma vez só). Assim, estamos combinando 30 alunos, 2 a 2. Para encontrar o número total de combinações, fazemos:

$$C_{30,\,2} = \frac{30!}{2!(30-2)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \cancel{28!}}{2!\ \cancel{28!}} = \frac{30 \cdot 29}{2} =$$

$$= \frac{870}{2} = 435$$

Assim, temos 435 cumprimentos.

4. Emitindo a resposta

Quando 30 alunos se cumprimentam com um aperto de mão, há 435 cumprimentos no total.

5. Ampliando o problema

a) E se fossem 20 alunos, qual seria o total de cumprimentos? Escolha uma das maneiras e resolva.

b) *Discussão em equipe*

Troque ideias com seus colegas sobre qual maneira de resolver o problema foi a mais criativa, qual foi a mais fácil, qual foi a mais rápida. Justifiquem suas escolhas.

21. De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete tendo à sua disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula

Procuramos o número total de subconjuntos (ou combinações) com 5 elementos tirados de um conjunto de 12 elementos. A ordem não importa; cada subconjunto difere um do outro apenas pela natureza dos seus elementos. Assim, procuramos:

$$C_{12,\,5} = \frac{A_{12,\,5}}{5!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$$

Portanto, podemos formar 792 times de basquete diferentes com 12 atletas.

2ª maneira: sem usar a fórmula

São 5 jogadores a serem escolhidos entre 12. Então, teríamos $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$ possibilidades se estivéssemos calculando um arranjo. Como é uma combinação, então devemos dividir o resultado pelo fatorial dos elementos escolhidos (5 elementos):

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5} = 792$$

Portanto, 792 possibilidades.

22. O conselho desportivo de uma escola é formado por 2 professores e 3 alunos. Candidataram-se 5 professores e 30 alunos. De quantas maneiras diferentes esse conselho pode ser eleito?

Resolução:

Se escolhermos os professores de x maneiras e os alunos de y maneiras, pelo princípio fundamental da contagem escolheremos os professores e alunos de xy maneiras. Assim:

- escolha dos professores: $C_{5,\,2} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}!}{2!\,\cancel{3}!} =$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

- escolha dos alunos: $C_{30,\,3} = \dfrac{30!}{3!27!} =$

$$= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cancel{27}!}{3!\,\cancel{27}!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2} = 4\,060$$

Logo:

$$C_{5,\,2} + C_{30,\,3} = 10 \cdot 4\,060 = 40\,600$$

Portanto, o conselho pode ser eleito de 40 600 maneiras diferentes.

23. De quantas maneiras podemos colocar 10 bolas em 3 urnas de modo que fiquem 2 bolas na primeira urna, 3 bolas na segunda urna e 5 bolas na terceira?

Resolução:

Há $C_{10,\,2}$ maneiras de escolher as 2 bolas que ficarão na primeira urna. Para cada maneira há $C_{8,\,3}$ possibilidades de escolher as 3 bolas que ficarão na segunda urna. Pelo princípio fundamental da contagem há, então, $C_{10,\,2} \cdot C_{8,\,3}$ maneiras de distribuir as 2 bolas na primeira urna e as 3 bolas na segunda urna. Para cada uma dessas possibilidades, há $C_{5,\,5}$ maneiras de colocar as 5 bolas na terceira urna. Portanto, novamente pelo princípio fundamental da contagem, há $C_{10,\,2} \cdot C_{8,\,3} \cdot C$ maneiras diferentes de colocar 2 bolas na primeira urna, 3 bolas na segunda urna e 5 bolas na terceira urna.

1ª urna	2ª urna	3ª urna
2 bolas em 10	3 bolas em 8	5 bolas em 5

$$C_{10,\,2} \cdot C_{8,\,3} \cdot C_{5,\,5} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{\cancel{5}!}{\cancel{5}!0!} =$$

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \cancel{8}!}{{}_{1}\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{8}!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5!}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{5}!} \cdot \frac{1!}{0!} = 45 \cdot 56 \cdot 1 = 2520$$

Portanto, existem 2 520 possibilidades de fazer essa distribuição.

24. No jogo de truco, cada jogador recebe 3 cartas de um baralho de 40 cartas (são excluídas as cartas 8, 9 e 10). De quantas maneiras diferentes um jogador pode receber suas 3 cartas?

Resolução:

As 3 cartas diferem entre si pela natureza delas e não pela ordem. Como a ordem não importa, o problema fica resolvido calculando:

$$C_{40,\,3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9\,880$$

Portanto, cada jogador pode receber suas 3 cartas de 9 880 maneiras diferentes.

Exercícios

38. Calcule o valor de:

a) $C_{6,4}$

b) $C_{5,3}$

c) $C_{4,1}$

d) $C_{5,4}$

e) C_7^5

f) $\binom{7}{6}$

g) $C_{45,44}$

h) $C_{30,26}$

39. Determine o valor de x em:

a) $5 + C_{x,2} = x + 14$

b) $C_{x+3,2} = 15$

40. Quantas equipes de 3 astronautas podem ser formadas com 20 astronautas?

41. Quantas equipes diferentes de vôlei podemos escalar tendo à disposição 10 meninas que jogam em qualquer posição?

42. Em uma prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 8. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher essas 8 questões?

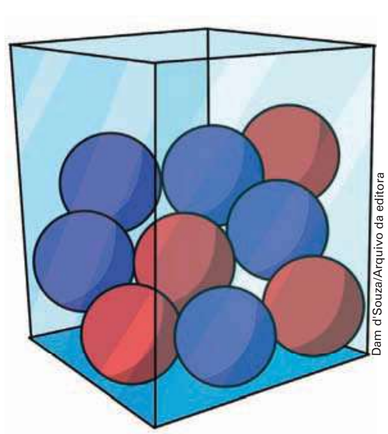
43. Uma associação tem uma diretoria formada por 10 pessoas: 6 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras podemos formar uma comissão dessa diretoria que tenha 3 homens e 2 mulheres?

44. Uma urna contém 5 bolas azuis e 4 bolas vermelhas. De quantas maneiras podemos selecionar:

a) 3 bolas?

b) 3 bolas azuis e 2 vermelhas?

c) 3 bolas vermelhas e 2 azuis?



Dam d'Souza/Arquivo da editora

45. Quantas comissões de 5 elementos podemos formar com os 30 alunos de uma classe?

46. De quantos modos podemos formar triângulos com 3 dos vértices de um heptágono regular?

47. De quantas maneiras podemos extrair 4 cartas de um baralho de 52 cartas?

48. Um rapaz tem 5 bermudas e 6 camisetas. De quantas formas ele pode escolher:

a) 1 bermuda e 1 camiseta?

b) 2 bermudas e 2 camisetas?

c) 4 peças quaisquer de roupas, entre bermudas e camisetas?

49. Uma classe tem 24 alunos, sendo 10 meninas e 14 meninos. De quantos modos podemos escolher:

a) 3 meninos e 2 meninas?

b) 5 alunos quaisquer?

c) 1 menino e 1 menina?

50. ATIVIDADE EM DUPLA Em um grupo de 10 pessoas estão Anderson e Eduardo. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar:

a) em que ambos estejam presentes?

b) em que nenhum deles esteja presente?

c) em que apenas um deles esteja presente?

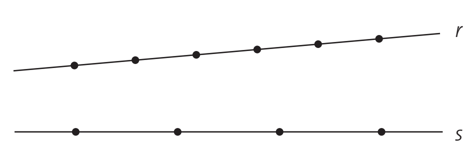
51. ATIVIDADE EM DUPLA Em um grupo existem 5 homens e 6 mulheres. De quantas maneiras podemos escolher uma comissão de 4 pessoas com:

a) exatamente 3 homens?

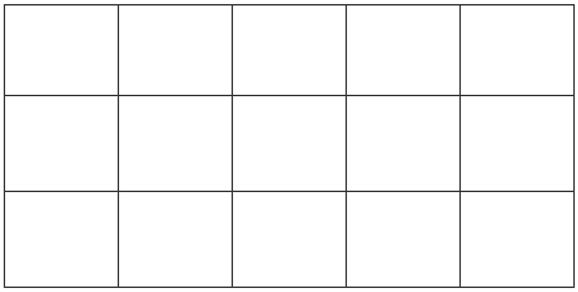
b) pelo menos 3 homens?

c) no máximo 1 homem?

52. ATIVIDADE EM DUPLA Considerem 10 pontos, sendo 6 na reta *r* e 4 na reta *s*. De quantos modos podemos formar triângulos com vértices nesses pontos?



53. DESAFIO EM DUPLA Quantos quadriláteros, de qualquer tamanho, existem na figura abaixo?



6 Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamentos

Nos exercícios resolvidos a seguir temos os vários tipos de agrupamentos estudados e as formas de calcular o número de agrupamentos.

Exercícios resolvidos

25. Usando os algarismos 5, 6 e 8, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

Resolução:

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Portanto, 6 números.

26. Usando os algarismos 1, 3, 4, 6 e 9, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

$$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 60 \text{ ou}$$

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Podemos fomar 60 números.

27. Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podemos formar para representar um grupo de 10 pessoas?

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 120 \text{ ou}$$

$$C_{10,3} = \frac{A_{10,3}}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Podemos formar 120 comissões.

28. Quantos anagramas tem a palavra BANANA?

Resolução:

$$P_6^{3,\,2,\,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 60$$

A palavra BANANA tem 60 anagramas.

Exercícios

Façam estes exercícios em dupla.

54. Quantos triângulos podemos formar unindo os vértices de um octógono?

55. A diretoria de um clube é composta de 10 membros, que podem ocupar a função de presidente, secretário ou tesoureiro. De quantas maneiras podemos formar, com os 10 membros, chapas que contenham presidente, secretário e tesoureiro?

56. Em um ônibus há 5 lugares vagos. Duas pessoas entram no ônibus. De quantas maneiras diferentes elas podem se sentar?

57. Em uma competição com 10 países, de quantas maneiras podem ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

58. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

59. Sobre uma circunferência são marcados 6 pontos distintos. Quantos quadriláteros podemos traçar com vértices nesses pontos?

60. Na despedida de um grupo de amigos, 36 abraços foram trocados. Sabendo que cada um abraçou todos os outros, quantos amigos estavam reunidos?

61. Considerem a palavra LÓGICA:

a) Quantas permutações (anagramas) podemos formar?

b) Quantos anagramas começam com **L**?

c) Quantos começam com **LO**?

d) Quantos começam e terminam com vogal?

e) Quantos começam com consoante e terminam com vogal?

f) Em quantos anagramas as letras **L**, **O**, **G** estão juntas, nessa ordem?

g) Em quantos as letras **L**, **O**, **G** estão juntas?

62. Quantos números de 4 algarismos distintos maiores que 2 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

63. As placas dos automóveis são formadas por 3 letras seguidas de 4 algarismos. Quantas placas podemos criar com as letras **A** e **B** e os algarismos pares, podendo repetir a letra e não podendo repetir o algarismo?

64. Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 8 tenistas?

65. Em um grupo de 20 pessoas há 6 mulheres. Quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas de modo que nelas haja pelo menos 1 mulher?

7 Números binomiais

Chama-se **número binomial** o número $\binom{n}{p}$, com n e p naturais, $n \geqslant p$, tal que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (n é o numerador e p é a classe do número binomial). Note que $\binom{n}{p} = C_{n,\,p}$.

Exemplo:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 10 = C_{5,\,2}$$

Para refletir

Verifique que: $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$.

Propriedade

Dois números binomiais são iguais se tiverem o mesmo numerador e:

- suas classes forem iguais, ou
- a soma de suas classes for igual ao numerador (binomiais complementares).

8 Triângulo de Pascal

Podemos dispor os números binominais em formações triangulares, como abaixo:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{0} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \dots \quad \binom{n}{n}
\end{array}
\quad \text{ou} \quad
\begin{array}{l}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
\dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\
\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \binom{n}{3} \dots \binom{n}{n}
\end{array}$$

Você sabia?

Blaise Pascal (1623-1662) foi um físico, filósofo e teólogo francês que estudou os problemas matemáticos relacionados aos jogos de dados, e um dos resultados dessa pesquisa foi a tabela numérica denominada triângulo de Pascal.

Calculando cada número binomial, temos:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\dots
\end{array}
\quad \text{ou} \quad
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & & 1
\end{array}$$

Essa maneira de dispor tais coeficientes é conhecida como **triângulo de Pascal**.

Propriedades dos números binomiais

Observando o triângulo de Pascal podemos tirar as seguintes propriedades:

1ª) Por exemplo: $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} \rightarrow 1 + 2 = 3$ $\qquad \binom{4}{1} = \binom{4}{3} \rightarrow 1 + 3 = 4$ $\qquad \binom{5}{2} = \binom{5}{3} \rightarrow 2 + 3 = 5$

De modo geral, como já foi visto no estudo dos números binomiais:

$\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$, pois $a + b = n$ (binomiais complementares ou combinações complementares)

2ª) Observe:

$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$ $\qquad \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3}$ $\qquad \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \underbrace{3 + 3} & & \underbrace{3 + 1} & & & & \\
 & 1 & & 4 & & \underbrace{6 + 4} & & 1 & & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}
$$

De modo geral:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \quad \text{relação de Stifel}$$

Você sabia?
Michael Stifel (1486-1567) foi um matemático alemão, que fez pesquisas na Álgebra e na Aritmética. Seu trabalho mais famoso é *Arithmetica Integra*, publicado em 1544, na qual inclui o triângulo de Pascal e o tratamento dos números negativos, radicais e potências.

3ª) Observe a soma dos elementos de uma mesma linha no triângulo de Pascal:

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

Qual seria o valor de $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$?

De modo geral, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Fique atento!
Observe que 2^n é o mesmo que $(1 + 1)^n$.

Exercícios resolvidos

29. Obtenha o valor de x sabendo que $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$.

Resolução:

Sabemos que a igualdade acontece em duas situações: $x = 3$ ou $3 + x = 7$. Se $3 + x = 7$, então $x = 4$.
Logo, os valores de x são: $x = 3$ ou $x = 4$.

30. Uma casa tem 3 portas de entrada. De quantos modos essa casa pode ser aberta?

Resolução:

Há $C_{3,\,1}$ modos de abrir a casa abrindo 1 só porta, $C_{3,\,2}$ modos de abrir a casa abrindo 2 portas e $C_{3,\,3}$ modos de abrir a casa abrindo as 3 portas.
Logo:

$$C_{3,1} + C_{3,2} + C_{3,\,3} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 - \binom{3}{0} = 8 - 1 = 7$$

Exercícios

66. Calcule o valor de:

a) $\binom{6}{2}$ b) $\binom{7}{3}$ c) $\binom{6}{0}$ d) $\binom{20}{18}$

67. Se $\binom{m}{9} = \binom{m}{8}$, calcule $\binom{m}{17}$.

68. Determine o valor de x, sabendo que $\binom{20}{2x} = \binom{20}{x+1}$.

69. Simplifique a fração: $\dfrac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}}$

70. Calcule o valor das expressões usando as propriedades do triângulo de Pascal:

a) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

b) $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \ldots + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$

c) $\binom{9}{5} + \binom{9}{4}$

d) $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3}$

71. Se a 5ª linha do triângulo de Pascal é: 1 5 10 10 5 1, escreva a 6ª e a 7ª linhas.

72. Determine inteiros n e p de modo que:

$$\frac{\binom{n}{p}}{1} = \frac{\binom{n}{p+1}}{2} = \frac{\binom{n}{p+2}}{3}$$

73. Lembrando que $C_{n,\,p} = \binom{n}{p}$, determine:

a) $C_{4,\,0} + C_{4,\,1} + C_{4,\,2} + C_{4,\,3} + C_{4,\,4}$

b) $C_{8,\,1} + C_{8,\,2} + \ldots + C_{8,\,7} + C_{8,\,8}$

74. ATIVIDADE EM DUPLA Um salão tem 5 janelas. De quantas maneiras podemos abrir essas janelas de modo que o salão nunca fique com todas as janelas fechadas?

75. ATIVIDADE EM DUPLA Dez pontos estão distribuídos em uma circunferência. Quantos polígonos podemos fazer usando quaisquer desses pontos como vértices?

76. ATIVIDADE EM DUPLA Em uma sorveteria, o cliente pode escolher quantos e quais desejar entre 8 tipos de cobertura para colocar no seu sorvete, podendo também não colocar cobertura alguma. De quantos modos o cliente pode fazer a sua escolha?

A. Parramón/AP Photo

9 Binômio de Newton

Toda potência da forma $(x + y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é conhecida como **binômio de Newton**.

O desenvolvimento do binômio de Newton é simples em casos como os seguintes, que você já estudou no Ensino Fundamental:

- $(x + y)^0 = 1$
- $(x + y)^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = (x + y)^2(x + y) = x^3 + 3x2y + 3xy^2 + y^3$

Você sabia?
Isaac Newton (1642-1727) foi um cientista inglês e é considerado um dos maiores estudiosos da História. Contribuiu grandemente com a Matemática e a Física. Criou o binômio de Newton, a lei da gravitação, entre outras criações.

Em casos como $(x + y)^7$, $(2x - y)^5$, $(x + 2)^{10}$ e outros, vamos recorrer aos conhecimentos adquiridos na análise combinatória.

Observe nos exemplos seguintes os binômios de Newton desenvolvidos e veja como são os coeficientes de cada termo:

a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \mathbf{1}x^2y^0 + \mathbf{2}x^1y^1 + \mathbf{1}x^0y^2 = \binom{2}{0}x^2y^0 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{2}x^0y^2$

b) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = \mathbf{1}x^3y^0 + \mathbf{3}x^2y^1 + \mathbf{3}x^1y^2 + \mathbf{1}x^0y^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$

Note que os coeficientes dos desenvolvimentos são as linhas do triângulo de Pascal. Será que isso também acontece com $(x + y)^4$?

De fato:

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \mathbf{1}x^4y^0 + \mathbf{4}x^3y^1 + \mathbf{6}x^2y^2 + \mathbf{4}x^1y^3 + \mathbf{1}x^0y^4 =$$

$$= \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4$$

Generalizando, podemos escrever, para x e $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

Note que os expoentes de x começam em n e decrescem de 1 em 1 até 0, enquanto os expoentes de y começam em 0 e crescem de 1 em 1 até n.

Observação: Como já vimos, dados os números naturais n e p, com $n \geqslant p$, o número $\binom{n}{p}$ é chamado número binomial n sobre p. Lembre que $C_{n,\,p} = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Veja, por exemplo, como efetuar o desenvolvimento de $(x + a)^5$

$$(x + a)^5 = \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\binom{5}{0}}x^5 + \underset{\underset{5}{\downarrow}}{\binom{5}{1}}x^4a + \underset{\underset{10}{\downarrow}}{\binom{5}{2}}x^3a^2 \; 1 \; \underset{\underset{10}{\downarrow}}{\binom{5}{3}}x^2a^3 + \underset{\underset{5}{\downarrow}}{\binom{5}{4}}xa^4 + \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\binom{5}{5}}a^5$$

Portanto:

$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$

Exercícios

77. Efetue os seguintes desenvolvimentos:

a) $(x + 2)^5$

b) $(a - 3)^4$

Fique atento!
$(a - 3)^4 = (a + (-3))^4$

78. ATIVIDADE EM DUPLA Considerem o desenvolvimento de $(x + 1)^{15}$. Sem fazer o desenvolvimento todo, tentem responder às perguntas:

a) Quantos termos tem o desenvolvimento?

b) Qual é o 1º termo?

c) Qual é o 3º termo?

Leitura

O triângulo aritmético

Também conhecido como triângulo de Pascal, triângulo de Tartaglia ou triângulo de Yang-Hui, o triângulo aritmético já era conhecido dos matemáticos havia muito tempo. Referências ao triângulo aritmético ou a seus coeficientes podem ser encontradas rudimentarmente em obras indianas e chinesas de épocas anteriores a Cristo.

Na China, o *Manual de Matemática* de Jia Xian, escrito por volta do ano 1050, já traz o triângulo. O mais famoso matemático chinês associado ao triângulo aritmético foi Yang-Hui, que estudou e aplicou o triângulo aritmético por volta do ano 1250. Outra importante referência chinesa ao triângulo aritmético é o livro *Precioso espelho dos quatro elementos*, escrito em 1303 por Chu Shih-Chieh. Esse livro traz figuras de triângulos com até nove linhas; entretanto, a denominação chinesa mais comum para o triângulo aritmético é *triângulo de Yang-Hui*.

O poeta, astrônomo e matemático persa Omar Khayyam (1048-1122) descreveu o triângulo aritmético em alguns trabalhos por volta de 1100. Um arranjo semelhante dos coeficientes era conhecido dos árabes na mesma época e, em 1265, o árabe Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274) faz uma clara referência ao triângulo aritmético em uma de suas obras.

Na Europa, um século antes de Pascal, muitos matemáticos trabalharam com o triângulo aritmético. Um dos mais antigos foi o matemático alemão Apianus (Petrus Apianus, 1495-1552), que em 1527 publicou um livro cuja capa trazia um desenho do triângulo aritmético. Mas quem mais divulgou o triângulo foi o alemão Stifel (Michael Stifel, 1486-1567), principalmente por meio de sua importante e influente obra *Arithmetica Integra*, de 1544.

Após os alemães, alguns matemáticos italianos redescobriram o triângulo aritmético. O principal deles foi Tartaglia (Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1559), que dedicou a esse assunto muitas páginas de seu extenso livro *General Tratato di numeri et misure*, de 1556. Tartaglia reivindicou a criação do triângulo aritmético para ele, e atualmente em alguns países este é chamado *triângulo de Tartaglia*.

O francês Pascal (Blaise Pascal, 1623-1662) chegou ao triângulo aritmético motivado pela resolução de um problema que envolvia a probabilidade de obter um duplo 6 jogando dois dados. Escreveu uma monografia de 60 páginas sobre o triângulo aritmético, *Traité du triangle arithmétique*, publicada postumamente em 1665. Pascal propôs o triângulo em nova forma e estudou suas propriedades mais a fundo que seus antecessores, provando várias delas. A consagração da denominação atual *triângulo de Pascal* ocorreu pelo fato de, em 1739, De Moivre (Abraham de Moivre, 1667-1754) ter publicado um trabalho de grande repercussão na época, em que usou a denominação *triangulum arithmeticum pascalianum* para o triângulo aritmético.

Adaptado de: GALERA, María Cristina Solaeche. *Sistema de tabulación de coeficientes binomiales o triángulo de Pascal: un modelo numérico rasga el telar de los tiempos*. Venezuela: Divulgaciones matemáticas. n. 1, p. 61-68, v. 6, 1998.; DAVIS, Harod T. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*. São Paulo: Atual, 1992.; MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

CAPÍTULO 12

Probabilidade

O estudo das probabilidades, cujas ferramentas dão suporte a uma extensa área do conhecimento, teve sua origem na necessidade de quantificar os riscos dos seguros e de avaliar as chances de ganhar em jogos de azar.

O surgimento dos seguros está associado à perda de carga dos navios (por naufrágio ou roubo) há mais de 5 mil anos. A partir de estimativas empíricas de probabilidades de acidentes, estipulavam-se as taxas e os prêmios correspondentes. Os primeiros estudos matemáticos sobre seguros aparecem no início do século XVI, ligados a seguros de vida, popularizados pelo crescimento dos centros urbanos, embora ainda apoiando-se nas milenares técnicas empíricas. Iniciados por Gerônimo Cardano (1501-1576) em 1570, não ganharam repercussão; em 1693, Edmund Halley (1656-1742) propôs um cálculo do valor da anuidade do seguro em termos da expectativa de vida e da probabilidade de sobrevida por um ou mais anos e, em 1730, em um estágio mais adiantado, Daniel Bernoulli (1700-1782) retomou problemas clássicos e deu os primeiros passos em direção a novos tipos de seguros.

Hely Demutti/Acervo do fotógrafo

Coleção de dados antigos da Ásia. Os jogos de dados são um dos mais praticados da História. Hoje, são comumente utilizados em jogos de tabuleiro tradicionais e jogos de RPG. Têm a função de gerar um resultado aleatório (ao acaso).

Os jogos de azar são aqueles em que a possibilidade de ganhar ou perder depende exclusivamente do acaso, não importando o raciocínio ou a habilidade do jogador. Antigamente jogava-se não só em apostas, mas também em decisões de disputas, nas divisões de heranças, entre outras.

Quanto aos estudos, inicialmente havia apenas a preocupação de enumerar as possibilidades de se obter um certo resultado no jogo, e os primeiros cálculos de probabilidades em jogos de azar foram feitos com base em situações concretas. Os problemas genéricos viriam a ser resolvidos, mais tarde, por Pierre de Fermat e Blaise Pascal. Diz-se que em 1654 Pascal recebeu de seu amigo Chevalier de Méré o desafio de resolver questões como esta: “Em oito lances de um dado um jogador deve tentar tirar o número um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido por seu oponente. Como deveria ser ele indenizado?”; isso desencadeou uma série de correspondências entre ele e Fermat, o que estimulou os estudos de Huygens sobre o assunto.

Adaptado de: *História da Matemática*, de Carl B. Boyer. São Paulo: Edgard Blücher, 2001. p. 250.

A teoria das probabilidades e suas aplicações serão objeto de estudo deste capítulo.

1 Fenômenos aleatórios*

Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo antes de ser realizado. Não sabemos se sairá cara ou coroa. Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de **fenômenos aleatórios** (ou **casuais**).

Por exemplo, são aleatórios os fenômenos:

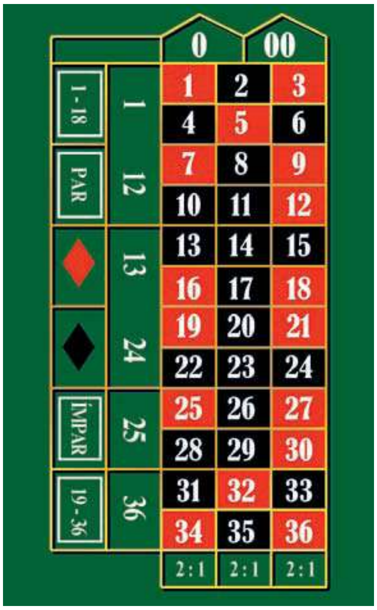
- lançamento de um dado "não viciado";
- número de peças defeituosas fabricadas por uma máquina;
- resultado de um jogo de roleta;
- número de pessoas que ganharão na loteria;
- número de chamadas telefônicas que serão efetuadas em uma cidade no Dia das Mães.

Para refletir
Qual é o significado de expressões como "moeda perfeita" ou "dado não viciado"?

Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório é que buscamos os resultados prováveis, as chances, as **probabilidades** de determinado resultado ocorrer. A **teoria das probabilidades** é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

» Formem grupos de quatro alunos e discutam a situação a seguir. Depois, cada grupo expõe e discute suas ideias com os demais grupos.

No jogo da roleta**, muito comum em cassinos americanos, é sorteado um número entre 1 e 36 (o zero também é possível, mas vamos desconsiderá-lo neste momento). Nesse jogo é utilizada uma mesa alongada na qual em uma das pontas fica a roleta, uma marca na mesa indica a posição da pessoa que organiza o jogo e o restante da mesa está ocupado por áreas demarcadas pelos números de 1 a 36, dispostos em 3 colunas e 36 fileiras. Cada jogador pode apostar em várias situações, por exemplo: se o número que vai sair é par ou ímpar; se ele é da 1ª dúzia (1 a 12), da 2ª dúzia (13 a 24) ou da 3ª dúzia (25 a 36); ou mesmo apostar em um número específico. O jogador pode apostar em quantos números quiser em cada rodada.



Ngaga35/Shutterstock/Glow Images

Por exemplo, se um jogador apostar 1 dólar em um número específico e acertar, ele receberá 36 dólares; se apostar 1 dólar em uma das 3 dúzias e acertar, receberá 3 dólares; e se ele apostar 1 dólar em um número par (ou ímpar) e acertar, receberá 2 dólares. Ele também pode apostar 1 dólar em um grupo de 4 números e, se acertar (ou seja, se for sorteado um dos 4 números escolhidos), receberá 9 dólares.

Agora discutam:

a) Alguns apostadores recebem 36 dólares, outros recebem apenas 2 dólares, sendo que a aposta é a mesma (1 dólar). Essas regras são justas?

b) Por que pessoas que apostam em "par ou ímpar" receberiam menos em caso de acerto?

c) Não seria mais lógico todos apostarem em um número específico para receber 36 dólares em caso de acerto? Ou será justo que um tipo de aposta remunere mais do que outro?

* Veja as Leituras no final do capítulo.

** No Brasil todos os jogos de azar são proibidos, porém em diversos países, como os Estados Unidos, esses jogos são legais.

2 Espaço amostral e evento

Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado **espaço amostral** ( ). Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado **evento**.

Neste capítulo nos referimos apenas a conjuntos finitos.

Acompanhe alguns exemplos de fenômenos (ou experimentos) **aleatórios**. Quando não especificado, os dados dos experimentos são sempre os comuns, de 6 faces e não "viciados".

a) Lançamento de um dado e registro do resultado.
Conjunto de todos os resultados possíveis: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Um **subconjunto** dele é {1, 3, 5}, que pode ser identificado por "ocorrer número ímpar no lançamento de um dado".

- espaço amostral: = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- evento *A*: "ocorrer número ímpar no lançamento de um dado" $\rightarrow A = \{1, 3, 5\}$

b) Retirar uma carta de um baralho de 52 cartas e registrar o seu naipe.
Considerando C = copas, E = espadas, O = ouros e P = paus, temos:
Conjunto de todos os resultados possíveis: {C, E, O, P}
Um subconjunto dele é {O}, que pode ser identificado por "retirar uma carta cujo naipe seja ouros".

- espaço amostral: = {C, E, O, P}
- evento *A*: "retirar uma carta cujo naipe seja ouros" $\rightarrow A = \{O\}$

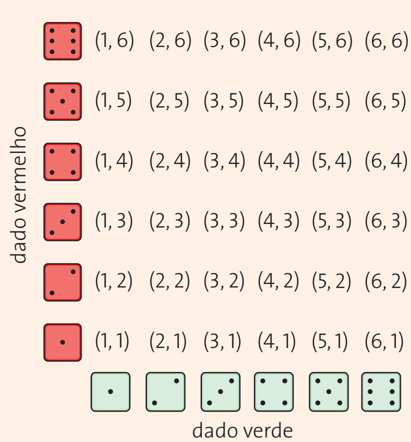
Observação: Quando um evento é formado apenas por um elemento do espaço amostral, ele é chamado **evento elementar**.

Exercícios resolvidos

1. No lançamento simultâneo de dois dados, um verde e um vermelho, determine o espaço amostral e os eventos *A*: "sair o mesmo número em ambos os dados"; *B*: "sair soma 7"; *C*: "sair soma maior do que 10"; *D*: "sair soma menor do que 5"; *E*: "sair soma maior do que 12" e *F*: "sair soma maior do que 1 e menor do que 13".

Resolução:
Nesse caso, podemos representar o espaço amostral por um diagrama:

Fique atento!
O espaço amostral depende do experimento. Veja a diferença quando se tem o lançamento de um dado e de dois dados.



O espaço amostral é formado por 36 elementos. São eles:
= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}
evento *A*: "sair o mesmo número em ambos os dados" $\rightarrow A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
evento *B*: "sair soma 7" $\rightarrow B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
evento *C*: "sair soma maior do que 10" $\rightarrow C = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$
evento *D*: "sair soma menor do que 5" $\rightarrow D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$
evento *E*: "sair soma maior do que 12" $\rightarrow E = \in$
evento *F*: "sair soma maior do que 1 e menor do que 13" $\rightarrow F = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 5), (6, 6)\} =$

2. No lançamento de uma moeda, determine o espaço amostral e o evento "sair cara".

Resolução:
Denotamos "cara" por **C** e "coroa" por $\overline{\mathbf{C}}$. Logo:
espaço amostral: = {C, $\overline{C}$}
evento *A*: "sair cara" $\rightarrow A = \{C\}$

3 Eventos certo, impossível e mutuamente exclusivos

No experimento aleatório “lançar um dado e registrar o resultado”, temos:

- espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- evento A: “ocorrência de um número menor do que 7” $\rightarrow A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Portanto, $A = \Omega$.
- evento B: “ocorrência de número maior do que 6” $\rightarrow$ no dado não existe número maior do que 6.
  Portanto, $B = \varnothing$.

Dizemos que:

> Quando um evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado **evento certo**.
> Quando um evento é vazio, ele é chamado **evento impossível**.

Na situação acima, A é um evento certo e B é um evento impossível.

União de eventos, intersecção de eventos e complementar de um evento

Consideremos, no exemplo do lançamento de um dado, os eventos:

- C: ocorrência de número par $\rightarrow C = \{2, 4, 6\}$
- D: ocorrência de múltiplo de 3 $\rightarrow D = \{3, 6\}$
- E: ocorrência de número par **ou** número múltiplo de 3 $\rightarrow E = C \ell \; D = \{2, 4, 6\} \ell \; \{3, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$ (união de eventos)
- F: ocorrência de número par e múltiplo de 3 $\rightarrow F = C \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$ (intersecção de eventos)
- H: ocorrência de número ímpar $\rightarrow H = \{1, 3, 5\}$

  Indicamos assim: $H = \overline{C} = {}^{C}_{\Omega}$ (complementar de C em relação a Ω)

  C e H são chamados **eventos complementares**. Observe que $C \cap H = \varnothing$ e $C \ell \; H = \Omega$.
  Quando a intersecção de dois eventos é o conjunto vazio, eles são chamados **eventos mutuamente exclusivos**.

4 Cálculo de probabilidades

Quando em um fenômeno (ou experimento) aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma “chance” de ocorrer (o espaço é equiprovável), a **probabilidade** de ocorrer um evento A, indicada por $p(A)$, é um número que mede essa chance e é dado por:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Nesse caso, os eventos elementares são chamados **eventos equiprováveis**, pois todos têm a mesma chance de ocorrer.

> **Fique atento!**
> Lembre-se: evento elementar é aquele formado por apenas um elemento do espaço amostral.

Certeza e impossibilidade

Vamos agora relacionar a probabilidade do evento impossível e do evento certo com os demais eventos.
Os conjuntos $\varnothing$, A e Ω estão sempre relacionados por $\varnothing \ell\ A \ell\ \Omega$.
Relacionando o número de elementos desses conjuntos, temos $n(\varnothing) \leqslant n(A) \leqslant n(\Omega)$.

Dividindo esses três números por $n(\Omega) > 0$, encontramos $\dfrac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} \leqslant \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} \leqslant \dfrac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$.

Como $n(\varnothing) = 0$, $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = p(A)$ e $\dfrac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$, concluímos:

$$\boxed{0 \leqslant p(A) \leqslant 1}$$

Isso significa que a probabilidade pode assumir valores de 0 a 1.
Quando $p(A) = 0$, o evento A é o **evento impossível**, e **não há possibilidade** de que ele venha a ocorrer.
Quando $p(A) = 1$, o evento A é o **evento certo**, e **há certeza** de que ele ocorrerá.

Exercícios resolvidos

3. Consideremos o experimento aleatório do lançamento de uma moeda perfeita. Qual é a probabilidade de sair cara?

Resolução:

Tanto "sair cara" como "sair coroa" (que são os eventos elementares) têm a mesma "chance" de ocorrer. Assim, temos:
espaço amostral: $\Omega = \{C, \overline{C}\} \rightarrow n(\Omega) = 2$
evento A: ocorrência de cara $\rightarrow A = \{C\} \rightarrow n(A) = 1$

Portanto, $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$.

Como $\dfrac{1}{2} = \dfrac{50}{100} = 50\%$, temos que, no lançamento de uma moeda, a probabilidade de sair cara é $\dfrac{1}{2}$ ou 50%. Isso não significa que, se jogarmos duas vezes a moeda, em uma das jogadas sairá cara e, na outra, coroa. Significa, **sim**, que, **após um grande número de jogadas**, em aproximadamente 50% (metade) delas sairá cara.

Para refletir
Faça esse experimento e comprove o que foi dito.

4. No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de sair número maior do que 4?

Resolução:

Nesse caso, temos:
espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$
evento A: ocorrência de número maior do que 4 $\rightarrow A = \{5, 6\} \rightarrow n(A) = 2$

Logo, $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

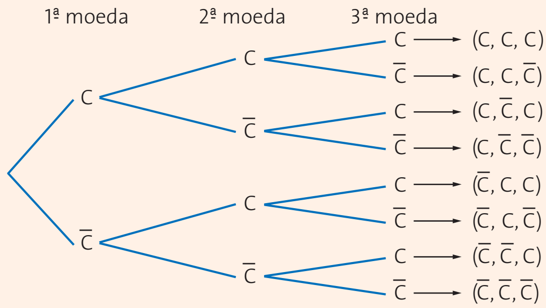
Como $\dfrac{1}{3} = 1 : 3 \simeq 0{,}33$, então $\dfrac{1}{3} \simeq 33\%$. Portanto, a probabilidade de obtermos número maior do que 4 no lançamento de um dado é de $\dfrac{1}{3}$ ou 33%, aproximadamente.

5. No lançamento simultâneo de 3 moedas perfeitas distinguíveis, qual é a probabilidade de serem obtidas:
a) **pelo menos** 2 caras?
b) **exatamente** 2 caras?

Para refletir
Qual é a diferença entre dizer "pelo menos duas" e "exatamente duas"?

Resolução:

Nesse caso, é conveniente usar o diagrama de árvore:



$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, \overline{C}), (C, \overline{C}, C), (C, \overline{C}, \overline{C}), (\overline{C}, C, C), (\overline{C}, C, \overline{C}), (\overline{C}, \overline{C}, C), (\overline{C}, \overline{C}, \overline{C})\} \rightarrow n(\Omega) = 8$

a) evento A: obter pelo menos 2 caras $\rightarrow A = \{(C, C, C), (C, C, \overline{C}), (C, \overline{C}, C), (\overline{C}, C, C)\} \rightarrow n(A) = 4$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\%$$

b) evento B: obter exatamente 2 caras $\rightarrow B = \{(C, C, \overline{C}), (C, \overline{C}, C), (\overline{C}, C, C)\} \rightarrow n(B) = 3$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%, \text{ pois } 3 : 8 = 0{,}375$$

Observação: Para determinar $n(\Omega)$ e $n(A)$ e depois calcular $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, não se deve necessariamente determinar Ω e A. Veja os exercícios resolvidos seguintes.

6. Considere todos os números naturais de 4 algarismos distintos que é possível formar com os algarismos 1, 3, 4, 7, 8 e 9. Escolhendo um deles ao acaso, qual é a probabilidade de sair um número que comece por 3 e termine em 7?

$$\left.\begin{array}{l} \underline{?}\ \underline{?}\ \underline{?}\ \underline{?} \rightarrow n(\Omega) = A_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \\ \underline{3}\ \underline{?}\ \underline{?}\ \underline{7} \rightarrow n(A) = A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12 \end{array}\right\} p(A) = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}$$

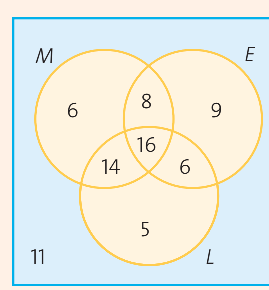
7. Em um grupo de 75 jovens, 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 gostam de música e esporte; 30 gostam de música e leitura; 22 gostam de esporte e leitura; 6 gostam somente de música; 9 gostam somente de esporte; e 5 jovens gostam somente de leitura.

a) Qual é a probabilidade de, ao apontar ao acaso um desses jovens, ele gostar de música?

b) Qual é a probabilidade de, ao apontar ao acaso um desses jovens, ele não gostar de nenhuma dessas atividades?

Resolução:

Nesse caso, elaboramos o diagrama de Venn ao lado, considerando M = música, E = esporte e L = leitura.



Observamos que:

- $6 + 8 + 16 + 14 = 44 \rightarrow 44$ gostam de música.
- $75 - (6 + 9 + 5 + 8 + 6 + 14 + 16) = 75 - 64 = 11 \rightarrow 11$ não gostam de nenhuma dessas atividades.

Como $n(\Omega) = 75$, temos:

a) probabilidade de gostar de música: $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{44}{75} \simeq 0{,}586 \simeq 59\%$

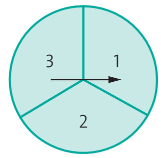
b) probabilidade de não gostar de nenhuma dessas atividades: $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{11}{75} \simeq 0{,}146 \simeq 15\%$

Logo, ao se apontar ao acaso um desses jovens, a probabilidade de ele gostar de música é $\frac{44}{75} \simeq 59\%$, e a probabilidade de ele não gostar de nenhuma dessas atividades é de $\frac{11}{75} \simeq 15\%$.

Exercícios

ATENÇÃO! Não escreva no seu livro!

1. Ao girar a "roleta" ao lado, defina o espaço amostral e os eventos A: ocorrência do número 2; B: ocorrência de número ímpar.



2. No lançamento simultâneo de duas moedas distinguíveis, defina o espaço amostral e os eventos A: ocorrência de exatamente uma cara; B: ocorrência de coroa em ambas; C: ocorrência de pelo menos uma cara.

3. No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de que o resultado seja:
a) um número par?
b) um número primo?
c) o número 3?
d) um número menor do que 3?
e) um número menor do que 1?
f) um número menor do que 7?

4. Em uma caixa há 6 bolas brancas e 4 bolas vermelhas. Qual é a probabilidade de, ao acaso, ser retirada:
a) uma bola vermelha?
b) uma bola branca?

(**Observação**: Para indicar o evento "sair bola vermelha", use índices assim: $A = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$.)

5. Escreva em pedaços iguais de papel os números de 1 a 13. Dobre-os igualmente de modo que qualquer um deles tenha a mesma "chance" de ser retirado de uma caixa. Qual é a probabilidade de que o número retirado seja:
a) par?
b) divisível por 3?
c) um número primo?
d) maior do que 8?
e) menor do que 10?
f) um número entre 5 e 10?
g) múltiplo de 4?

6. No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:
a) a soma seja 7?
b) a soma seja par?
c) a soma seja um número primo?
d) a soma seja maior do que 1 e menor do que 8?
e) ambos os números sejam pares?
f) ambos os números sejam iguais?
g) o primeiro número seja múltiplo do segundo?

7. Qual é a probabilidade de, ao retirar ao acaso uma carta de um baralho de 52 cartas, obter:
a) uma carta de copas?
b) um ás?
c) um ás de copas?
d) uma carta com naipe vermelho?
e) um "três" vermelho?

8. No lançamento simultâneo de duas moedas perfeitas e distinguíveis, qual é a probabilidade de que:
a) em ambas ocorra cara?
b) ocorra cara em uma e coroa na outra?
c) não ocorra nenhuma cara?
d) ocorra exatamente uma coroa?

9. Em uma enquete foram entrevistados 100 estudantes. Setenta deles responderam que frequentavam um curso de Informática, 28 responderam que frequentavam um curso de Inglês e 10 responderam que frequentavam ambos, Informática e Inglês. Qual é a probabilidade de um desses estudantes, selecionado ao acaso:
a) estar frequentando somente o curso de Informática?
b) não estar frequentando nenhum desses cursos?

10. Em uma enquete foram entrevistadas 80 pessoas sobre os meios de transporte que utilizavam para ir ao trabalho e/ou à escola. Quarenta e duas responderam ônibus, 28 responderam carro e 30 responderam moto. Doze utilizavam-se de ônibus e carro, 14, de carro e moto e 18, de ônibus e moto. Cinco utilizavam-se dos três: carro, ônibus e moto. Qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, selecionada ao acaso, utilize:
a) somente ônibus?
b) somente carro?
c) carro e ônibus, mas não moto?
d) nenhum dos três veículos?
e) apenas um desses veículos?

11. Considere todos os anagramas da palavra ROMA. Escolhendo-se um deles ao acaso, qual é a probabilidade de sair "AMOR"?

12. ATIVIDADE EM DUPLA Considerem um baralho de 52 cartas.
a) De quantas formas é possível escolher 2 cartas desse baralho?
b) De quantas maneiras é possível escolher 2 cartas de espadas desse baralho?
c) Qual a probabilidade de, escolhendo-se ao acaso 2 cartas desse baralho, saírem 2 cartas de espadas?

5 Definição teórica de probabilidade e consequências

Vamos analisar o fenômeno aleatório **lançamento de uma moeda perfeita**.

Nesse caso, temos:

- $\Omega = \{C, \overline{C}\} \Rightarrow p(\Omega) = 1$
- Os subconjuntos de Ω são: $\varnothing$, $\{C\}$, $\{\overline{C}\}$ e $\{C, \overline{C}\}$.

  Assim, $p(\varnothing) = 0$; $p(\{C\}) = \frac{1}{2}$; $p(\{\overline{C}\}) = \frac{1}{2}$ e $p(\{C, \overline{C}\}) = 1$.

  Vemos que $p(A) \geqslant 0$, para todo $A \quad \Omega$.
- Considerando $A = \{C\}$ e $B = \{\overline{C}\}$, vemos que $A \quad B = \varnothing$ e

$$p(A \quad B) = p(\{C\} \quad \{\overline{C}\}) = p(\{C, \overline{C}\}) = p(\Omega) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = p(\{C\}) + p(\{\overline{C}\}) = p(A) + p(B)$$

Então, podemos teoricamente considerar probabilidade como uma função definida nas partes de um conjunto (espaço amostral Ω) com valores reais, satisfazendo as seguintes propriedades:

1ª) $\mathbf{P_1}$: $p(A) \geqslant 0$, para qualquer $A \quad \Omega$

2ª) $\mathbf{P_2}$: $p(\Omega) = 1$

3ª) $\mathbf{P_3}$: $p(A \quad B) = p(A) + p(B)$, quando $A \quad B = \varnothing$ (eventos mutuamente exclusivos)

Observe que essas três propriedades são satisfeitas no exemplo acima.

Consequências da definição

Como consequências da definição teórica de probabilidade, temos as seguintes propriedades:

1ª propriedade: Impossibilidade ou $p(\varnothing) = 0$

Como um evento qualquer A (A subconjunto de Ω) pode ser escrito como $A \quad \varnothing$ e como $A \quad \varnothing = \varnothing$, podemos aplicar a propriedade $\mathbf{P_3}$ e temos:

$$p(A) = p(A \quad \varnothing) \overset{P_3}{=} p(A) + p(\varnothing) \Rightarrow p(\varnothing) = 0$$

$$\boxed{p(\varnothing) = 0}$$

2ª propriedade: Probabilidade do evento complementar

Observe que, sendo $\overline{A}$ a notação para "complementar de A", temos:

$$A \quad \overline{A} = \Omega \text{ e } A \quad \overline{A} = \varnothing$$

Logo:

$$p(\Omega) = p(A \quad \overline{A})$$

Aplicando $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_3}$, temos:

$$1 = p(A) + p(\overline{A}) \text{ ou, equivalentemente, } p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$

3ª propriedade: Probabilidade da união de dois eventos

A partir do número de elementos da união de dois conjuntos, admitiremos que:

$\boxed{p(A \quad B) = p(A) + p(B) - p(A \quad B)}$ → probabilidade da união de dois eventos quaisquer

$$\boxed{p(A \quad B) = p(A) + p(B), \text{ quando } A \quad B = \varnothing \text{ (eventos mutuamente exclusivos)}}$$

Exercícios resolvidos

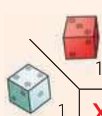
8. No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos distinguíveis, qual é a probabilidade de se obter soma par ou soma múltipla de 3?

> **Fique atento!**
> A soma de dois números naturais é par nos seguintes casos: par + par; ímpar + ímpar.

Resolução:

No quadro abaixo representamos o espaço amostral de 36 elementos: $n(\Omega) = 36$.
Marcamos com **X** o evento A "sair soma par" e com o evento B "sair soma múltipla de 3".
Assim, foram marcados 18 **X** e 12 , ou seja, $n(A) = 18$ e $n(B) = 12$.
É também possível observar $n(A \cap B) = 6$.

Dam d'Souza/Arquivo da editora



	1	2	3	4	5	6
1	X	○	X		⊗	
2	○	X		⊗		X
3	X		⊗		X	○
4		⊗		X	○	X
5	⊗		X	○	X	
6		X	○	X		⊗

Logo:

$$p(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$p(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Assim, a probabilidade de se obter "soma par ou soma múltipla de 3" é dada por:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{probabilidade}\\\text{de se obter}\\\text{soma par}}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{\text{probabilidade}\\\text{de se obter soma}\\\text{múltipla de 3}}} - \underbrace{\frac{1}{6}}_{\substack{\text{probabilidade}\\\text{de se obter soma}\\\text{par e múltipla de 3}}} =$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

9. Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um ás?

Resolução:

evento V: "a carta é vermelha";
evento A: "a carta é ás";
evento $(V \cup A)$: "a carta é vermelha ou ás"
$p(V \cup A) = p(V) + p(A) - p(V \cap A)$
Em um baralho de 52 cartas, há 26 cartas vermelhas e 26 cartas pretas. Há também 4 ases, dos quais 2 são vermelhos.
Logo:

$$p(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

$$p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$p(V \cap A) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

Assim:

$$p(V \cup A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{13} - \frac{1}{26} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$$

A probabilidade de a carta retirada ser vermelha ou ás é de $\frac{7}{13}$.

10. Em uma moeda viciada, a probabilidade de sair cara é o dobro da probabilidade de sair coroa. Qual é a probabilidade de sair cara?

Resolução:

Quando a moeda é viciada, os eventos elementares não são equiprováveis. Porém, sabemos que $P(\Omega) = 1$. Assim:

$P(C) + P(\overline{C}) = 1$ (propriedade)

$P(C) = 2 \cdot P(\overline{C})$ (enunciado)

Logo, $3 \cdot P(\overline{C}) = 1$ e $P(\overline{C}) = \frac{1}{3}$. Portanto:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = \frac{2}{3}$$

> **Fique atento!**
> Quando um experimento é dito "viciado" ou "não honesto", os eventos elementares do espaço amostral não são equiprováveis.

» Resolvido passo a passo

11. (Enem) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

Pedro, camisa 6: — Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12.

Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de 2 (1 + 1) até 12 (6 + 6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça.

Tadeu, camisa 2: — Não sei, não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...

Ricardo, camisa 12: — Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...

Desse diálogo conclui-se que:

a) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.

b) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

c) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.

d) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

e) Não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É explicado o modo como Pedro sugere que seja feito o sorteio do jogador que guardará a taça, e é mostrada a opinião de Tadeu e Ricardo.

b) O que se pede?

Pede-se que se conclua se Tadeu e Ricardo têm razão ou não.

2. Planejando a solução

De acordo com o texto, vamos calcular a probabilidade de Pedro, Tadeu e Ricardo serem sorteados para ficar com a taça. Com os resultados, veremos quem tem razão.

3. Executando o que foi planejado

Jogando dois dados, o espaço amostral é composto de 36 elementos, uma vez que cada dado apresenta 6 resultados possíveis. Cada elemento do espaço amostral é do tipo (dado_1, dado_2). Assim:

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

- Para Pedro ser sorteado, a soma dos resultados deve ser 6. Assim, temos 5 elementos do espaço amostral compondo o evento $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.
  Dessa forma, a probabilidade de Pedro ser sorteado é:
  $$P_A = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}$$
- Para Tadeu ser sorteado, a soma dos resultados deve ser 2. Assim, temos um único elemento do espaço amostral compondo o evento $B = \{(1, 1)\}$. Dessa forma, a probabilidade de Tadeu ser sorteado é:
  $$P_B = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{36}$$
- Para Ricardo ser sorteado, a soma dos resultados deve ser 12. Assim, também temos um único elemento do espaço amostral compondo o evento $C = \{(6, 6)\}$.
  Dessa forma, a probabilidade de Ricardo ser sorteado é:
  $$P_C = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

Com esses resultados, podemos concluir o seguinte:

a) Tadeu não estava equivocado; Pedro estava levando vantagem, pois $P_A > P_B$ e $P_A > P_C$.

b) Ricardo não estava equivocado; a probabilidade de Pedro ganhar é maior do que a probabilidade de Ricardo e Tadeu juntos, pois $P_A > P_B + P_C$.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **d**.

5. Ampliando o problema

a) Pedro era o jogador com maior chance de levar a taça para casa, dentre todos os 11 jogadores do time?

b) Alguém sugeriu usarem um dado e uma moeda, da seguinte forma: atribui-se o valor 1 para cara e o valor 7 para coroa; jogam-se simultaneamente a moeda e o dado, e somam-se os resultados. Por exemplo, saindo cara e "5" ganha Pedro, pois a soma seria 6. No caso de sair coroa e "6", joga-se novamente, pois a soma seria 13 e ninguém tem essa camisa. Nessa nova maneira de sortear, Pedro continuaria levando vantagem?

c) *Discussão em equipe*

O futebol amador é praticado em todo o Brasil. Você conhece algum time de futebol amador da sua cidade ou região? Conhece alguém que joga ou já jogou? Troque ideias com seus colegas sobre futebol amador, discutindo a importância dessa modalidade esportiva.

12. Uma máquina produziu 50 parafusos, dos quais 5 eram defeituosos. Ao pegar ao acaso 3 parafusos, responda:

a) Qual é a probabilidade de que os 3 sejam perfeitos?

b) Qual é a probabilidade de que os 3 sejam defeituosos?

c) Qual é a probabilidade de que pelo menos um seja defeituoso?

Resolução:

a) $n(\Omega)$ = número de combinações de 50 elementos tomados 3 a 3

> **Fique atento!**
>
> $C_{n,p} = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

$$n(\Omega) = C_{50,\,3} = \binom{50}{3} = \frac{50!}{3!\ 47!} =$$

$$= \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \cancel{47!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{47!}} = 50 \cdot 49 \cdot 8$$

evento A: os 3 parafusos são perfeitos

$$n(A) = C_{45,3} = \binom{45}{3} = \frac{45!}{3!\ 42!} =$$

$$= \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot \cancel{42!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{42!}} = 15 \cdot 22 \cdot 43$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15 \cdot 22 \cdot 43}{50 \cdot 49 \cdot 8} = \frac{1419}{1960} \ (\simeq 72\%)$$

b) evento B: os 3 parafusos são defeituosos, o que pode ocorrer de $C_{5,\,3}$ maneiras. Logo:

$$n(B) = C_{5,\,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\ 2!} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{50 \cdot 49 \cdot 8} = \frac{1}{1960} \ (\simeq\ 0{,}05\%)$$

c) evento E: "pelo menos um é defeituoso", que é o complementar do evento A: "os três são perfeitos" (que é o mesmo que "nenhum é defeituoso"). Logo:

$p(E) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}72398 = 0{,}27602$

13. Se A e B são eventos *mutuamente exclusivos* e $p(A) = 0{,}25$ e $p(B) = 0{,}5$, determine:

a) $p(\overline{A \leqslant B})$

b) $p(A \leqslant B)$

c) $p(\overline{A})$

d) $p(\overline{B})$

Resolução:

a) $p(\overline{A \leqslant B}) = 1 - p(A \leqslant B) =$
$= 1 - [p(A) + p(B) - p(A \geqslant B)]$

Temos:

$p(A) = 0{,}25$

$p(B) = 0{,}5$

$p(A \geqslant B) = 0 \quad (A \geqslant B) = \varnothing$ (mutuamente exclusivos)

Logo,

$p(\overline{A \leqslant B}) = 1 - (0{,}25 + 0{,}5) = 0{,}25$

b) $p(A \leqslant B) = p(A) + p(B) - p(A \geqslant B) =$
$= 0{,}25 + 0{,}5 - 0 = 0{,}75$

c) $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

d) $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Quadro-resumo

Evento	Probabilidade
A	$p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$
$\overline{A}$	$p\,(\overline{A}) = 1 - p(A)$
$A \leqslant B$	$p\,(A \leqslant B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exercícios

13. Em uma urna existem bolas numeradas de 1 a 17. Qualquer uma delas tem a mesma chance de ser retirada. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola cujo número seja:
a) par?
b) primo?
c) par ou primo?
d) par e primo?
e) nem par nem primo?
f) par mas não primo?
g) primo mas não par?

14. Uma carta é retirada ao acaso de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de a carta retirada ser:
a) copas?
b) dama?
c) copas ou dama?
d) copas e dama (dama de copas)?
e) não copas?
f) não dama?
g) nem copas nem dama?

15. No lançamento de dois dados perfeitos, qual é a probabilidade de se obter soma 8 ou números iguais nas faces superiores?

16. Em uma classe há 16 homens e 20 mulheres, sendo que metade dos homens e metade das mulheres têm cabelos castanhos. Ao escolher um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de que seja homem ou tenha cabelos castanhos?

17. No lançamento de um dado viciado, a probabilidade de sair 6 é $\frac{3}{11}$. Qual é a probabilidade de não sair 6?

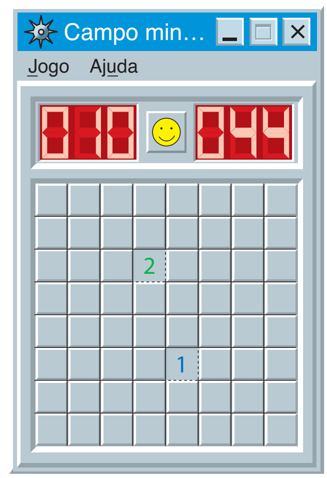
18. ATIVIDADE EM DUPLA No lançamento de uma moeda viciada, a probabilidade de sair coroa é o triplo da probabilidade de sair cara. Qual é a probabilidade de sair coroa?

19. ATIVIDADE EM DUPLA No lançamento de um dado viciado, a probabilidade de sair um número n é representada por $p(n) = n \cdot p(1)$, sendo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Calculem a probabilidade de sair:
a) o número 3;
b) o número 2 ou 4;
c) um número par.

20. ATIVIDADE EM DUPLA Uma máquina produziu 40 peças, das quais 3 eram defeituosas. Ao pegar, ao acaso, 2 dessas peças, qual é a probabilidade de que:
a) ambas sejam perfeitas?
b) ambas sejam defeituosas?
c) pelo menos uma seja defeituosa?

21. ATIVIDADE EM DUPLA Duas cartas são retiradas aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de que:
a) ambas sejam ouros?
b) uma seja copas e outra, ouros?
c) pelo menos uma seja ouros?

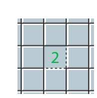
22. DESAFIO EM DUPLA Um famoso jogo do sistema operacional Windows é o Campo minado, em que o jogador precisa descobrir em que posições (delimitadas pelos quadrados) estão colocadas 10 minas (bombas).



Fotos: Reprodução

As regras do jogo são as seguintes:

- A área do jogo contém o campo de jogo, um contador de minas no lado esquerdo (são 10 ao todo) e um cronômetro do lado direito.
- Você pode revelar um quadrado clicando nele com o *mouse*. Se você revelar uma mina, perderá o jogo.
- O número que aparece no quadrado indica quantas minas existem nos oito quadrados que o cercam. No exemplo ao lado, o número 2 indica que existem 2 minas espalhadas nos 8 quadrados que cercam o número 2.



- Para marcar um quadrado que você acha que contém uma mina, clique nele com o botão direito do *mouse*. Ele ficará marcado com uma bandeirinha.

Com base nessas informações, verifiquem qual das opções a seguir é a mais indicada para dar o próximo clique, considerando que o objetivo é não revelar acidentalmente nenhuma mina. Justifiquem sua escolha.

Opção 1: Qualquer um dos 8 quadrados que cercam o número 2 já revelado.
Opção 2: Qualquer um dos 8 quadrados que cercam o número 1 já revelado.
Opção 3: Qualquer um dos quadrados restantes não incluídos nas opções anteriores.

Probabilidade condicional

Analisemos a seguinte situação:

Uma moeda é lançada três vezes. Já vimos que nesse caso o espaço amostral é:

$$\Omega = \{\mathrm{CCC}, \mathrm{CC\overline{C}}, \mathrm{C\overline{C}C}, \mathrm{C\overline{C}\,\overline{C}}, \mathrm{\overline{C}CC}, \mathrm{\overline{C}C\overline{C}}, \mathrm{\overline{C}\,\overline{C}C}, \mathrm{\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}}\} \text{ e } n\,(\Omega) = 8.$$

Consideremos o evento A: sair cara exatamente duas vezes. Então:

$$A = \{\mathrm{CC\overline{C}}, \mathrm{C\overline{C}C}, \mathrm{\overline{C}CC}\} \rightarrow p(A) = \frac{3}{8}$$

Agora, consideremos que, ao ser lançada a moeda três vezes, “o resultado do primeiro lançamento foi cara”. Qual é a probabilidade de sair cara exatamente duas vezes?

O espaço amostral passa a ser B com:

$$B = \{\mathrm{CCC}, \mathrm{CC\overline{C}}, \mathrm{C\overline{C}C}, \mathrm{C\overline{C}\,\overline{C}}\} \quad \text{e} \quad A' = \{\mathrm{CC\overline{C}}, \mathrm{C\overline{C}C}\}$$

em que $A' = A \cap B$ e a probabilidade pedida é:

$$p(A') = \frac{n(A')}{n(B)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Observe que a probabilidade do evento “sair cara em ambos os lançamentos” foi modificada pela presença do evento condicionante “o resultado do primeiro lançamento foi cara”.

Definimos:

- evento A: exatamente dois dos três lançamentos dão cara $\rightarrow A = \{\mathrm{CC\overline{C}}, \mathrm{C\overline{C}C}, \mathrm{\overline{C}CC}\}$
- evento B: o primeiro lançamento dá cara $\rightarrow B = \{\mathrm{CCC}, \mathrm{CC\overline{C}}, \mathrm{C\overline{C}C}, \mathrm{C\overline{C}\,\overline{C}}\}$ e denotamos por A/B o “evento A condicionado ao fato de que o evento B já ocorreu” e por $p(A/B)$ a **probabilidade condicional de ocorrer** A, **tendo ocorrido** B.

No exemplo dado, $p(A/B)$ é a probabilidade de sair cara exatamente duas vezes, tendo saído cara no primeiro lançamento.

Vimos que:

$$p(A/B) = p(A') = \frac{1}{2}$$

Então:

$$p(A/B) = \frac{n(A')}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

> **Fique atento!**
> O fato de o evento B já ter ocorrido causa uma modificação no espaço amostral. Com isso, alguns eventos ficam mais fáceis de ocorrer, e outros ficam mais difíceis.

Dividindo ambos os termos da fração por $n(\Omega) \neq 0$, temos:

$$p(A/B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Logo:

$$\boxed{p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}} \quad \text{ou} \quad \boxed{p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)}$$

CONTEÚDO DIGITAL

Exercícios resolvidos

14. Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair um ás vermelho sabendo que ela é de copas?

Resolução:

1ª maneira:

Nesse caso temos $n(\Omega) = 52$.
evento A: sair ás vermelho
evento B: sair copas
O que o problema pede é $p(A/B)$, ou seja, a probabilidade de sair ás vermelho tendo saído copas.
evento A: {ás de copas, ás de ouros}

evento B: {cartas de copas} $\Rightarrow n(B) = 13$

$A \cap B =$ {ás de copas} $\Rightarrow n(A \cap B) = 1$

Logo, $p(A \cap B) = \frac{1}{52}$ e $p(B) = \frac{13}{52}$. Portanto:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$$

Assim, ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, a probabilidade de sair ás vermelho, sabendo que ela é de copas, é de $\frac{1}{13}$.

2ª maneira:

Se a carta que saiu é de copas, então o espaço amostral é de 13 cartas. Dentre as 13 cartas de copas, uma delas é um ás vermelho. Assim, a probabilidade de sair ás vermelho, sabendo que a carta é de copas, é de $p(A/B) = \frac{1}{13}$.

15. *Biologia*

Uma família planejou ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 homens, já que a primeira criança que nasceu é homem?

Resolução:

1ª maneira:

Nesse caso, chamando **M**: mulher e **H**: homem, temos:

$\Omega =$ {HHH, HHM, HMM, MMM, MMH, MHH, HMH, MHM} $\Rightarrow n(\Omega) = 8$

evento A: a família tem 3 homens $\Rightarrow A =$ {HHH}

evento B: a primeira criança é homem $\Rightarrow B =$ {HHH, HHM, HMH, HMM}

$A \cap B =$ {HHH}; $p(A \cap B) = \frac{1}{8}$; $p(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

2ª maneira:

Se a primeira criança já é um homem, então o espaço amostral para os próximos 2 filhos é {HH, HM, MH, MM}.

Nesse espaço amostral, o evento desejado é {HH}. Assim, a probabilidade de nascerem 3 filhos homens, sabendo que o primeiro que nasceu é homem, é de $p(A/B) = \frac{1}{4}$.

16. Dois dados perfeitos são lançados. Qual é a probabilidade de sair soma 8 se ocorreu o 3 no primeiro dado?

Resolução:

1ª maneira:

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 5), (6, 6)\} \rightarrow n(\Omega) = 36$

evento A: sair soma 8 $\rightarrow A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

evento B: sair 3 no primeiro dado $\rightarrow B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

$A \cap B = \{(3, 5)\}$; $p(A \cap B) = \frac{1}{36}$; $p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

2ª maneira:

Se quisermos somar 8 e no primeiro dado saiu um 3, então o espaço amostral para o próximo dado é {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Nesse espaço amostral, o evento desejado é {5}.
Assim, a probabilidade de jogar dois dados e sair soma 8, sabendo que no primeiro dado saiu um 3, é de $p(A/B) = \frac{1}{6}$.

17. Em uma população de 500 pessoas, 280 são mulheres e 60 exercem a profissão de advogado, sendo 20 do sexo feminino. Tomando ao acaso uma dessas pessoas, qual é a probabilidade de que, sendo mulher, seja advogada?

Resolução:

1ª maneira:

Sendo o evento A: a pessoa exerce advocacia, e o evento B: a pessoa é do sexo feminino, procuramos $p(A/B)$.

$$\left.\begin{array}{l} p(B) = \frac{280}{500} = \frac{14}{25} \\ n(A \cap B) = 20 \\ p(A \cap B) = \frac{20}{500} = \frac{1}{25} \end{array}\right\} \Rightarrow p(A/B) = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{14}{25}} = \frac{1}{14}$$

2ª maneira:

Em vez de estudar a população toda, poderíamos nos restringir às mulheres e perguntar qual é a probabilidade de ser advogada uma mulher tomada ao acaso. Teríamos: $p(A/B) = \frac{20}{280} = \frac{1}{14}$.

Eventos independentes


John Smith/Corbis/Latinstock

O conceito de independência de eventos é muito importante em probabilidade. Após analisar um exemplo, definiremos o que são **eventos independentes**.

Consideremos o experimento "lançar dois dados perfeitos de cores diferentes". Seja A o evento "sair 6 no 1º dado" e B o evento "sair 3 no 2º dado". Observemos que:

- $n(\Omega) = 36$
- $A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
- $B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$
- $p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
- $p(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
- $A \cap B = \{(6, 3)\} \Rightarrow p(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$
- $p(B/A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} = \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{6}$

Assim, $p(B) = p(B/A) = \dfrac{1}{6}$, ou seja, a probabilidade de "sair 3 no 2º dado" não foi afetada pelo fato de "sair 6 no 1º dado", ou, ainda, a probabilidade de ocorrer B **não dependeu** da ocorrência de A.

Nesse caso, dizemos que A e B são **eventos independentes**. A probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de ter ou não ocorrido o outro.

Dessa forma, também é verdade que $p(A) = p(A/B)$.

Assim, como $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, temos:

$$p(A \cap B) = \underbrace{p(A/B)}_{p(A)} \cdot p(B) = p(A) \cdot p(B)$$

Logo, o fato de A e B serem eventos independentes é equivalente a dizer que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Podemos, então, dar a definição:

> Dois eventos A e B de um espaço amostral Ω (com $p(A) \Rightarrow 0$ e $p(B) \Rightarrow 0$) são independentes se, e somente se, $p(A/B) = p(A)$, ou, de modo equivalente:
>
> $$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Com isso, podemos afirmar que dois eventos A e B são **dependentes** quando $p(A \cap B) \Rightarrow p(A) \cdot p(B)$.

Exercícios resolvidos

18. Uma moeda perfeita é lançada duas vezes. Considerando os eventos A: sair cara na 1ª jogada e B: sair cara na 2ª jogada, demonstre que os eventos A e B são independentes.

Resolução:

1ª maneira:

$\Omega = \{CC,\ C\overline{C},\ \overline{C}C,\ \overline{C}\,\overline{C}\}$

$A = \{CC,\ C\overline{C}\} \Rightarrow p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$B = \{CC, \overline{C}C\} \Rightarrow p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{CC\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Como $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, então $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Logo, A e B são independentes.

2ª maneira:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Como $p(A) = \frac{1}{2}$, então $p(A/B) = p(A)$ e os eventos A e B são independentes.

19. Uma fábrica produz três produtos: A, B e C. Qual é a probabilidade de se selecionar, ao acaso, um produto defeituoso A, se é sabido que 30% dos produtos produzidos pela fábrica são produtos A e 5% dos produtos produzidos A são defeituosos?

Resolução:

D: selecionar produto defeituoso

$D \cap A$: selecionar produto defeituoso A

- $p(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$
- $p(D/A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
- $p(D \cap A) = p(D/A) \cdot p(A) = \frac{1}{20} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{200} = 1{,}5\%$

Portanto, $p(D \cap A) = 1{,}5\%$.

20. São realizados dois lançamentos sucessivos de um dado perfeito. Qual é a probabilidade de ocorrer, nos dois casos, o número 5?

Resolução:

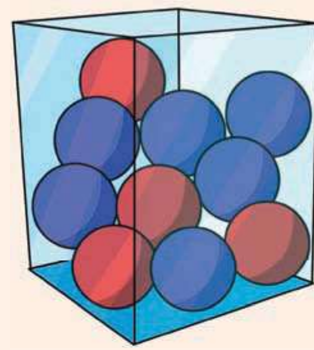
A: ocorrência de 5 no 1º lançamento $\rightarrow p(A) = \frac{1}{6}$

B: ocorrência de 5 no 2º lançamento $\rightarrow p(B) = \frac{1}{6}$

A e B são independentes. Procuramos $p(A \cap B)$.

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

21. Em uma urna existem 10 bolas idênticas, sendo 4 vermelhas e 6 azuis. Retirando-se 2 bolas dessa urna, qual é a probabilidade de saírem 2 bolas vermelhas?



Dam d'Souza/Arquivo da editora

Resolução:

Retirar 2 bolas equivale a retirar uma de cada vez, sem reposição. Assim, para a primeira retirada, temos $p(A) = \frac{4}{10}$.

A segunda retirada é condicionada à retirada da primeira, que já ocorreu. O espaço amostral agora é de 9 bolas, sendo 3 vermelhas e 6 azuis.

Então, tem $p(B/A) = \frac{3}{9}$.

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

22. *Biologia*

Consideremos uma cria de cachorros com 3 filhotes. Sejam os eventos:

A: obtenção de pelo menos dois machos

B: obtenção de pelo menos um filhote de cada sexo

Os eventos A e B são independentes? Por quê?

Resolução:

m: macho

f: fêmea

$\Omega = \{mmm, mmf, mfm, fmm, mff, fmf, ffm, fff\}$

$A = \{mmm, mmf, mfm, fmm\} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{2}$

$B = \{mmf, mfm, fmm, mff, fmf, ffm\} \Rightarrow p(B) = \frac{3}{4}$

$A \cap B = \{mmf, mfm, fmm\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{3}{8}$

Vemos que: $\frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.

Como $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, temos que A e B são independentes.

Exercícios

23. Jogam-se dois dados. Qual é a probabilidade de se obter o 4 no primeiro dado se a soma dos resultados é 9?

24. Um grupo de pessoas está classificado da seguinte maneira:

	Professor	**Advogado**	**Dentista**
Homens	60	80	50
Mulheres	90	40	30

Define-se que **H**: homem; **M**: mulher; **P**: professor; **A**: advogado; **D**: dentista. Calcule cada probabilidade abaixo, supondo que cada pessoa tenha uma única profissão.

a) $p(\text{A/H})$
b) $p(\text{P/M})$
c) $p(\text{D/H})$
d) $p(\text{A/M})$
e) $p(\overline{\text{A}}/\overline{\text{M}})$
f) $p(\overline{\text{D}}/\text{H})$
g) $p(\text{P}/\overline{\text{H}})$

25. Uma moeda é lançada três vezes. Determine a probabilidade de se obter:

a) 3 caras.
b) 3 caras, dado que a primeira foi cara.
c) exatamente 2 caras.
d) 2 caras, dado que a primeira foi coroa.
e) cara no 2º lançamento, dado que 2 coroas e 1 cara foram obtidas.
f) cara no 2º lançamento, dado que 3 caras foram obtidas.
g) cara no 2º lançamento, dado que pelo menos 1 cara foi obtida.

26. *Biologia*

Uma família planeja ter 3 filhos. Qual é a probabilidade de que a família tenha exatamente 2 meninas, dado que a primeira criança que nasceu é menina?

27. Uma carta é retirada de um baralho de 52 cartas e, em seguida, reposta no baralho. Uma segunda carta é retirada. Qual é a probabilidade de que:

a) a primeira carta seja copas?
b) a segunda carta seja paus, dado que a primeira é uma carta de copas?
c) a primeira carta seja copas e a segunda seja paus?

28. Em um conjunto de 100 parafusos, 90 deles estão em boas condições. Dois deles são retirados, sucessivamente, ao acaso, sem reposição. Qual é a probabilidade de que o primeiro parafuso defeituoso seja encontrado na 2ª retirada?

29. Trinta por cento (30%) de uma população tem deficiência de certa vitamina em razão de uma alimentação não equilibrada. Dez por cento (10%) das pessoas com essa deficiência de vitamina têm certa doença. Qual é a probabilidade de que uma pessoa selecionada ao acaso tenha a doença e a deficiência de vitamina?

30. ATIVIDADE EM DUPLA Se A e B são eventos independentes com $p(A) = 0{,}2$ e $p(B) = 0{,}4$, determinem:

a) $p(A \cap B)$
b) $p(A \cup B)$

31. ATIVIDADE EM DUPLA Se A e B são eventos independentes com $p(A) = 0{,}5$ e $p(A \cap B) = 0{,}3$, determinem $p(B)$.

32. ATIVIDADE EM DUPLA Dois dados perfeitos são lançados. Consideremos os eventos A: sair número ímpar no 1º dado e B: a soma dos resultados ser 7. Determinem:

a) $p(A)$;
b) $p(B)$;
c) $p(A \cap B)$;
d) $p(B/A)$;
e) se A e B são independentes.

33. ATIVIDADE EM DUPLA Em uma sacola temos 15 balas, sendo 6 de hortelã, 4 de morango e 5 de limão. Retirando-se ao acaso sucessivamente e sem reposição 2 balas dessa sacola, qual é a probabilidade de:

a) saírem 2 balas de hortelã?
b) saírem 2 balas de morango?
c) não sair nenhuma bala de limão?

34. ATIVIDADE EM DUPLA Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter cara ou um 6?

35. ATIVIDADE EM DUPLA Uma carta é retirada ao acaso de um baralho de 52 cartas e, ao mesmo tempo, uma moeda é lançada. Qual é a probabilidade de se obter:

a) carta vermelha e cara?
b) carta vermelha ou cara?
c) carta de figura (dama, valete, rei) e coroa?
d) carta de figura ou coroa?

36. DESAFIO EM DUPLA Um pescador tem 80% de chance de conseguir pescar algum peixe se não chover, e 30%, se chover. Suponha que, em determinado dia, a chance de chover é de 40%.

a) Qual é a chance de o pescador não pescar nenhum peixe?
b) Sabendo que o pescador não pescou nenhum peixe, qual é a chance de ter chovido?

37. ATIVIDADE EM DUPLA *Biologia*

(Vunesp-SP) Uma pesquisa sobre os grupos sanguíneos ABO, na qual foram testadas 6 000 pessoas de uma mesma raça, revelou que 2 527 têm o antígeno A, 2 234, o antígeno B e 1 846 não têm nenhum antígeno. Nessas condições, qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, escolhida aleatoriamente, tenha os dois antígenos?

6 O método binomial

O método do produto de probabilidades é usado, por exemplo, quando se quer saber qual é a probabilidade de, em uma família, todas as crianças serem meninos ou todas serem meninas. Se um casal planejou ter 4 filhos, a probabilidade de que todos sejam meninos é:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Quando há mistura de sexos, por exemplo, 3 meninos e 1 menina, 2 meninos e 2 meninas, etc. e não se especifica a ordem de ocorrência, podemos usar o **método binomial**. Para isso, vamos inicialmente retomar as potências do binômio $(a + b)^n$, conhecidas como binômio de Newton, que estudamos no capítulo anterior:

$(a + b)^1 = 1a + 1b$

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b) = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$(a + b)^5 = (a + b)^4(a + b) = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Os coeficientes são os elementos do triângulo de Pascal, conhecidos como números binomiais:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\ldots
\end{array}$$

que pode ser escrito assim:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\ldots
\end{array}$$

em que, como já sabemos:

$$C_{n,\,t} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ou} \quad \binom{n}{k} = \frac{A_{n,\,k}}{k!} = C_{n,\,k}$$

é o número total de combinações de n objetos tomados k a k, ou seja, é o número de subconjuntos de k elementos tomados de um conjunto com n elementos.

Vejamos agora, por meio de exemplos, no que consiste o método binomial e quando podemos usá-lo.

a) Consideremos uma família com 2 crianças. Se representamos o nascimento de 1 menino por **M** e o nascimento de 1 menina por **F**, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ p(\text{M}) = p = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \bullet\ p(\text{F}) = q = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}\ p + q = 1$$

- $\Omega = \{\text{MM, MF, FM, FF}\}$

Como experimentalmente sabemos que cada nascimento é independente de nascimentos anteriores, temos:

- $p(\text{MM}) = p(\text{M}) \cdot p(M) = p \cdot p = p^2 = \dfrac{1}{4}$
- $p(\text{MF}) = p(\text{M}) \cdot p(\text{F}) = p \cdot q = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
- $p(\text{FM}) = p(F) \cdot p(\text{M}) = q \cdot p = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
- $p(\text{FF}) = p(\text{F}) \cdot p(\text{F}) = q \cdot q = q^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

Observe que a probabilidade total é igual a 1:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Se não consideramos a ordem em que ocorreram os nascimentos, podemos escrever:

$$\underbrace{p^2}_{\substack{\text{probabilidade} \\ \text{de nascerem} \\ \text{2 meninos} \\ \text{MM}}} + \underbrace{2pq}_{\substack{\text{probabilidade de} \\ \text{nascerem 1 menino} \\ \text{e 1 menina} \\ \text{MF; FM}}} + \underbrace{q^2}_{\substack{\text{probabilidade} \\ \text{de nascerem} \\ \text{2 meninas} \\ \text{FF}}} = 1$$

> **Fique atento!**
> Lembre-se de que o quadrado de uma soma é indicado por: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Assim:

- a probabilidade de nascerem 2 meninos é p^2, ou seja:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- a probabilidade de nascerem 1 menino e 1 menina (sem considerar a ordem) é $2pq$, ou seja:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- a probabilidade de nascerem 2 meninas é q^2, ou seja:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Observemos que:

$$1p^2 + 2pq + 1q^2 = \binom{2}{0}p^2 + \binom{2}{1}pq + \binom{2}{2}q^2 = (p + q)^2 = 1^2 = 1$$

b) Consideremos o nascimento de 3 crianças e as mesmas representações do exemplo anterior.
Agora, as possibilidades de nascimento são dadas por:
$\Omega = \{MMM, MMF, MFM, FMM, MFF, FMF, FFM, FFF\}$
Assim:

- $p(MMM) = p(M) \cdot p(M) \cdot p(M) = p \cdot p \cdot p = p^3$
- $p(MMF) = ppq = p^2q$
- $p(MFM) = pqp = p^2q$
- $p(FMM) = qpp = p^2q$
- $p(MFF) = pqq = pq^2$
- $p(FMF) = qpq = pq^2$
- $p(FFM) = qqp = pq^2$
- $p(FFF) = qqq = q^3$

Se não consideramos a ordem dos nascimentos, as possibilidades se reduzem a MMM, MMF, MFF e FFF, e as probabilidades correspondentes são dadas por:

- $p(MMM) = p^3$
- $p(MMF) = 3p^2q$
- $p(MFF) = 3pq^2$
- $p(FFF) = q^3$

e escrevemos:

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = 1$$

que é a expressão do binômio $(p + q)^3 = 1$.

Fique atento!
Lembre-se de que o cubo de uma soma é indicado por:
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Portanto, podemos dizer que:

- a probabilidade de que as 3 crianças sejam meninos é:

$$p^3 = p \cdot p \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- a probabilidade de que nasçam 2 meninos e 1 menina é:

$$3p^2q = 3ppq = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

- a probabilidade de que nasçam 1 menino e 2 meninas é:

$$3pq^2 = 3pqq = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

- a probabilidade de que nasçam 3 meninas é:

$$q^3 = qqq = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

e notamos que:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Observamos ainda que:

$$1p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + 1q^3 = \binom{3}{0}p^3 + \binom{3}{1}p^2q + \binom{3}{2}pq^2 + \binom{3}{3}q^3$$

O método binomial pode ser usado em outros assuntos, nos quais os problemas tenham estrutura análoga à dos exercícios resolvidos dados a seguir.

Exercícios resolvidos

23. Um dado é jogado 7 vezes. Qual é a probabilidade de sair o número 5 quatro vezes?

Resolução:

Probabilidade de sair o 5 em cada jogada: $p = \frac{1}{6}$

Probabilidade de não sair o 5 em cada jogada: $q = 1 - p = \frac{5}{6}$

Probabilidade de sair o 5 em 4 das 7 jogadas:

$$\binom{7}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{7!}{4!\,3!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

24. Uma prova é constituída de 10 exercícios em forma de teste com 5 alternativas em cada teste. Se um aluno “chutar” todas as respostas, qual é a probabilidade de ele acertar 6 exercícios?

Resolução:

Probabilidade de acertar, em cada questão: $p = \frac{1}{5}$

Probabilidade de errar (não acertar), em cada questão: $q = 1 - p = \frac{4}{5}$

Probabilidade de acertar 6 das 10 questões:

$$\binom{10}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^6\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{10!}{6!\,4!}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4$$

Generalizando:

Uma experiência é realizada n vezes independentemente:

- em cada uma das n vezes, um evento A tem probabilidade p de ocorrer.
- a probabilidade de A não ocorrer em cada vez é $q = 1 - p$.
- a probabilidade de A ocorrer em k das n vezes é dada por: $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

25. Uma moeda é lançada 8 vezes. Qual é a probabilidade de sair cara 5 vezes?

Fique atento!
Não sair cara equivale a sair coroa.

Resolução:

Em cada lançamento:

- A probabilidade de sair cara é $p = \frac{1}{2}$.
- A probabilidade de não sair cara é $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Então, a probabilidade de sair cara 5 vezes é:

$$\binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot \cancel{3\cdot 2}\cdot 1}\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{8} = \frac{7}{32} =$$

$= 0{,}21875 = 21{,}875\%$

Portanto, ao lançar-se uma moeda 8 vezes, a probabilidade de sair cara 5 vezes é de $\frac{7}{32}$ (aproximadamente 22%).

Exercícios

38. *Biologia*

Um casal pretende ter 5 filhos e deseja saber qual é a probabilidade de ter:

a) 5 meninos;

b) 2 meninos e 3 meninas;

c) 1 menino e 4 meninas;

d) o 1º homem, o 2º mulher, o 3º mulher, o 4º homem e o 5º mulher. (Cuidado, nesse caso a ordem importa.)

39. *Biologia*

Um casal pretende ter 6 filhos. Determine a probabilidade de ter:

a) 3 meninos e 3 meninas;

b) 4 meninos e 2 meninas.

40. Se uma moeda é lançada 6 vezes, qual é a probabilidade de sair coroa 4 vezes?

41. Um dado é lançado 5 vezes. Calcule a probabilidade de a face 6 sair 2 vezes.

42. A probabilidade de um saltador atingir seu objetivo é de 40% em cada salto. Calcule a probabilidade de, em 8 saltos, ele conseguir seu objetivo:

a) em todos;

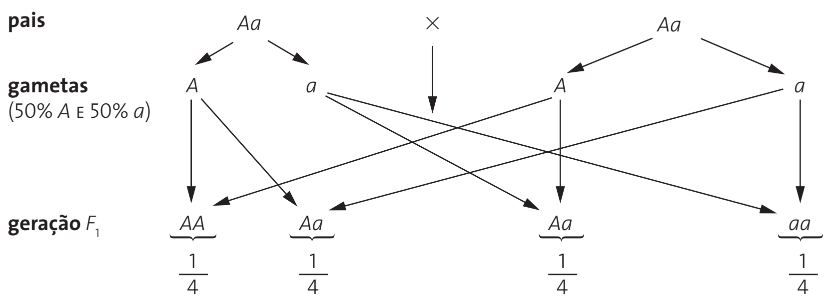
b) em 6 deles.

Amin Mohammad Jamali/Gallo Images/Getty Images

7 Aplicações de probabilidade à Genética

A Genética é, talvez, o ramo da Biologia que mais utiliza os conceitos matemáticos envolvidos na teoria das probabilidades. Isso porque, em probabilidade, trabalhamos com os eventos chamados aleatórios, e um bom exemplo de evento aleatório é o encontro de dois tipos de gametas com determinados genes. Um indivíduo heterozigoto para determinada característica (*Aa*) forma dois tipos de espermatozoides, *A* e *a*. Se uma mulher também for heterozigota, poderá formar óvulos *A* e *a*. Depende apenas do acaso o fato de ser o espermatozoide *A* ou *a* o responsável pela fecundação, assim como também depende apenas do acaso o fato de ser a célula feminina *A* ou *a* a fecundada.

Assim, considere o seguinte esquema:



Para refletir
Pesquise o que significa um “indivíduo heterozigoto” e um “indivíduo homozigoto”.

e o quadro de possibilidades com suas respectivas probabilidades:

♂ \ ♀	***A*** $\longrightarrow \mathbf{\frac{1}{2}}$	***a*** $\longrightarrow \mathbf{\frac{1}{2}}$
A $\longrightarrow \mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{4}$ *AA*	$\frac{1}{4}$ *Aa*
a $\longrightarrow \mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{4}$ *Aa*	$\frac{1}{4}$ *aa*

Exercícios resolvidos

26. Em uma população humana a probabilidade de ser mudo é estimada em 0,005, a probabilidade de ser cego é 0,0085 e a probabilidade de ser mudo e cego é 0,0006. Qual é a probabilidade de que um indivíduo, tomado ao acaso, seja mudo ou cego?

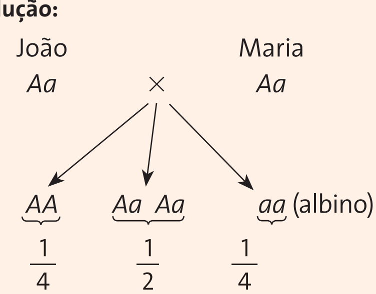
Resolução:

Nesse caso, “ser mudo” não exclui a possibilidade de “ser cego”, portanto os eventos não são mutuamente exclusivos. Logo:

$p(\text{ser mudo ou ser cego}) = p(A \text{ ou } B) =$
$= p(A) + p(B) - p(A \text{ e } B) =$
$= 0{,}0050 + 0{,}0085 - 0{,}0006 = 0{,}0129$

27. João e sua esposa Maria têm pigmentação normal. João é filho de um homem normal e mulher albina; Maria é filha de uma mulher normal e pai albino. Qual é a probabilidade de João e Maria terem uma criança albina do sexo masculino?

Resolução:



Logo:

$p(\text{criança albina}) = \dfrac{1}{4}$ e $p(\text{sexo masculino}) = \dfrac{1}{2}$

Como os eventos "ser criança albina" e "ser do sexo masculino" são independentes, temos:

$p(\text{ser criança albina do sexo masculino}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$ ou 12,5%

28. No ser humano o albinismo é determinado por um gene recessivo *a*, enquanto a pele normal é determinada pelo alelo dominante *A*. Um casal heterozigoto com pigmentação normal teve como primeiro descendente uma criança albina.

Responda:

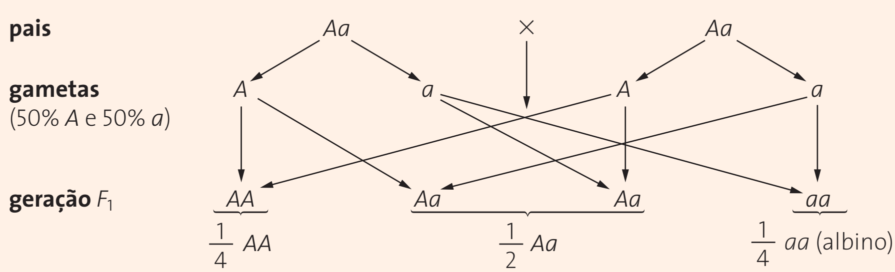
a) Qual é a probabilidade de que seus próximos dois filhos sejam albinos?

b) Qual é a probabilidade de que seus próximos dois filhos tenham pigmentação normal?

c) Qual é a probabilidade de pelo menos um dos seus próximos dois filhos ser albino e menino?

Resolução:

a) O fato de a primeira criança ser albina não influenciará, nesse aspecto, a hereditariedade das futuras crianças. São, pois, eventos independentes.



Assim, a probabilidade de cada criança ser albina em qualquer nascimento é $\dfrac{1}{4}$ ou 25%. Portanto:

$p(\text{segunda criança ser albina}) = \dfrac{1}{4}$

$p(\text{terceira criança ser albina}) = \dfrac{1}{4}$

$p(\text{segunda e terceira crianças serem albinas}) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$ ou 6,2%

b) A probabilidade de que **cada um** dos seus próximos dois filhos, separadamente, tenha pigmentação normal é $\dfrac{3}{4}$ ou 75%, pois:

$\dfrac{1}{4}AA + \dfrac{1}{2}Aa$, ou seja, $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$

Logo:

$p(\text{segunda e terceira crianças terem pigmentação normal}) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$ ou 56%

c) A probabilidade de pelo menos um dos próximos dois filhos ser albino é:

$1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$ ou 43%

Como a probabilidade de ser menino é $\dfrac{1}{2}$, então a probabilidade de pelo menos uma criança ser menino e albina é:

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7}{16} = \dfrac{7}{32}$ ou 21%

29. Em um cruzamento $Aa \times Aa$, sabemos que as combinações AA, Aa, aA e aa são igualmente prováveis, cada uma com probabilidade $\frac{1}{4}$. Sabemos também que Aa e aA não podem ser distinguidas biologicamente. Qual é a probabilidade de ocorrer Aa ou aA?

Resolução:

$p(Aa) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $p(aA) = \frac{1}{4}$

Aa e aA são mutuamente exclusivos, então $p(Aa \cap aA) = 0$. Logo:

$$p(Aa \text{ ou } aA) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

30. A queratose (anomalia na pele) é devida a um gene dominante Q. Uma mulher com queratose cujo pai era normal casa-se com um homem com queratose cuja mãe era normal. Se esse casal tiver 2 filhos, qual é a probabilidade de os dois apresentarem queratose?

Resolução:

mulher $\qquad$ homem

$Qq \times Qq$

$$\underbrace{QQ \quad Qq \quad Qq}_{\frac{3}{4}\ \text{(queratose)}} \qquad \underbrace{qq}_{\frac{1}{4}}$$

Q é dominante $\rightarrow \frac{3}{4}$ (queratose) $\quad \frac{1}{4}$

Assim, p(cada criança ter queratose) $= \frac{3}{4}$. Como o evento "primeira criança ter queratose" é independente do evento "segunda criança ter queratose", temos:

p(as duas crianças terem queratose) =

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \text{ ou } 56\%$$

31. Um casal normal tem um filho albino.

a) Qual é a probabilidade de aparecer na descendência uma filha normal?

b) Se o casal tiver 4 filhos, qual é a probabilidade de 3 serem normais e 1 albino?

Resolução:

Situação genética:

Pai $\qquad$ Mãe

$Aa \times Aa$

$$\underbrace{\frac{1}{4}AA \quad \frac{2}{4}Aa}_{\frac{3}{4}\ \text{normais}} \qquad \underbrace{\frac{1}{4}aa}_{\text{albino}}$$

$A\_\_ = p = \frac{3}{4}$ = normais

$aa = q = \frac{1}{4}$ = albino

a) Filha normal

Probabilidade de ser do sexo feminino $= \frac{1}{2}$

Probabilidade de ser normal $= \frac{3}{4}$

Probabilidade combinada $= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

b) 4 filhos: 3 normais e 1 albino

$(p + q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$

$$4p^3q = 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

$$\text{ou } \binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 4 \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

Exercícios

43. Um casal tem 3 meninos e espera sua quarta criança. Qual é a probabilidade de essa criança ser um menino?

44. Suponhamos que o caráter cor dos olhos seja condicionado por um par de genes. Seja C dominante para olho escuro e c recessivo para olho claro. Um indivíduo de olhos escuros cuja mãe tenha olhos claros casa com uma mulher de olhos claros cujo pai tinha olhos escuros. Qual é a probabilidade de seu primeiro filho ser do sexo masculino e ter olhos escuros?

45. As ovelhas de cor branca têm o genótipo ww em relação a esse caráter; a coloração preta depende do gene W. De um carneiro preto cruzado com uma ovelha branca resultou um cordeiro branco. Qual é a probabilidade de a próxima cria ser branca?

46. Na espécie humana a polidactilia (dedos a mais) é devida a um gene dominante. Quando a mulher é polidáctila, de mãe e pai normais, qual é a probabilidade de que o casal venha a ter descendente polidáctilo?

Outros contextos

Doação de órgãos

Reprodução/<www.abto.org.br/>

De cada 8 potenciais doadores de órgãos, apenas um é notificado. Ainda assim, o Brasil é o segundo país do mundo em número de transplantes realizados por ano, sendo mais de 90% pelo Sistema Público de Saúde. As afirmações abaixo atestam esse resultado:

1. O programa nacional de transplantes tem organização exemplar. Cada Estado tem uma Central de Notificação, Captação e Distribuição de Órgãos (CNCDO) que coordena a captação e a alocação dos órgãos, baseada na fila única, estadual ou regional.
2. Para realizar transplante é necessário credenciamento de equipe no Ministério da Saúde. A maioria destas equipes é liderada por médico com especialização no exterior, obtida graças ao investimento público na formação de profissionais em terapia de alta complexidade.
3. Hoje, mais de 80% dos transplantes são realizados com sucesso, reintegrando o paciente à sociedade produtiva.

Principais dúvidas	
Como poderei ser doador de órgãos após a morte?	Não é necessário deixar nada por escrito, mas é fundamental comunicar à família o desejo da doação, que só se concretiza após a autorização desta, por escrito.
Qual é o "caminho" dos órgãos doados?	Constatada a morte cerebral, o hospital aciona a coordenação hospitalar de transplante, que entrevista a família. Autorizada a doação, a coordenação hospitalar avisa a CNCDO do Estado, que seleciona os receptores e avisa as equipes de transplante para irem ao hospital remover os órgãos do doador e levá-los ao local onde será realizado o transplante.
Quem pode ser doador em vida?	Qualquer cidadão juridicamente capaz, que, nos termos da lei, possa doar órgão ou tecido sem comprometimento de sua saúde e aptidões vitais. Deve ter condições adequadas de saúde e ser avaliado por um médico para realização de exames que afastem doenças as quais possam comprometer sua saúde, durante ou após a doação. Pela lei, parentes até quarto grau e cônjuges podem ser doadores; não parentes, somente com autorização judicial.

Você sabia?

As possibilidades de doação por um corpo humano nas condições ideais, após a constatação da morte encefálica, são: dois rins, dois pulmões, coração, fígado e pâncreas, duas córneas, três válvulas cardíacas, ossos do ouvido interno, cartilagem costal, crista ilíaca, cabeça do fêmur, tendão da patela, ossos longos, fáscia lata, veia safena e pele. Mais recentemente, foram realizados com sucesso transplantes de mãos completas.

Adaptado de: <www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/entendadoacao.pdf> e <http://www.estendaamao.com.br/Content/PDF/guiaDoacao.pdf>. Acessos em: 11 dez. 2012.

Transplante de medula óssea

A medula óssea é um tecido gelatinoso que preenche a cavidade interna dos ossos onde são produzidos os elementos do sangue, como: hemácias, glóbulos e plaquetas. A produção se dá a partir das células-tronco, conhecidas como células-mãe, que possuem capacidade de se dividir originando células muito semelhantes às progenitoras; são uma espécie de "coringa".

Algumas doenças podem afetar a medula óssea ou até mesmo provocar a falência para produzir células sanguíneas. Dentre as doenças podemos citar as leucemias, aplasias de medula e outros tipos de câncer. Algumas têm tratamento e são curáveis através de quimioterapia convencional; outras necessitam de transplante, única medida para a cura.

A doação de medula óssea é um ato de solidariedade e pode ajudar pacientes que têm o transplante como única chance de cura.

No transplante de medula existe uma probabilidade muito maior de haver compatibilidade quando o doador e o receptor são da mesma família. Entre irmãos, as chances de compatibilidade são de 1 para 4. Quando o transplante não acontece entre membros da mesma família, a chance de encontrar um doador compatível é de 1 em cem mil! Por isso, quanto maior o número de doadores cadastrados, maiores as chances dos pacientes.

Trabalhando com o texto

1. Qual é a probabilidade (em porcentagem) de um irmão de um paciente ser um doador compatível de medula óssea?

2. Qual é a probabilidade de um paciente que tem 2 irmãos possuir os dois como doadores compatíveis?

3. Qual é a probabilidade de um paciente com 4 irmãos encontrar pelo menos um doador compatível?

4. Considerando o texto lido e o Brasil com 191 milhões de habitantes, quantos seriam os possíveis doadores brasileiros compatíveis de medula óssea a um turista, sem parentes brasileiros, que vem visitar o Brasil?

Pesquisando e discutindo

5. Quais pessoas não podem doar seus órgãos?

6. Uma pessoa idosa pode doar um de seus rins?

7. Qual é a importância da doação de órgãos? Fique por dentro desse ato de amor e solidariedade. Com os resultados da sua pesquisa, faça cartazes e distribua pela escola e comunidade afim de conscientizar as pessoas sobre esse ato que pode salvar vidas.

Veja mais sobre o assunto

Procure mais informações em jornais, revistas e nos *sites*:

- Associação Brasileira de Transplante de Órgãos: <www.abto.org. br/>;
- Portal da Saúde: <http://portal.saude.gov.br/portal/saude/area.cfm?id_area=1004>;
- Coordenação-geral do Sistema Nacional de Transplantes: <http://dtr2001.saude.gov.br/transplantes/index_gestor.htm>;
- Aliança Brasileira pela Doação de Órgãos e Tecidos: <www.adote.org.br/index.php>;
- Estenda a mão (Doação de órgãos e tecidos): <http://www.estendaamao.com.br/>. Acessos em: 11 dez. 2012.

Leituras

A Matemática da sorte

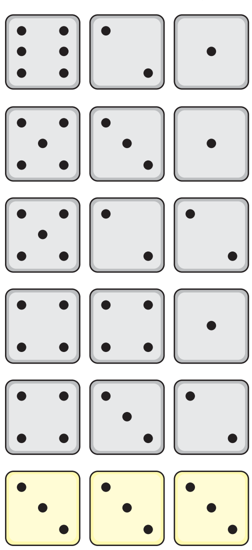
A vida cotidiana está repleta de situações que as pessoas julgam ser de sorte ou de azar. No entanto, independentemente do conhecimento matemático do indivíduo, essas sensações são meramente intuitivas. O cálculo das probabilidades ajuda a explicar tais sensações.

Leia o texto a seguir, publicado na revista *Superinteressante*.

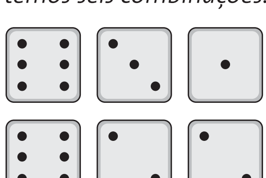
As probabilidades matemáticas mudam de maneiras que nem sempre percebemos – gerando o que chamamos de sorte. No século XVII, o duque da Toscana notou que, quando jogava 3 dados, o número 10 aparecia com mais frequência que o 9. Mas a probabilidade de todos os resultados não deveria ser a mesma? O duque chamou Galileu Galilei para investigar. Veja o que ele descobriu.

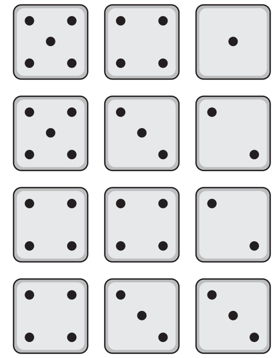
Quando jogamos 3 dados, o número de combinações com as quais podemos obter tanto uma soma de resultado 9 quanto uma de resultado 10 é exatamente o mesmo.

Para o 9, temos seis combinações:

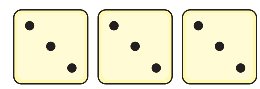


Para o 10, temos seis combinações:





Mas a combinação

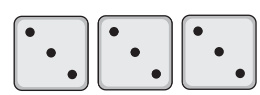


é mais rara do que as outras – porque estatisticamente é mais difícil que os dados caiam todos com o mesmo número (no caso, 3) para cima.

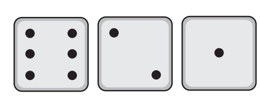
Isso altera a probabilidade das coisas – e faz com que a combinação 10 apareça 8% mais vezes que o 9. Pura matemática.

Superinteressante. São Paulo: Abril, ed. 307, p. 51, ago. 2012.

1. Determine a probabilidade de sair

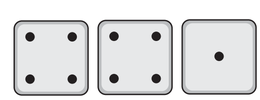


2. Determine a probabilidade de sair



- É importante notar que existe mais de uma ordem possível, aumentando a probabilidade dessa combinação.

3. Determine a probabilidade de sair



- Fique atento às possíveis ordens.

4. Observe as imagens do texto e determine:
   a) Qual é a probabilidade de sair soma 9 jogando-se 3 dados?
   b) Qual é a probabilidade de sair soma 10 jogando-se 3 dados?

Um pouco mais sobre probabilidades

Na abertura deste capítulo vimos que a teoria das probabilidades, como conhecemos hoje, teve seu início nos jogos de azar. Gerônimo Cardano (1501-1576) e Galileu Galilei (1564-1642) estão entre os primeiros matemáticos a analisar, matematicamente, o jogo de dados.

Depois disso, Blaise Pascal (1623-1662), consultado pelo amigo e jogador fanático Chevalier de Méré sobre questões do jogo de dados, manteve correspondência com Pierre de Fermat (1601-1665). Dessa correspondência e de observações de Pascal realizadas em várias situações de jogos de azar é que evoluiu a teoria das probabilidades.


Collection Roger-Viollet/Agence France-Presse

Blaise Pascal


Ann Ronan Picture Library/Agence France-Presse

Pierre de Fermat


Ann Ronan Picture Library/Agence France-Presse

Laplace

Outros matemáticos que se dedicaram, direta ou indiretamente, ao estudo das probabilidades foram: o holandês Christian Huygens (1629-1695), ao qual é atribuído o primeiro livro sobre probabilidades; Abraham de Moivre (1667-1754), francês que viveu na Inglaterra na época de Newton e Halley e escreveu, em 1718, Doutrina das probabilidades; e Jacob Bernoulli (1654-1705).

Mais tarde, Leonhard Euler (1707-1783) e Jean-Baptiste D' Alembert (1717-1783) desenvolveram outros estudos sobre probabilidades, aplicando-os à Economia, às Ciências Sociais e a loterias.

Segundo Carl Boyer, "entre os problemas de loterias que Euler publicou em 1765, o mais simples é o seguinte: suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso; então a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados é $\frac{2 \cdot 3}{n(n-1)}$"*.

Ainda segundo Boyer, "a teoria das probabilidades deve mais a Laplace (1749-1827) que a qualquer outro matemático. A partir de 1774 ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados incorporou no clássico *Théorie analytique des probabilités*, de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis".

Mais recentemente, os nomes de Jules Henri Poincaré (1854-1912), Émile Borel (1871-1956) e John von Neumann (1903-1957) aparecem ligados ao estudo de probabilidades e teoria dos jogos.

Atualmente, a teoria das probabilidades é muito usada na teoria dos jogos, em Estatística, em Biologia, em Psicologia, em Sociologia, em Economia e em pesquisa operacional.

* *História da Matemática*, de Carl B. Boyer. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1974. p. 334.

Pensando no ENEM

1. Os grupos musculares mais trabalhados na musculação são coxas, glúteos, abdominais, peitorais, ombros, bíceps e tríceps. Alice deseja perder peso através da musculação. Então, considerando os exercícios específicos para os músculos citados e a recomendação de que por dia deve-se trabalhar apenas três desses músculos, indique quantas séries distintas de três destes exercícios ela poderá fazer se deseja trabalhar em cada série sempre a coxa ou o abdômen.
   a) 35
   b) 15
   c) 10
   d) 25
   e) 20

2. As máquinas automáticas de venda foram construídas inicialmente para a venda de refrigerantes e tornaram-se populares em todo o mundo. A maior diversidade dessas máquinas é encontrada no Japão, onde elas são empregadas na venda não somente de refrigerantes, mas de numerosos produtos, de ovos a comida para peixe.

Sanchome/Flick

Esta máquina de venda de refrigerantes vira-se para chamar a atenção do cliente. Ela fica na estação de Shibuya, próximo a Tóquio.

   Suponha que o preço do refrigerante em uma dessas máquinas custe R$ 3,50, e a máquina aceite apenas moedas de R$ 1,00 e R$ 0,50. Se você tiver na carteira R$ 5,00 em moedas idênticas de R$ 1,00 e R$ 4,00 em moedas idênticas de R$ 0,50, quantas sequências de moedas podem ser usadas para comprar o refrigerante?
   Considere diferentes as sequências (R$ 0,50; R$ 1,00; R$ 1,00; R$ 1,00) e (R$ 1,00; R$ 0,50; R$ 1,00; R$ 1,00).
   a) 20
   b) 10
   c) 6
   d) 16
   e) 21

3. Doze amigos foram acampar e levaram 3 barracas, sendo uma para 3 pessoas, outra para 4 pessoas e a última para 5 pessoas. Entre as doze pessoas estavam os irmãos Ivanildo, de 29 anos, e Rosinha, de 24 anos. Como Ivanildo era o mais velho, seu pai pediu a ele que cuidasse bem da irmã e que dormissem na mesma barraca. Quantas seriam as maneiras de distribuir as 12 pessoas nas três barracas para que o pedido do pai fosse atendido?
   a) 1 260
   b) 9 240
   c) 2 520
   d) 7 980
   e) 3 360

4. Quando se deseja abrir uma loja em determinado bairro da cidade, deve-se fazer uma “pesquisa de mercado”, que vai gerar um banco de dados indicando a viabilidade da implantação da loja em tal bairro. Um empresário decide montar uma loja em uma cidade e faz “pesquisas de mercado” sobre a viabilidade da loja em quatro bairros.
   O resultado apontou que a probabilidade de que a loja obtivesse sucesso no bairro *A* seria de 45%; no bairro *B*, de 53%; no bairro *C*, de 70%; e no bairro *D*, de 65%. Após a implantação, foi constatado que a loja não obteve sucesso. Qual a probabilidade aproximada de o empresário ter escolhido o bairro *C*?
   a) 27%
   b) 33%
   c) 18%
   d) 25%
   e) 15%

5. Em um jogo de tabuleiro o jogador lança simultaneamente dois dados de seis faces para movimentar o seu peão nas casas do tabuleiro. Se o jogador tirar números repetidos nos dois dados, ele movimenta o seu peão e ainda poderá jogar novamente. Caso essa coincidência aconteça 3 vezes consecutivas o jogador deverá colocar o seu pião na casa denominada prisão.
   Na vez de determinado jogador, qual é a probabilidade de o peão dele ir para a prisão?
   a) Maior do que 50%.
   b) Igual a $\frac{1}{18}$.
   c) Aproximadamente 30%.
   d) Menor do que 20%.
   e) Igual a $\frac{1}{216}$.

6. (Enem) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Veja a seção **Caiu no Enem** no final do livro.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

7. (Enem)

O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de S.Paulo. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14 c) 20 e) 23

b) 18 d) 21

8. (Enem) Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;

2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;

3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;

4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

a) Azul.

b) Amarela.

c) Branca.

d) Verde.

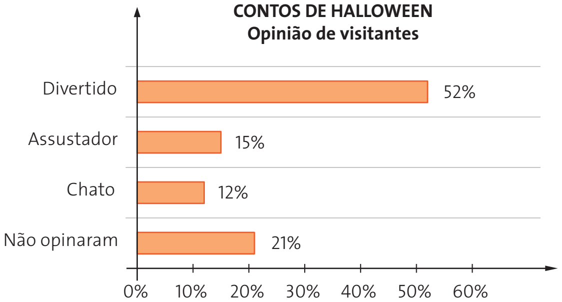
e) Vermelha.

9. (Enem) Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween".

Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em "Divertido", "Assustador" ou "Chato".

Ao final de uma semana, o *blog* registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do *blog* irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween".

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por:

a) 0,09.

b) 0,12.

c) 0,14.

d) 0,15.

e) 0,18.

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. (Ufac) A quantidade de números inteiros múltiplos de 5, formados por três algarismos distintos, é:
   a) 120.
   b) 150.
   c) 180.
   d) 136.
   e) 144.

2. (Ufam) A senha de acesso a um jogo de computador consiste em quatro caracteres alfabéticos ou numéricos, sendo o primeiro necessariamente alfabético. O número de senhas possíveis será:
   a) $10 \cdot 36^2$.
   b) 26^4.
   c) 36^4.
   d) $26 \cdot 36^3$.
   e) $10 \cdot 26^3$.

3. (UFT-TO) Quando se jogam dois dados, tanto o número 6 quanto o número 7, por exemplo, podem ser obtidos de três maneiras distintas:
   - (5, 1), (4, 2), (3, 3) para o 6; e
   - (6, 1), (5, 2), (4, 3) para o 7.

   Na prática, porém, segundo Galileu, a chance de se obter 6 é menor que a de se obter 7, porque as permutações dos pares devem ser consideradas no cálculo das probabilidades.
   Com base no raciocínio de Galileu, é correto afirmar que, nesse caso, a probabilidade de se obter o número 6 e a probabilidade de se obter o número 7 são, respectivamente, de:
   a) $\frac{5}{36}$ e $\frac{1}{6}$.
   b) $\frac{1}{18}$ e $\frac{1}{12}$.
   c) $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{12}$.
   d) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

Região Nordeste

4. (Unifor-CE) Considere todos os anagramas da palavra FORTAL. Supondo que cada anagrama seja uma palavra, então, colocando todas as palavras obtidas em ordem alfabética, a que ocupará a 244ª posição é:
   a) ATLORF.
   b) FALTOR.
   c) LAFRTO.
   d) LAFROT.
   e) LFAORT.

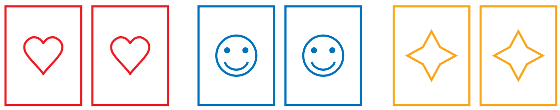
5. *Biologia*
   (UFPE) O vírus X aparece nas variantes X_1 e X_2. Se um indivíduo tem esse vírus, a probabilidade de ser a variante X_1 é de $\frac{3}{5}$. Se o indivíduo tem o vírus X_1, a probabilidade de esse indivíduo sobreviver é de $\frac{2}{3}$; mas, se o indivíduo tem o vírus X_2, a probabilidade de ele sobreviver é de $\frac{5}{6}$. Nessas condições, qual a probabilidade de o indivíduo portador do vírus X sobreviver?
   a) $\frac{1}{3}$.
   b) $\frac{7}{15}$.
   c) $\frac{3}{5}$.
   d) $\frac{2}{3}$.
   e) $\frac{11}{15}$.

Região Centro-Oeste

6. (UFMS) Dispomos de quatro cores para colorir os vértices de um retângulo. Sabendo-se que os vértices adjacentes não podem ter a mesma cor, então, pode-se colorir os vértices do retângulo de L maneiras distintas, onde L vale:
   a) 48.
   b) 64.
   c) 72.
   d) 84.
   e) 102.

7. (UEMT) Existem 6 caminhos diferentes ligando as escolas E_1 e E_2 e 4 caminhos diferentes ligando E_2 e E_3. Os trajetos diferentes que podem ser utilizados para ir de E_1 a E_3 passando por E_2 são:
   a) 10 caminhos.
   b) 15 caminhos.
   c) 12 caminhos.
   d) 24 caminhos.
   e) 360 caminhos.

8. (UFG-GO) Um jogo de memória é formado por seis cartas, conforme as figuras que seguem:



Após embaralhar as cartas e virar as suas faces para baixo, o jogador deve buscar as cartas iguais, virando exatamente duas. A probabilidade de ele retirar, ao acaso, duas cartas iguais na primeira tentativa é de:

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{1}{4}$.

d) $\frac{1}{5}$.

e) $\frac{1}{6}$.

Região Sudeste

9. (PUC-RJ) Se $\frac{n!}{(n+2)!+(n+1)!}=\frac{1}{48}$, então:

a) $n = 2$.
b) $n = 12$.
c) $n = 5$.
d) $n = 7$.
e) $n = 10$.

10. (Unicamp-SP) De quantas maneiras podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par? Justifique sua resposta.

11. *Biologia*
(Vunesp-SP) Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal *A* e 11 por uma parasitose intestinal *B*, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de *A* e *B*. Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra. Determine a probabilidade de que, dessa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por *A* e a segunda por *B*.

Região Sul

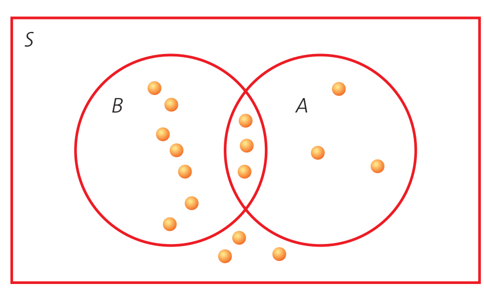
12. (UEL-PR) Um professor entrega 8 questões aos alunos para que, em uma prova, escolham 5 questões para resolver, sendo que duas destas questões são obrigatórias. Ao analisar as provas, o professor percebeu que não havia provas com as mesmas 5 questões. Assim, é correto afirmar que o número máximo de alunos que entregou a prova é:

a) 6.
b) 20.
c) 56.
d) 120.
e) 336.

13. (PUC-RS) O número de anagramas da palavra CONJUNTO que começam por **C** e terminam por **T** é:

a) 15.
b) 30.
c) 180.
d) 360.
e) 720.

14. (UEL-PR) No diagrama a seguir, o espaço amostral *S* representa um grupo de amigos que farão uma viagem. O conjunto *A* indica a quantidade de pessoas que já foram a Maceió e o conjunto *B*, a quantidade de pessoas que já foram a Fortaleza.



A empresa de turismo que está organizando a viagem fará o sorteio de uma passagem gratuita. Considerando que a pessoa sorteada já tenha ido para Fortaleza, assinale a alternativa que indica a probabilidade de que ela também já tenha ido para Maceió.

a) 18,75%.
b) 30%.
c) 33,33%.
d) 50%.
e) 60%.

Caiu no Enem

Unidade 2

1. (Enem) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4 × 4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir

	1º Bimestre	**2º Bimestre**	**3º Bimestre**	**4º Bimestre**
Matemática	5,9	6,2	4,5	7,7
Português	6,6	7,1	6,5	9,0
Geografia	8,6	6,8	7,8	8,4
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

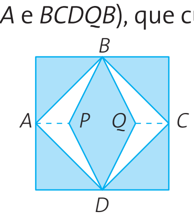
Unidade 3

2. (Enem) Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida R do raio adequado para a plataforma em termos da medida L do lado da base da estátua.

Qual relação entre R e L o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

a) $R \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$
b) $R \geq \frac{2L}{\pi}$
c) $R \geq \frac{L}{\sqrt{\pi}}$
d) $R \geq \frac{L}{2}$
e) $R \geq \frac{L}{2\sqrt{2}}$

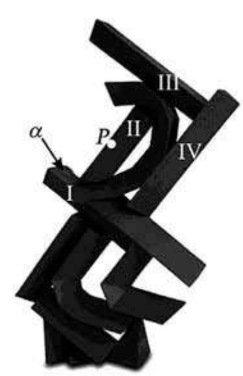
3. (Enem) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.
Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões $ABPDA$ e $BCDQB$), que custa R\$ 50,00 o m².



De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R\$ 22,50
b) R\$ 35,00
c) R\$ 40,00
d) R\$ 42,50
e) R\$ 45,00

4. (Enem) Suponha que na escultura do artista Emanoel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triângulo congruente ao triângulo base dos prismas.
Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.



Disponível em: <www.escritoriodearte.com.br>. Acesso em: 28 jul. 2009.

Imagine um plano paralelo à face α do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A intersecção desse plano imaginário com a escultura contém:

a) dois triângulos congruentes com lados correspondentes paralelos.

b) dois retângulos congruentes e com lados correspondentes paralelos.

c) dois trapézios congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

d) dois paralelogramos congruentes com lados correspondentes paralelos.

e) dois quadriláteros congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

5. (Enem) Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal. Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

a) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a intersecção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.

b) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

c) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a intersecção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa intersecção tem 5 lados.

d) O número de lados de qualquer polígono obtido como intersecção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.

e) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

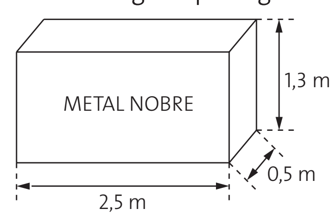
6. (Enem) Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13 824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a:

a) 4. c) 16. e) 32.
b) 8. d) 24.

7. (Enem) Uma fábrica produz barras de chocolate no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a:

a) 5 cm. d) 24 cm.
b) 6 cm. e) 25 cm.
c) 12 cm.

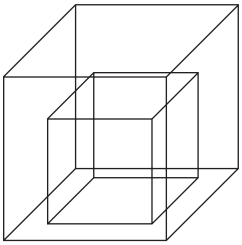
8. (Enem) A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza:

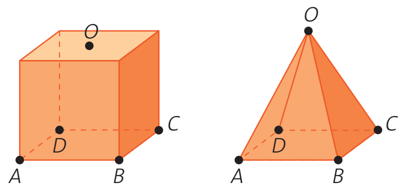
a) massa. d) capacidade.
b) volume. e) comprimento.
c) superfície.

9. (Enem) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.
O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:



a) 12 cm^3.
b) 64 cm^3.
c) 96 cm^3.
d) 1 216 cm^3.
e) 1 728 cm^3.

10. (Enem) Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.



Os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *O* do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto *O* é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de *O* em direção às arestas *AD*, *BC*, *AB* e *CD*, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são:

a) todos iguais.

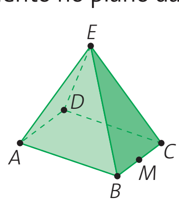
b) todos diferentes.

c) três iguais e um diferente.

d) apenas dois iguais.

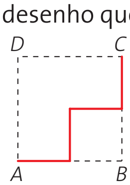
e) iguais dois a dois.

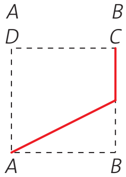
11. (Enem) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

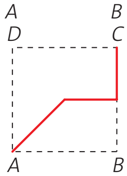


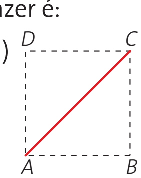
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto *A* ao ponto *E*, a seguir do ponto *E* ao ponto *M*, e depois de *M* a *C*.

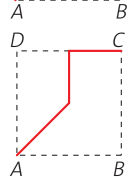
O desenho que Bruno deve fazer é:

a)


b)


c)


d)


e)


12. (Enem) A cerâmica possui a propriedade da contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo “espaços vazios” que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, consequentemente, o conjunto tende a retrair-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Disponível em: <www.arq.ufsc.br>.
Acesso em: 30 mar. 2012 (adaptado).

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume *V* de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta *a*, diminui para um valor que é:

a) 20% menor que *V*, uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.

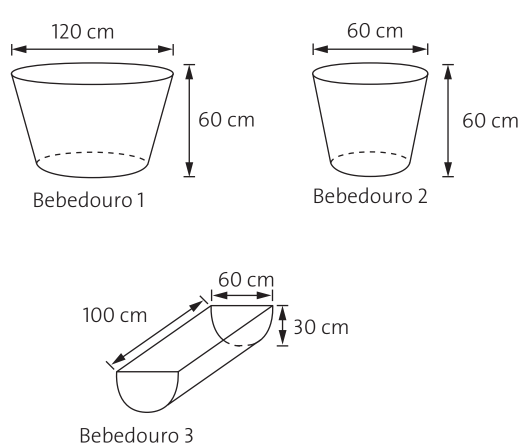
b) 36% menor que *V*, porque a área da base diminui de a^2 para $((1 - 0{,}2)\ a)^2$.

c) 48,8% menor que *V*, porque o volume diminui de a^3 para $(0{,}8\ a)^3$.

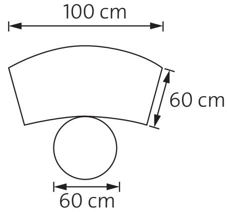
d) 51,2% menor que *V*, porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.

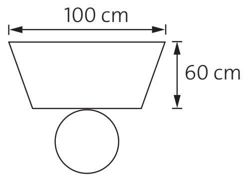
e) 60% menor que *V*, porque cada lado diminui 20%.

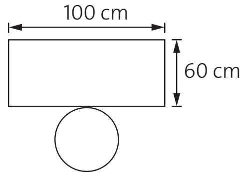
13. (Enem) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.

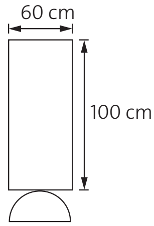


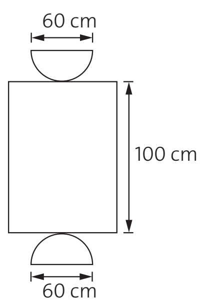
Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

a) 

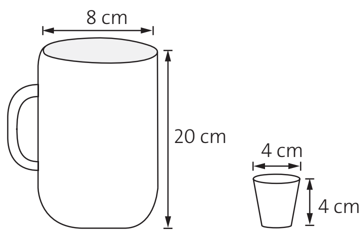
b) 

c) 

d) 

e) 

14. (Enem) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá:

a) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
b) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
c) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
d) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
e) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

15. (Enem) No manejo sustentável de florestas, é preciso muitas vezes obter o volume da tora que pode ser obtida a partir de uma árvore. Para isso, existe um método prático, em que se mede a circunferência da árvore à altura do peito de um homem (1,30 m), conforme indicado na figura. A essa medida denomina-se "rodo" da árvore. O quadro a seguir indica a fórmula para se *cubar*, ou seja, obter o volume da tora em m^3 a partir da medida do rodo e da altura da árvore.

O volume da tora em m^3 é dado por

$$V = rodo^2 \times altura \times 0{,}06$$

O rodo e a altura da árvore devem ser medidos em metros. O coeficiente 0,06 foi obtido experimentalmente.

Um técnico em manejo florestal recebeu a missão de cubar, abater e transportar cinco toras de madeira, de duas espécies diferentes, sendo:

- 3 toras de espécie I, com 3 m de rodo, 12 m de comprimento e densidade 0,77 toneladas/m^3;
- 2 toras de espécie II, com 4 m de rodo, 10 m de comprimento e densidade 0,78 toneladas/m^3.

Após realizar seus cálculos, o técnico solicitou que enviassem caminhões para transportar uma carga de, aproximadamente:

a) 29,9 toneladas.

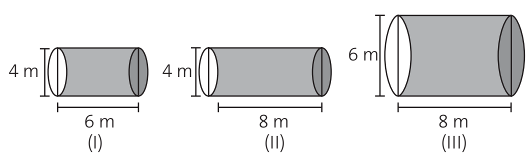
b) 31,1 toneladas.

c) 32,4 toneladas.

d) 35,3 toneladas.

e) 41,8 toneladas.

16. (Enem) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.



Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (Considere $\pi = 3$.)

a) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.

b) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

c) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

d) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

e) III, pela relação área/capacidade de armazenamento $\frac{7}{12}$.

17. (Enem) Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível) foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a:

a) R$ 230,00.

b) R$ 124,00.

c) R$ 104,16.

d) R$ 54,56.

e) R$ 49,60.

18. (Enem) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taça fosse igual.

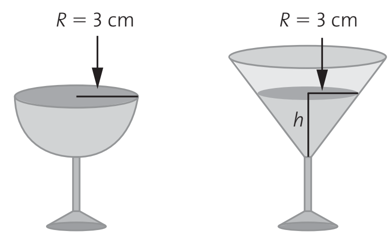


Figura 1 Figura 2

Considere:

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de:

a) 1,33.

b) 6,00.

c) 12,00.

d) 56,52.

e) 113,04.

19. (Enem) A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dele cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Revista *Veja*. Ano 41, n. 25, 25 jun. 2008 (adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

a) 406

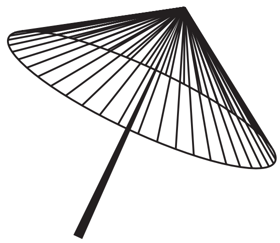
b) 1 334

c) 4 002

d) 9 338

e) 28 014

20. (Enem) A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.



Disponível em: <http://mdmat.psico.ufrgs.br>. Acesso em: 1º maio 2010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:
a) pirâmide.
b) semiesfera.
c) cilindro.
d) tronco de cone.
e) cone.

21. (Enem) É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

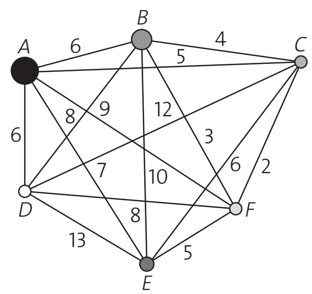
Ciência Hoje das Crianças. FNDE; Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$).
a) 20 mℓ.
b) 24 mℓ.
c) 100 mℓ.
d) 120 mℓ.
e) 600 mℓ.

Unidade 4

22. (Enem) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo *A*. Em seguida, entre os times do Grupo *A*, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo *A* e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:
a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.

23. (Enem) João mora na cidade *A* e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto *ABCDEFA*, informa que ele sairá da cidade *A*, visitando as cidades *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, nesta ordem, voltando para a cidade *A*. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos *ABCDEFA* e *AFEDCBA* têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min 30 s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.
O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de:
a) 60 min.
b) 90 min.
c) 120 min.
d) 180 min.
e) 360 min.

24. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é:

a) 24.

b) 31.

c) 32.

d) 88.

e) 89.

25. (Enem) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R$ 1,50.

Disponível em: <www.caixa.gov.br>. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente:

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor.

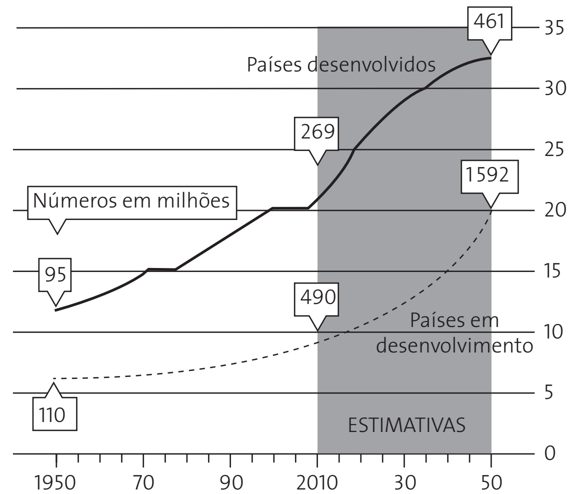
b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor.

c) 4 vezes menor.

d) 9 vezes menor.

e) 14 vezes menor.

26. (Enem) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna à direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: "Perspectivas da população mundial", ONU, 2009. Disponível em: <www.economist.com>. Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de:

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{7}{20}$.

c) $\frac{8}{25}$.

d) $\frac{1}{5}$.

e) $\frac{3}{25}$.

27. (Enem) Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por 3, 4, 6, 8 ou 10 doses do medicamento, de acordo com o risco que o paciente pretende assumir. Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente?

a) 3 doses

b) 4 doses

c) 6 doses

d) 8 doses

e) 10 doses

28. (Enem) A figura I mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade *A* com a cidade *B*. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto *C* ao ponto *B*, passando pela estrada *E*4, e de 50%, quando se passa por *E*3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

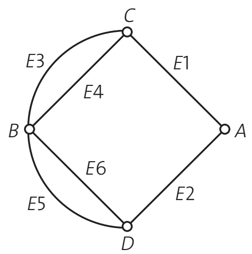


Figura I

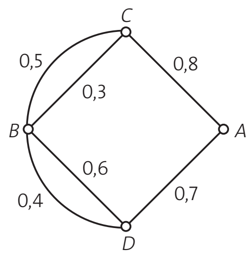


Figura II

Paula deseja se deslocar da cidade *A* para a cidade *B* usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é:

a) *E*1*E*3.

b) *E*1*E*4.

c) *E*2*E*4.

d) *E*2*E*5.

e) *E*2*E*6.

29. (Enem) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \times (0{,}2\%)^4$

b) $4 \times (0{,}2\%)^2$

c) $6 \times (0{,}2\%)^2 \times (99{,}8\%)^2$

d) $4 \times (0{,}2\%)$

e) $6 \times (0{,}2\%) \times (99{,}8\%)$

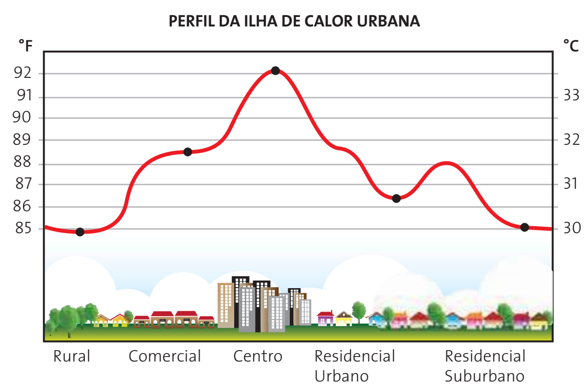
30. (Enem) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{14}$

31. (Enem) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica referia-se às temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31 °C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Fonte: EPA

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

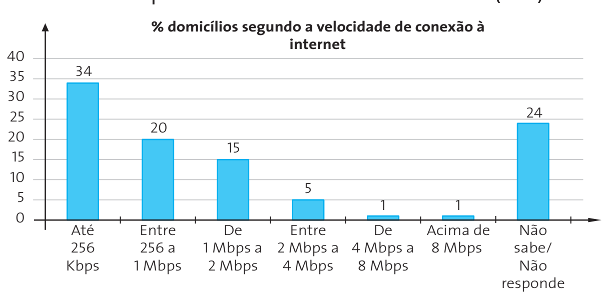
32. (Enem) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida).

O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas.

Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada.
Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é:

a) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
b) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
c) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
d) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.
e) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

33. (Enem) O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Disponível em: <http://agencia.ipea.gov.br>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

a) 0,45
b) 0,42
c) 0,30
d) 0,22
e) 0,15

34. (Enem) Todo o país passa pela primeira fase da campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil pessoas no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas de Vacinação	Público-Alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 a 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 a 39 anos	50

Disponível em: <http://img.terra.com./br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

a) 8%.
b) 9%.
c) 11%.
d) 12%.
e) 22%.

35. (Enem) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.
Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Respostas

UNIDADE 1 Trigonometria

Capítulo 1 • Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer

1. $\ell = 10\sqrt{3}$ m
2. a) $x = 8\sqrt{2}$ b) $y = 20\sqrt{3}$
3. 12,5 cm
4. $|\vec{v}_x| = 5\sqrt{3}$ cm e $|\vec{v}_y| = 5$ cm
5. 30°
6. $\overline{CD} \simeq 3{,}9$ cm
7. $A \simeq 4{,}8$ cm^2
8. 21,6 m
9. a) $w = 50\sqrt{3}$
   b) $x = 24$; $y = 16\sqrt{3}$ e $z = 8\sqrt{3}$
10. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$
    b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
11. a) 0 b) 0
12. $x = 100\sqrt{2}$
13. $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
14. a) $x = 5\sqrt{3}$ b) $x = 4\sqrt{2}$
15. $a = \sqrt{2}$
16. a) $x \simeq 9{,}151$ c) $x \simeq 45°$
    b) $x \simeq 5{,}959$

Resolução passo a passo

5. a) $(8 - \sqrt{3})$ km ou aproximadamente 3,9 km

17. $x = \sqrt{7}$
18. $x = 7$
19. $a = \sqrt{3}$
20. $c = 4$
21. $\cos \alpha = \frac{1}{9}$
22. 14 cm
23. $2\sqrt{17}$
24. $BD = 2\sqrt{39}$ cm; $AC = 2\sqrt{109}$ cm
25. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$
26. $R = 4\sqrt{19}$ N
27. $r\sqrt{2(1 - \cos 36°)}$
28. $\alpha = 62°$; $x = 4{,}13$; $y = 4{,}76$
29. 5,459 km ou 5 459 m.
30. 111,6 km
31. Aproximadamente 26,5 m/s.
32. **c**

Outros contextos

1. 12,5%

Capítulo 2 • Conceitos trigonométricos básicos

1. a) $\frac{\pi}{3}$ rad e) $\frac{2\pi}{3}$ rad
   b) $\frac{\pi}{4}$ rad f) $\frac{5\pi}{6}$ rad
   c) $\frac{7\pi}{6}$ rad g) $\frac{3\pi}{2}$ rad
   d) $\frac{5\pi}{3}$ rad h) $\frac{3\pi}{4}$ rad
2. a) 30° d) 150°
   b) 90° e) 225°
   c) 45° f) 240°
3. 5 rad
4. $\simeq 1{,}57$ cm
5. a) 1,2 rad b) $\frac{2\pi}{3}$ rad
6. $\simeq 15{,}7$ cm

Resolvido passo a passo

5. a) I) giro de 360°: volta completa.
   II) giro de 540°: 1 volta e meia.
   III) giro de 720°: 2 voltas completas.

7. a) $60° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
   b) $120° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
   c) $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
   d) $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
8. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
   b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
   c) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
   d) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
   e) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
   f) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
9. a) 60° e) $\frac{4\pi}{3}$ rad
   b) 60° f) $\frac{\pi}{2}$ rad
   c) 320°
   d) $\frac{3\pi}{2}$ rad
10. a) 315°
    b) $\frac{\pi}{2}$ cm
    c) 130°
    d) $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
11. **d**
12. a) 200 grados; 400 grados
    b) No 3º quadrante.
    c) $\frac{200}{\pi}$ grados
    d) 0,9°

Para refletir

Página 27

Terão a mesma medida, mas não terão o mesmo comprimento.

Página 28

Aproximadamente 57°.

Página 31

- Porque os arcos são considerados com medidas positivas, negativas ou nulas.
- $B(0, 1)$; $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$

Página 32

$\frac{\pi}{4}$ e $\frac{17\pi}{4}$ ou 45° e 765°

Página 35

Um número positivo ou zero.

Capítulo 3 • Funções trigonométricas

1. a) 3º quadrante
   b) 1º quadrante
   c) 4º quadrante
2. a) 3º ou 4º quadrante
   b) 2º ou 3º quadrante
   c) 1º ou 4º quadrante
   d) 1º ou 2º quadrante
3. $\cos x = -\frac{4}{5}$

4. a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$

5. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$

6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) -1 f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. a) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in Z$

b) $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

8. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) -1 h) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. a) 0 b) 0 c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) Não é definida. e) 1 f) $\sqrt{3}$ g) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $-\sqrt{3}$ i) -1 j) $\sqrt{3}$ k) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ l) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$

11. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\right\}$

12. -1

13. a) $\{m \in \mathbb{R} \mid 3 \leq m \leq 4\}$

b) $\left\{m \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq m \leq 1\right\}$

c) $\left\{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}\right\}$

d) $\left\{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leq m \leq \frac{1}{2}\right\}$

14. a) $\{m \in \mathbb{R} \mid -3 \leq m \leq -2\}$

b) $\left\{m \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} \leq m \leq -1\right\}$

c) $\left\{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}\right\}$

d) $\left\{m \in \mathbb{R} \mid 1 \leq m \leq \frac{7}{5}\right\}$

15. a) $f(\pi) = 0; g(\pi) = -1;$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2};$

$\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{g\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}; f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$g\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

c) Não existe, porque nesse intervalo sen $x > 0$ e cos $x < 0$.

16. a) $y_{máx} = -9; y_{min} = -11$

b) $y_{máx} = 16 ; y_{min} = -4$

c) $y_{máx} = 4; y_{min} = 1$

d) $y_{máx} = \sqrt{2} ; y_{min} = -\sqrt{2}$

17. 3

Resolvido passo a passo

5. a) 18h b) 6h c) 14h e 22h

Matemática e tecnologia

1. a) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

b) $p = 2\pi$

c) 2 pontos.

2. a) Promove a translação vertical do gráfico.

b) Promove a dilatação (ou compressão) vertical do gráfico.

c) Altera o período da função, comprimindo ou dilatando o gráfico na horizontal.

d) Promove a translação horizontal do gráfico

e) Função cosseno ($y = \cos x$).

18. a) 0

b) 2

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\mathbb{R}$

e) $[0, 2]$

f) $x = \frac{\pi}{8}$ ou $\frac{5\pi}{8}$ ou $\frac{9\pi}{8}$ ou $\frac{13\pi}{8}$

19. a) $D(f) = \mathbb{R}; Im(f) = [-1, 1]; p = \frac{2\pi}{3}$

b) $D(f) = Im(f) = [0, 1]; p = \pi$

c) $D(f) = \mathbb{R}, Im(f) = [-2, 2], p = 2\pi$

20. a) $\frac{2\pi}{7}$ b) π c) π d) 1 e) 2

21. **d**

22. **d**

23. **c**

24. $V(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

25. $h(x) = 0{,}3 \cdot \text{sen}(\pi x)$

26. $A = 2; \omega = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = -\frac{3\pi}{2}$

Para refletir

Página 38

Notável: digno de ser notado, de atenção.

Página 46

Como $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$x = 0 + 2k\pi \Rightarrow \text{sen } x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \text{sen } x = 1$

$x = \pi + 2k\pi \Rightarrow \text{sen } x = 0$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \text{sen } x = -1$

Página 48

Como $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$\cos(0 + 2k\pi) = 1; \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0;$

$\cos(\pi + 2k\pi) = -1;$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$

Capítulo 4 • Relações trigonométricas

1. a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3};$

$\cot x = -\sqrt{3} ; \sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3};$

$\csc x = -2$

b) $\text{sen } x = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \tan x = 2\sqrt{2};$

$\cot x = \frac{\sqrt{2}}{4}; \sec x = 3;$

$\csc x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$\tan x = 1; \cot x = 1; \sec x = -\sqrt{2}$

d) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \cos x = \pm\frac{1}{2} ;$

$\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} ; \sec x = 2;$

$\csc x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. $-\frac{36}{25}$

3. a) $y = \sec x$

b) $y = 1$

4. $A = \frac{1}{2}$

9. a) $\sqrt{3} - 2$ b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ d) $2 + \sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ f) $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

10. $\text{sen}(a + b) = \frac{56}{65}$;

$\cos(a - b) = \frac{63}{65}$;

$\tan(a + b) = -\frac{56}{33}$

11. $\frac{3}{7}$

12. **c**

> **Resolvido passo a passo**
>
> 5. a) $60(2k^2 - 1) \leqslant d \leqslant 70k$

13. $\text{sen}\, x = 2mn$; $\cos 2x = n^2 - m^2$;

$\tan 2x = \frac{2mn}{n^2 - m^2}$

14. $\frac{8}{15}$

15. $\text{sen}\, 2a = \frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos 2a = \frac{1}{9}$;

$\tan 2a = 4\sqrt{5}$

16. $\sec x$

17. $\frac{2}{3}$

20. Aproximadamente 3,6.

> **Resolvido passo a passo**
>
> 5. a) 78,5° ou 281,5°

21. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

22. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}\right\}$

g) $S = \left\{\frac{-15\pi}{8}, \frac{-9\pi}{8}, \frac{-7\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$

h) $S = \varnothing$

23. a) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

f) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

24. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$

25. $S = \varnothing$

26. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

27. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

29. **b**

Pensando no Enem

1. **b**
2. **b**
3. **b**
4. **d**
5. **c**
6. **b**
7. **d**

Vestibulares de Norte a Sul

1. **a**
2. **b**
3. **a**
4. **d**
5. **a**
6. a) Verdadeiro.
   b) Verdadeiro.
   c) Verdadeiro.
   d) Falso.
   e) Falso.
7. **a**
8. $AB = \sqrt{14\,900 - 14\,000 \cos \alpha}$ cm
9. **d**
10. 1) Correto.
    2) Correto.
    3) Correto.
11. **d**
12. a) 10 cm
    b) $\frac{10\pi}{3}$ cm
13. **d**
14. 28 m
15. **e**
16. **e**
17. **b**
18. **b**
19. **d**
20. **d**

Para refletir

Página 58

- **a** e **b**: diferentes e **c**: iguais.
- 18°

UNIDADE 2 Matrizes, determinantes e sistemas lineares

Capítulo 5 • Matrizes e determinantes

1. $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 8 \\ 5 & 7 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

2. a) As notas de Ana em cada matéria.
   b) As notas de cada aluno em Física.
   c) A nota de Beatriz em Química.

3. $a_{11} = 2$; $a_{22} = -5$; $a_{13} = 10$

4. a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}$

   b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \\ 17 & 16 \\ 31 & 30 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 25 & 23 & 21 \end{bmatrix}$

6. 18

7. $a = 6, b = 3, c = -4$ e $d = -2$

8. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $m = 0$ e $n = 1$

10. $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{3}$

11. a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

12. $A + B = B + A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$

13. a) $A - B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -12 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 20 & 6 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

15. $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -12 & -2 \end{bmatrix}$

17. a) $A^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $C^t = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $D^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

18. a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

19. a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 29 \end{bmatrix}$

20. a) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

21. a) $\begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 67 & 89 \\ 122 & 104 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 90 & 110 \\ 150 & 140 \end{pmatrix}$; total de *downloads* dos dois jogos nos dois dias.

d) $\begin{pmatrix} 44 & 68 \\ 94 & 68 \end{pmatrix}$; quantidade de *downloads* que foi feita a mais no dia 24 de outubro.

e) $C = 0{,}1 \cdot (A + B)$

Resolvido passo a passo

5. a) A matriz D não mudaria, e a matriz M precisaria apenas de uma nova linha contendo as quantidades de vitamina C por grama de frutas, leite e cereais.

22. a) V b) V c) F d) V

23. a) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

25. a) F b) F

26. a) $\begin{pmatrix} 19 & 19 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

27. Não.

28. a) A b) A

29. a) $\begin{pmatrix} 17 & 39 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 15 & 0 \\ 12 & 30 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 29 & 24 \\ 23 & 22 \\ 26 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 24 & 9 & 27 \\ 4 & 13 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -3 & 17 \\ -7 & -8 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 59 & 12 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

30. 215 eixos para janeiro e 154 para fevereiro; 430 rodas para janeiro e 308 para fevereiro.

31. a) 10 d) $a^2 - b^2$

b) 2 e) sen $(x + y)$

c) 0 f) $\cos^2 a - \text{sen}^2\, a$

32. a) 57 d) -24

b) 1 e) -413

c) $ab - a^2$ f) 280

33. 0

34. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -20 & -2 \end{bmatrix}$

d) 2

e) 2

f) 3

g) -18

h) 5

i) 6

j) 6

35. -40

36. a) $S = \{6\}$

b) $S = \{1, 2\}$

37. a) 1 b) 1

38. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0

39. a) 10 b) 25 c) 8

40. 1

41. a) Sim. b) Não. c) Sim.

42. I_3

43. a) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

44. a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 1

45. $\frac{1}{3}$

46. a) (4, 2), (8, 1), (8, 4)

b) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

47. a) $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -8 & -6 & -6 & -8 \\ -3 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 & 5 & 4{,}5 \\ -3 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 7 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

50. a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

51. b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

52. b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

53. a) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

54. c) A': $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

B': $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

C': $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

56. a) 4 unidades de área.

b) 12 unidades de área; 8 unidades de área.

c) Área de A': 3 × área de A e Área de B': 2 × área de B

57. a) Ela fica "espichada" ("esticada") na direção positiva do eixo Ox se k é positivo e na direção negativa do eixo Ox se k é negativo.

b) A área de uma figura transformada é k vezes a área da figura original.

Outros contextos

1. O calendário é organizado em forma de tabela e pode ser representado por uma matriz.

3. 24 anos bissextos.

4. **c**

Para refletir

Página 76

Porque tem 3 linhas e 3 colunas.

Página 77

Porque os elementos estão dispostos em uma linha. Porque os elementos estão dispostos em uma coluna.

Página 81

- Paulo; Rodolfo .
- Germano.

Página 85

Significa "em ordem", da primeira à última.

Página 87

Cada elemento de AB é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B e somando-se os produtos obtidos.

Página 95

- 1

Capítulo 6 • Sistemas lineares

1. a) $x = 3; y = 2$ c) $x = -1; y = 3$

b) $y = 4; x = -2$ d) $y = 3; x = 3$

2. a) A e) B h) A

b) A f) A i) A

c) A g) B

d) B j) A

3. a) Sim. b) Não.

4. a) Sim. b) Sim.

5. 2

6. 3

7. a) Sim. b) Sim. c) Não.

8. a) $S = \varnothing$; sistema impossível.

b) $S = \{(-2, 3)\}$; sistema possível e determinado.

c) O par $\left(\alpha, \dfrac{\alpha - 3}{2}\right)$ é a solução geral do sistema; sistema possível e indeterminado.

10. a) Sistema determinado.

b) Sistema não determinado.

11. $m \neq -4$ e $m \neq 4$

12. a) Sim.

b) Não.

c) Não.

13. a) Sistema possível e determinado; $S = \{(4, -1, -3)\}$

b) Sistema impossível; $S = \varnothing$

c) Sistema possível e indeterminado; $S = \left\{\dfrac{k+2}{3}, k, k\right\}$

d) Sistema possível e determinado; $S = \{(-1, 4, 3, -2)\}$

e) Sistema possível e indeterminado; $S = \{(2 - 2\alpha, \alpha, \beta, \beta)\}$

f) Sistema possível e determinado; $S = \left\{\dfrac{17}{6}, \dfrac{1}{2}\right\}$

14. $a = \dfrac{4}{3}$ e $b = 2$

15. Sim.

Resolvido passo a passo

5. a) Livraria A: 2 coleções; livraria B: 1 coleção; livraria C: nenhuma coleção e livraria D: 1 coleção.

b) 8%

16. a) Sistema possível e determinado; solução geral: (1, −1, 2)

b) Sistema possível e indeterminado; solução geral: $(14k, -9k, k)$

c) Sistema impossível; $S = \varnothing$

17. Sistema impossível, $S = \varnothing$

18. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

19. $S = \{(-1, 0, 1, 2)\}$

20. 1 000 m

21. 16 moedas de 1 real, 10 moedas de 50 centavos e 130 moedas de 10 centavos.

22. **d**

23. a) $S = \{(3\alpha, 2\alpha, \alpha, 3\alpha)\}\ \alpha \in \mathbb{R}$

b) Cálcio: 3; hidrogênio: 6; fósforo: 2, oxigênio: 8.

24. **b**

25. 42 idosos.

27. **c**

28. a) Sistema possível e determinado; $S = \{(0, 0, 0)\}$

b) Sistema possível e determinado; $S = \{(0, 0, 0)\}$

29. Significa que um sistema homogêneo nunca será impossível.

31. $a \neq -\dfrac{1}{2}$ e $a \neq \dfrac{1}{2}$

32. $k = 5$

33. $a = -1$ e $b \neq 7$

34. Indeterminado.

35. $a = 2$; $\left(\frac{7-5k}{5}, \frac{5k+4}{5}, k\right)$

Um pouco mais...

a) 22
b) 17
c) 32 e 43
d) Ela atende aos requisitos vitamínicos, porém, não é a dieta de custo mínimo.
e) Nutricionista.

Pensando no Enem

1. **e**
2. $x = 5$ horas/mês e $y = 20$ horas por mês
3. **c**

Vestibulares de Norte a Sul

1. **d**
2. $x =$ R\$ 3,00; $y =$ R\$ 4,00; $z =$ R\$ 6,00
3. **d**
4. **d**
5. **a**
6. **b**
7. $c = 10$
8. **e**
9. **d**
10. **d**
11. **a**
12. **d**
13. **a**
14. **e**
15. **a**

Para refletir

Página 109

Porque não são equações do 1º grau.

UNIDADE 3 Geometria plana e espacial

Capítulo 7 • Polígonos inscritos e áreas

1. a) $\ell_3 = 10\sqrt{3}$ cm; $a_3 = 5$ cm
   b) $\ell_4 = 10\sqrt{2}$ cm; $a_4 = 5\sqrt{2}$ cm
   c) $\ell_6 = 10$ cm; $a_6 = 5\sqrt{3}$ cm
2. 30 cm
3. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm
4. $\frac{\sqrt{6}}{6}$
5. 14π cm
6. 7 cm
7. 300π m
8. a) Dobrará. b) Triplicará.
9. 5π cm
10. 12π cm
11. a) 5π cm b) 10π cm c) $\frac{10\pi}{3}$ cm
12. a) 12π cm b) 16π cm c) 18π cm

Resolvido passo a passo

5. a) Não.
   b) Quadrado: $2A$; paralelogramo: $2A$; triângulo médio: $2A$; triângulos maiores: $4A$ (cada um).

13. 2 320 m^2
14. 40 cm^2
15. 147 m^2
16. $100\sqrt{3}$ cm^2
18. $4\sqrt{3}$ cm^2
19. $36\sqrt{3}$ cm^2
20. $5\sqrt{3}$ cm^2
21. $4\sqrt{3}$ cm^2
22. 80 cm^2
23. $20\sqrt{3}$ cm^2
24. $96\sqrt{3}$ cm^2
25. 600 cm^2
26. 94 cm^2
27. Região colorida: 8 cm^2; região não colorida: 8 cm^2.
28. 60 m^2
29. 16 mil pessoas.
30. $800\sqrt{3}$ km^2
31. a) 57 cm^2
    b) 44%
32. 0,3121 m^2
33. $150\sqrt{3}$ cm^2
34. $300\sqrt{3}$ cm^2
35. a) 20π cm b) 100π cm^2
36. a) 18π cm^2 b) 9π cm^2 c) 12π cm^2
37. $(16 - 4\pi)$ m^2
38. $\left(\frac{25\pi + 48}{2}\right)$ m^2
39. 100π cm^2
40. 12π cm^2
41. 64π cm^2
42. 8π cm^2
43. 20π cm^2
44. 25π cm^2
45. $16(4 - \pi)$ cm^2
46. 3
47. πrg
48. A área do lago 1.
49. a) 11,5 cm^2 b) 12 cm^2
50. a) 4 cm e 8 cm
    b) 16 cm^2 e 64 cm^2
51. **b**
52. **a**
53. **d**
54. **c**
55. **b**
56. **d**
57. **e**
58. a) 2,5 km b) 56,25 km^2

Outros contextos

1. Aproximadamente 89,47 hectares; aproximadamente 1583 indígenas.
2. 17 000 000 000 m^2; 17 000 km^2

Para refletir

Página 144

- sen 90° = 1
- A metade da soma das medidas dos lados.

Página 146

$5\ell a$

Capítulo 8 • Geometria espacial de posição: uma abordagem intuitiva

1. a) Colineares e coplanares.
   b) Coplanares, mas não colineares.
   c) Colineares e coplanares.
   d) Coplanares, mas não colineares.
   e) Colineares e coplanares.
   f) Colineares e coplanares.
   g) Coplanares, mas não colineares.
   h) Não são colineares nem coplanares.
   i) Coplanares, mas não colineares.
2. Verdadeiras: **a**, **d**, **e**, **f**, **h**, **j**; falsas: **b**, **c**, **g**, **i**.
3. Paralelas: **c**, **f**; concorrentes: **a**, **d**, **e**, **h**, **i**; reversas: **b**, **g**.
4. 1ª: γ; 2ª: δ; 3ª: α; 4ª: β.
5. a) $p(ABCD) // p(EFGH)$; $p(ADGH) // p(BCFE)$; $p(ABEH) // p(CDGF)$.
   c) Sim; $\overline{FG}$.
   d) $ADGH$ e $ABCD$.

6. Verdadeiras: **b**, **d**; falsas: **a**, **c**, **e**.

7. a) Planos secantes
b) $p(ABJI)$ e $p(ADGI)$
c) $p(BCHJ)$
d) $\overleftrightarrow{CH}$
e) Não.

8. a) Planos secantes.
b) Sim; $\overleftrightarrow{FG}$.
c) Sim; $p(ABCD)$.

9. a) $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CF}, \overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{BF}, \overleftrightarrow{CE}$
b) $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{DG}, \overleftrightarrow{FG}, \overleftrightarrow{CF}, \overleftrightarrow{DF}, \overleftrightarrow{CG}$

10. A reta está contida em **b**, **d**, **f**, **h**; é paralela em **a**, **e** e é secante em **c** e **g**.

11. a) secante
b) retas reversas
c) paralelo
d) pertence
e) está contida
f) paralela
g) concorrentes
h) concorrentes

12. a) paralela
b) está contida
c) secante
e) $p(ACFD)$ e $p(DEF)$
f) paralelas
g) concorrentes
h) reversas

13. a) Está contida.
b) Algumas das soluções possíveis: $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{FD}$.
c) $p(ABCD)$ e $p(CDFG)$
d) concorrentes
f) $p(EFGH)$
h) $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{FH}$.

14. Verdadeiras: **b**, **c**, **e**, **f**, falsas: **a**, **d**.

Resolvido passo a passo

5. a) 24 cm

15. Verdadeiras: **a**, **b**, **d**, **e**, **g**; falsas: **c**, **f**, **h**, **i**.

16. c) Sim.

17. a) $p(ABFE) \perp p(ABCD)$;
$p(ABFE) \perp p(EFGH)$;
$p(ABFE) \perp p(ADHE)$;
$p(ABFE) \perp p(BCGF)$.
b) $p(ADHE)$ e $p(CDHG)$
c) Sim.
d) Os três são perpendiculares ao $p(EFGH)$.

18. Verdadeiras: **a**, **c**; falsa: **b**.

19. Verdadeiras: **a**, **d**, **e**, **f**; falsas: **b**, **c**.

20. **a**, **c** e **d**.

21. a) $\overline{CD}$
b) $\overline{AE}$
c) $\overline{DH}$
d) $\overline{AB}$
e) $\overline{CD}$
f) $\overline{AD}$
g) $\overline{AB}$
h) $\overline{FG}$
i) $\overline{DH}$
j) $\overline{FG}$
k) $\overline{BF}$
l) $\overline{DH}$

22. a) $\overline{HI}$
b) $\overline{GH}$
c) $\overline{AM}$, em que M é o ponto médio de $\overline{GH}$

23. a) 3
b) 5
c) $\sqrt{13}$
d) $2\sqrt{5}$
e) 4
f) $\sqrt{13}$
g) 4
h) 2
i) 4
j) 2
k) 3
l) 2
m) $\sqrt{29}$

24. 54 cm

Para refletir

Página 161

$X \in r; X \notin s; G \in \alpha; G \notin \beta; M \in \alpha; M \in \beta$

Página 164

- Três pontos colineares pertencem a uma única reta e, por essa reta, passam infinitos planos. Por isso, não podemos dizer que três pontos colineares determinam um plano.
- Porque não há um plano que passe pelas duas simultaneamente.

Página 169

- Se forem coplanares, as retas podem ser concorrentes. Se não forem coplanares, serão retas reversas.
- São planos secantes.
- A reta está contida no plano ou a reta é secante ao plano.

Página 170

- As retas s e t formam dois ângulos de 45° e dois de 135°.

Página 171

- A reta r é reversa ortogonal às retas de α que não passam por P.

Página 177

- Quando $P \in r$
- A distância é zero.

Página 178

- A distância é zero.
- Quando os planos são coincidentes.
- Não é possível.

Capítulo 9 • Poliedros: prismas e pirâmides

1. a) 5 faces, 8 arestas e 5 vértices.
b) 4 faces triangulares e 1 face quadrangular.
c) 3 arestas.
d) 4 arestas.
e) Retas reversas.

2. Poliedros convexos: **a**, **d**; poliedros não convexos: **b**, **c**.

3. 7 faces.

4. 11 faces.

5. 7 vértices.

6. 18 m

7. 32 faces.

8. 10 vértices.

10. $10\sqrt{2}$ cm

11. 30 cm

12. $4\sqrt{3}$ cm

13. 20 cm por 16 cm por 12 cm

14. 216 cm²

15. 184 cm²

16. 2 264 cm²

17. 4 m

18. $A_l = 4\sqrt{3}$ cm²; $A_t = 4(27 + 2\sqrt{3})$ cm²

19. 250 cm²

20. 32,6 m²

21. 810 m²

22. 600 m²

23. $0{,}24(180 + \sqrt{3})$ cm²

24. $\left(\dfrac{5\,400 - 25\sqrt{3}}{2}\right)$ cm²

25. Aproximadamente 17 caixas.

26. 414,4 cm²

Resolvido passo a passo

5. a) 6 800 m³

27. $375\sqrt{3}$ cm³

28. 10 dm

29. 140 cm³

30. 1 080 ℓ

31. 1 000 dados.

32. 1 728 cm³

33. 150 cm³

34. 226 800 ℓ

35. 120 cm³

36. 1 500 cm³

37. $12\,600\sqrt{3}$ cm³

38. $6\sqrt{3}$ cm³

39. $h = 7$ cm; $A_t = 480$ cm²

40. $V = 768\sqrt{3}$ cm³; $A_t = 192(2 + \sqrt{3})$ cm²

41. 11 m³

42. a) Igual.
b) Maior.

44. **a**

45. a) $2\sqrt{3}$ cm
b) $4\sqrt{7}$ cm
c) $2\sqrt{29}$ cm
d) $24\sqrt{3}$ cm²
e) $48\sqrt{7}$ cm²
f) $24(\sqrt{3} + 2\sqrt{7})$ cm²

46. 800 cm²

47. $16(1 + \sqrt{3})$ cm²

48. $208\sqrt{3}$ cm²

49. $144\sqrt{3}$ cm²

50. $4(5 + \sqrt{11})$ cm²

51. a) $2\sqrt{2}$ cm b) $12\sqrt{2}$ cm^2

52. 675 cm^3

53. 400 cm^3

54. Aproximadamente 100,8 mm^3.

55. 48 m^3

56. Aproximadamente 2 415 766,7 m^3.

57. $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ cm^3

58. 23,04 cm^2

59. 10 cm

60. 6 cm

61. $6\sqrt{3}$ cm^2

62. 18 500 cm^3

63. $\frac{3\,040}{3}$ cm^3

64. 4 632 cm^3

Para refletir

Página 185

4 faces.

Página 186

Tetraedro: $4 - 6 + 4 = 2$
Dodecaedro: $20 - 30 + 12 = 2$
Prisma de base pentagonal: $10 - 15 + 7 = 2$
Pirâmide de base quadrangular: $5 - 8 + 5 = 2$
Tronco de pirâmide de base retangular: $8 - 12 + 6 = 2$

Página 188

- $n \geqslant 3$, pois o menor número possível de lados em cada face é 3 (fase triangular) $p \geqslant 3$, pois o menor número possível de arestas que concorrem para o mesmo vértice é 3 (o cubo, por exemplo)

Capítulo 10 • Corpos redondos

1. **c** e **e**.

2. a) 8π cm^2 c) 24π cm^2
   b) 16π cm^2

3. 152π cm^2

4. $h = 2$ cm; $70\ \pi$ cm^2

5. Na lata mais alta.

Resolvido passo a passo

5. a) 20 cm $\times$ 10 $\sqrt{2}$ cm

6. $0{,}12\pi$ cm^3

7. Aproximadamente $4\,480\pi$ cm^3.

8. Aproximadamente 450π cm^3

9. 1008 m^3

10. 128π cm^3

11. $2\,000\pi$ cm^3

12. A primeira lata.

13. a) $V = 4\pi\ \ell$/h
    b) $h(t) = 1$ dm/h
    c) 10 h

14. **a**

15. a) 30 cm
    b) 540π cm^2
    c) 864π cm^2

16. **a**

17. 260π cm^2

18. Aproximadamente 6π cm^2.

19. a) $r = 2$ cm; $h = 2\sqrt{3}$ cm
    b) 12π cm^2

20. 201,1 cm^2

21. $12\,000\pi\ \ell$

22. $\frac{7\pi}{3}\ \ell$

23. 2 400 m^3

24. 81,64 cm^3

25. $3\sqrt{3}$ cm

26. 128π cm^3

27. Aproximadamente $28\,\pi\ \ell$.

28. $26{,}25\pi$ m^3

29. 111π

30. 49 mℓ

31. Aproximadamente 144π cm^2.

32. Aproximadamente 64π cm^2.

33. Aproximadamente 200π cm^2.

34. Aproximadamente 8 788 cm^3.

35. Aproximadamente 113,04 cm^3.

36. 250 000 ℓ

37. $\frac{64\pi}{9}$ cm^3

38. Aproximadamente 152,6 m^3/h.

39. Aproximadamente 13,15 m^3.

40. $R = 4\sqrt[3]{2}$ cm; $A = 64\pi\sqrt[3]{4}$ cm^2

41. $V = 48\pi$ cm^3

42. 3π cm^2

43. 9,6 m^2

44. Aproximadamente 2,8 m^3.

45. a) $\frac{\pi R^2}{3}$ cm^2 b) $\frac{4\pi R^2}{3}$ cm^2

Pensando no Enem

1. **d**
2. **e**
3. **d**
4. **d**
5. **e**
6. **e**

Vestibulares de Norte a Sul

1. **c**
2. **c**
3. **c**
4. **d**
5. **d**
6. **c**
7. **b**
8. **c**
9. Aproximadamente 1 607,68 cm^2.
10. a) 10,2 cm c) 947,92 cm^2
    b) 52,02 cm^2
11. **d**
12. **a**
13. **d**
14. **a**
15. **b**

Para refletir

Página 216

Porque cada um tem, pelo menos, uma superfície curva.

Página 217

Quando o cilindro é reto.

Página 223

O outro cateto indica o raio da base e a hipotenusa indica a geratriz do cone.

UNIDADE 4 Análise combinatória e probabilidade

Capítulo 11 • Análise combinatória

1. 6 maneiras.
2. 60 maneiras.
3. 8 maneiras.
4. 60 maneiras.
5. 16 números.
6. a) 36 c) 18 e) 9
   b) 18 d) 30
7. 128 maneiras.
8. 63 maneiras.
9. 450 maneiras.
10. a) 720 d) $n^2 - n$
    b) 210 e) $\frac{1}{n+2}$
    c) $\frac{1}{24}$ f) $n^2 + 2n - 3$
11. a) $n = 8$ b) $n = 2$
12. 6 palavras: ALI, AIL, LAI, LIA, IAL, ILA.
13. 256; 24

14. 120 maneiras.

15. 48 maneiras.

16. 24 anagramas.

17. 6 números.

18. a) 720 b) 6 c) 24 d) 144 e) 4

19. a) AGIMO b) AGIOM c) GAIMO d) OMIAG e) IGAMO

20. a) 34 650 b) 5 040 c) 630 d) 10 080 e) 1 120

21. a) 6
b) PPAA, AAPP, APAP, APPA, PAAP, PAPA

22. 1 260 maneiras.

23. 120 modos.

24. 6 ordens.

25. a) 12 b) 120 c) 56 d) 24 e) 5 f) 1 g) 6 720 h) 1

26. a) $x^2 - x$ b) $x^2 - 7x + 12$ c) $8x^3 - 2x$

27. a) 7 b) 4

28. 657 720 maneiras.

29. a) 120 b) 48

30. 132

31. a) 504 b) 336 c) 2 520 d) 15 120

32. 360 maneiras.

33. 360 maneiras.

34. a) 120 b) 120 c) 24 d) 6 e) 96

35. a) 360 b) 60 c) 180 d) 180

36. 657 720

37. 60

Resolvido passo a passo

5. a) 190

38. a) 15 b) 10 c) 4 d) 5 e) 21 f) 7 g) 45 h) 27 405

39. a) 6 b) 3

40. 1 140 equipes.

41. 210 equipes.

42. 45 maneiras.

43. 120 maneiras.

44. a) 84 maneiras. b) 60 maneiras. c) 40 maneiras.

45. 142 506 comissões.

46. 35 modos.

47. 270 725 maneiras.

48. a) 30 formas. b) 150 formas. c) 330 formas.

49. a) 16 380 modos. b) 42 504 modos c) 140 modos.

50. a) 56 comissões. b) 56 comissões. c) 140 comissões.

51. a) 60 maneiras. b) 65 maneiras. c) 115 maneiras.

52. 96 modos.

53. 10 536 quadriláteros.

54. 56 triângulos.

55. 720 maneiras.

56. 20 maneiras.

57. 720 maneiras.

58. 151 200 maneiras.

59. 15 quadriláteros.

60. 9 amigos.

61. a) 720 anagramas. b) 120 anagramas. c) 24 anagramas. d) 144 anagramas. e) 216 anagramas. f) 24 anagramas. g) 144 anagramas.

62. 300 números.

63. 960 placas.

64. 28 duplas.

65. 3 844 comissões.

66. a) 15 b) 35 c) 1 d) 190

67. 1

68. $x = 1$

69. $\frac{5}{8}$

70. a) 32 b) 63 c) 252 d) 93

71. 6ª linha: 1 6 15 20 15 6 1;
7ª linha: 1 7 21 35 35 21 7 1

72. $n = 14$ e $p = 4$

73. a) 16
b) 127

74. 63 maneiras.

75. 968 polígonos.

76. 256 modos.

77. a) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
b) $a^4 - 12a^3 + 54a^2 - 108a + 81$

78. a) 16 termos. c) $105 \cdot x^{13}$ b) x^{15}

Para refletir

Página 243

1ª etapa: Recife – São Paulo;
2ª etapa: São Paulo – Porto Alegre

Página 244

Se tivermos o zero nas centenas significa que não há centena nesse número. Por exemplo:
$\underline{0}\,\underline{4}\,\underline{5} = 45$.

Página 255

1

Capítulo 12 • Probabilidade

1. $\Omega = \{1, 2, 3\}; A = \{2\}; B = \{1, 3\}$

2. A: $\{(C_1, \overline{C}_2), (\overline{C}_1, C_2)\}$ B: $\{(\overline{C}_1, \overline{C}_2)\}$
C: $\{(C_1, C_2), (C_1, \overline{C}_2), (\overline{C}_1, C_2)\}$

3. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{0}{6}$ f) $\frac{6}{6}$

4. a) $\frac{4}{10}$ b) $\frac{6}{10}$

5. a) $\frac{6}{13}$ b) $\frac{4}{13}$ c) $\frac{6}{13}$ d) $\frac{5}{13}$ e) $\frac{9}{13}$ f) $\frac{4}{13}$ g) $\frac{3}{13}$

6. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{7}{12}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{6}$ g) $\frac{7}{18}$

7. a) $\frac{13}{52}$ b) $\frac{4}{52}$ c) $\frac{1}{52}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{26}$

8. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

9. a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{25}$

10. a) $\frac{17}{80}$ b) $\frac{7}{80}$ c) $\frac{7}{80}$ d) $\frac{19}{80}$ e) $\frac{27}{80}$

11. $\frac{1}{24}$

12. a) 1 326 b) 78 c) $\frac{1}{17}$

Resolvido passo a passo

5. a) Não.
b) Não.

13. a) $\frac{8}{17}$ d) $\frac{1}{17}$ f) $\frac{7}{17}$
b) $\frac{7}{17}$ e) $\frac{3}{17}$ g) $\frac{6}{17}$
c) $\frac{14}{17}$

14. a) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{39}{52}$
b) $\frac{1}{13}$ f) $\frac{48}{52}$
c) $\frac{4}{13}$ g) $\frac{9}{13}$
d) $\frac{1}{52}$

15. $\frac{5}{18}$

16. $\frac{13}{18}$

17. $\frac{8}{11}$

18. $\frac{3}{4}$ (ou 75%)

19. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{6}{21}$ c) $\frac{12}{21}$

20. a) $\frac{666}{780}$ b) $\frac{1}{780}$ c) $\frac{114}{780}$

21. a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{13}{102}$ c) $\frac{195}{442}$

22. Opção 2.

23. $\frac{1}{4}$

24. a) $\frac{8}{19}$ e) $\frac{11}{19}$
b) $\frac{9}{16}$ f) $\frac{14}{19}$
c) $\frac{5}{19}$ g) $\frac{9}{16}$
d) $\frac{1}{4}$

25. a) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4}$ f) 1
c) $\frac{3}{8}$ g) $\frac{4}{7}$
d) $\frac{1}{4}$

26. $\frac{1}{2}$

27. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{16}$

28. $\frac{1}{11}$

29. 3%

30. a) 0,08
b)0,52

31. 0,6

32. a) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{6}$ e) Sim.
c) $\frac{1}{12}$

33. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{2}{35}$ c) $\frac{3}{7}$

34. $\frac{7}{12}$

35. a) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{12}{104}$
b) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{16}{26}$

36. a) 40% b) 70%

37. $\frac{607}{6\,000}$

38. a) $\frac{1}{32}$ c) $\frac{5}{32}$
b) $\frac{5}{16}$ d) $\frac{1}{32}$

39. a) $\frac{5}{16}$ b) $\frac{15}{64}$

40. $\frac{15}{64}$

41. $\frac{625}{3\,888}$

42. a) $\frac{256}{390\,625}$
b) $\frac{16\,128}{390\,625}$

43. 50%

44. $\frac{1}{4}$

45. $\frac{1}{2}$

46. $\frac{1}{2}$

Outros contextos

1. 25%
2. $\frac{1}{16}$
3. $\frac{175}{256}$
4. 191 doadores

Leituras

1. $\frac{1}{216}$
2. $\frac{1}{36}$
3. $\frac{1}{72}$
4. a) $\frac{25}{216}$ b) $\frac{1}{8}$

Pensando no Enem

1. **d** 4. **c** 7. **c**
2. **e** 5. **e** 8. **e**
3. **d** 6. **a** 9. **d**

Vestibulares de Norte a Sul

1. **e**
2. **d**
3. **a**
4. **c**
5. **e**
6. **d**
7. **d**
8. **d**
9. **c**
10. 2 030 maneiras.
11. Aproximadamente 2,8%
12. **b**
13. **c**

Para refletir

Página 267

Os dois lados da moeda ou as seis faces do dado têm a mesma “chance” de sair.

Página 270

Quando se diz “pelo menos duas”, admite-se que aconteçam duas ou mais situações. Quando se diz “exatamente duas”, há somente duas situações.

Caiu no Enem

1. **e**
2. **a**
3. **b**
4. **a**
5. **c**
6. **b**
7. **b**
8. **b**
9. **d**
10. **e**
11. **c**
12. **c**
13. **e**
14. **a**
15. **a**
16. **d**
17. **d**
18. **b**
19. **b**
20. **e**
21. **c**
22. **a**
23. **b**
24. **e**
25. **c**
26. **c**
27. **b**
28. **d**
29. **c**
30. **d**
31. **e**
32. **c**
33. **d**
34. **c**
35. **d**

Sugestões de leituras complementares

Reprodução/Editora Best Seller

ACZEL, Amir D. *Quais são suas chances?*. São Paulo: Best Seller, 2007.
O autor, um famoso matemático, explica como o homem, desde os tempos antigos, já procurava entender os caprichos da sorte ou do azar. De forma atraente e fácil, o livro aborda como funcionam as fórmulas que fundamentam as probabilidades e ensina como aplicá-las às diferentes situações do cotidiano.

Reprodução/Editora do Brasil

Coleção PEC – Projeto Escola e Cidadania. São Paulo: Editora do Brasil, 2001.
Nesta coleção há vários módulos que ajudam a compreender conteúdos, em especial: Arranjando e permutando, Combinações, O que é probabilidade e Observando formas.

Reprodução/Editora Ciência Moderna

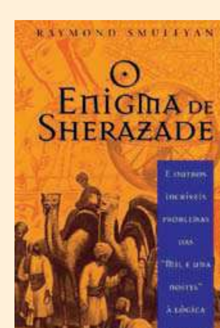
COUTINHO, Lázaro. *Matemática & Mistério em Baker Street*.
Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2004.
Escrito em linguagem simples, o livro nos conduz ao fantástico mundo de Sherlock Holmes e seu parceiro, Dr. Watson. Para o enriquecimento do texto, concorrem fatos, lendas e curiosidades de Matemática.

Reprodução/Editora Zahar

DEWDNEY, A. K. *20 000 léguas matemáticas*:
Um passeio pelo misterioso mundo dos números.
Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000.
Nesta aventura literária desafiadora, somos levados a uma viagem fictícia pelo mundo à procura da solução para um dos grandes mistérios matemáticos: por que o cosmo é regido por leis matemáticas?

Reprodução/Editora Record

KEITH, Devlin. *O instinto matemático.* Rio de Janeiro: Record, 2009.
O autor afirma que há dois tipos de Matemática: a natural e a simbólica.
A Matemática natural evolui há milhões de anos, proporcionando – tanto a humanos quanto a animais – inacreditáveis habilidades relacionadas à necessidade de sobrevivência, ao senso de direção e à captura de presas.
A Matemática simbólica é exclusiva do ser humano e tem pelo menos 3 mil anos.



Reprodução/Editora Record

SMULLYAN, Raymond. *O Enigma de Sherazade e outros incríveis problemas, das* Mil e uma Noites *à lógica moderna*. Rio de Janeiro: Record, 2001.
Nesta divertida paródia de *As Mil e uma Noites*, o autor, renomado matemático e lógico, transporta os leitores para o mundo dos enigmas e das charadas. O livro traz anedotas e 225 enigmas, todos com as soluções, incluindo problemas lógicos e jogos com números, enigmas sobre enigmas, exercícios de verdade/mentira, charadas e paradoxos desconcertantes.

Significado das siglas de vestibulares

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

Faap-SP: Fundação Armando Álvares Penteado (São Paulo)

Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia de São Paulo

Fazu-MG: Faculdade de Agronomia e Zootecnia de Uberaba (Minas Gerais)

FCMSCSP: Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo

FEI-SP: Centro Universitário da Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)

FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)

ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica (São Paulo)

PUC-MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC-RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

PUC-RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

PUCC-SP: Pontifícia Universidade Católica de Campinas (São Paulo)

Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina

Uece: Universidade Estadual do Ceará

UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina (Paraná)

UEM-PR: Universidade Estadual de Maringá (Paraná)

UEMT: Universidade do Estado de Mato Grosso

Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Ufac: Universidade Federal do Acre

Ufam: Universidade Federal do Amazonas

UFC-CE: Universidade Federal do Ceará

UFG-GO: Universidade Federal de Goiás

UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados (Mato Grosso do Sul)

UFMA: Universidade Federal do Maranhão

UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais

UFMS: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFMT: Universidade Federal de Mato Grosso

UFPA: Universidade Federal do Pará

UFPB: Universidade Federal da Paraíba

UFPE: Universidade Federal de Pernambuco

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UFRR: Universidade Federal de Roraima

UFRRJ: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Ufscar-SP: Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)

UFT-TO: Universidade Federal do Tocantins

UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)

UFV-MG: Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)

UnB-DF: Universidade de Brasília (Distrito Federal)

Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia

Unemat-MT: Universidade do Estado de Mato Grosso

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)

Unifor-CE: Fundação Edson Queiroz Universidade de Fortaleza (Ceará)

Unisc-RS: Universidade de Santa Cruz do Sul (Rio Grande do Sul)

UPF-RS: Universidade de Passo Fundo (Rio Grande do Sul)

Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Unesp (São Paulo)

Bibliografia

- ÁVILA, G. *Cálculo das funções de uma variável*. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos (LTC), 2003.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 2010.
- COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: SBM, 2003. 26 v.
- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. 12. ed. São Paulo: Ática, 2002.
- DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro: Gradiva, 2012.
- MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. *Estatística básica*. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2011.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- ________. *Mathematical Discovery on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. New York: John Wiley & Sons, 2009. 2 v.
- REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM, 1982/1998. v. 1 a 36.

Índice remissivo

Manual do Professor

Matemática

Volume 2

Sumário

1 Conversa com o professor

Este Manual foi escrito especialmente para você, professor. Sei que nem sempre temos condições e oportunidades de ler revistas, livros e acessar *sites* especializados em Educação Matemática, de participar de encontros e congressos ou de frequentar cursos de especialização ou mestrado. Mas, com base no trabalho que desenvolvo há décadas com professores de Matemática como você, sei da grande vontade que todos têm de estar atualizados e de ter acesso às mais recentes informações sobre aprendizagem e ensino da Matemática.

Estou certo de que este Manual vai ajudá-lo nessa procura. Você será convidado a refletir comigo sobre questões como: a história do ensino da Matemática no Brasil, os pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino da Matemática, o novo Enem, algumas estratégias didáticas, os conteúdos digitais, os temas interdisciplinares e a avaliação em Matemática, além de outras.

Reconhecer o caminho trilhado pelo ensino da Matemática no Brasil e buscar respostas para as questões presentes no dia a dia do professor constituíram os primeiros suportes para a elaboração desta coleção. Outros pressupostos que dão sustentação às propostas apresentadas dizem respeito aos aspectos presentes na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) número 9 394/96.

No item *Sugestões complementares: cursos, leituras, recursos digitais e passeios*, procuro estimulá-lo a estar sempre atualizado, aperfeiçoando e aprofundando continuamente sua formação em Matemática, em Metodologia do Ensino de Matemática e em Educação. Fazendo parte desse movimento nacional em prol da melhoria da qualidade da aprendizagem e do ensino de Matemática, certamente você se sentirá mais seguro e motivado nessa difícil, mas gratificante, tarefa diária de criar condições para que seus alunos aprendam Matemática com significado e prazer, para poderem usá-la naturalmente em sua vida como cidadãos. Com isso, estará auxiliando seus alunos na concretização dos princípios gerais da educação: aprender a conhecer, a fazer, a conviver e a ser.

Bom trabalho! Compartilhe comigo suas vitórias, seus sucessos, suas dúvidas e suas dificuldades enviando sugestões para melhorar este trabalho.

Um abraço.

O Autor.

2 Apresentação da coleção

A educação brasileira, de maneira geral, passa por uma fase de grandes mudanças, sendo elas de recursos didáticos, de currículo, de expectativas de aprendizagem, de perfil cultural e cognitivo de nossos jovens, entre outras. Essas mudanças geram impactos no trabalho do profissional da educação, podendo até mesmo causar desconforto ou insegurança. Assim, um dos objetivos desta coleção, composta de livro do aluno e Manual do Professor, é fornecer elementos que ajudem a atender às necessidades desse novo cenário educacional.

Esta coleção apresenta uma metodologia que procura atribuir ao aluno o papel central no processo de ensino-aprendizagem, como agente da sua aprendizagem em constante interação com o texto e solicitado a responder a perguntas, a confrontar soluções, a verificar regularidades, a refletir e a tirar conclusões. Para isso, grande parte do conteúdo é introduzida por situações-problema e depois sistematizada.

São abordados os principais conteúdos nos campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria, das Grandezas e Medidas, da Estatística, da Combinatória e da Probabilidade – sempre que possível, integrados entre si e com as demais áreas do conhecimento. A maioria desses temas é trabalhada a partir de situações-problema contextualizadas ou interdisciplinares.

Os conteúdos são trabalhados de maneira diferenciada, por exemplo, tópicos de Grandezas e Medidas aparecem como aplicações dos números reais; aborda taxa de variação da função afim; *não* introduz função como caso particular de relação, como é tradicionalmente feito; trabalha as progressões como caso particular de função; explora a proporcionalidade na função linear; explora a Geometria analítica da parábola na função quadrática; relaciona a função quadrática a uma progressão aritmética; apresenta caracterização da função exponencial por meio da progressão geométrica; abrevia o cálculo com logaritmos e dá lugar ao uso da calculadora; apresenta a interpretação geométrica de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica; apresenta as posições relativas dos três planos no espaço ao estudar os sistemas lineares 3×3; apresenta uma introdução à programação linear; apresenta o método binomial para o cálculo de probabilidade; apresenta as aplicações de Probabilidade à Genética, etc.

A distribuição dos conteúdos, ao longo da coleção, não esgota um assunto em um único capítulo e aborda um mesmo conceito em vários dos campos mencionados anteriormente, bem como sob diferentes pontos de vista dentro de um mesmo campo. É o caso das funções e progressões, da função afim e da Geometria analítica da reta, da função quadrática e da Geometria analítica da parábola, das grandezas e medidas e dos números, etc.

3 Um pouco da história do ensino da Matemática no Brasil

A história da humanidade traz as marcas do desenvolvimento de todas as ciências e a Matemática, como tal, apresenta grande evolução nos seus métodos, processos e técnicas; na sua organização; na sua relação com outras áreas da atividade humana e no alcance e na importância das suas aplicações.

No campo educacional, o ensino da Matemática também passou por evoluções na organização de sua estrutura como componente curricular e no alcance e na importância de sua função no desenvolvimento do pensamento dos indivíduos.

Essas transformações estão intimamente ligadas às mudanças políticas e sociais ocorridas historicamente. Fiorentini (1995) destaca que não é simples descrever os diferentes modos de ensinar Matemática ao longo do desenvolvimento da educação no Brasil, pois em cada um deles há a influência da concepção de ensino, de aprendizagem, de Matemática e de Educação; dos valores e das finalidades atribuídos ao ensino da Matemática; da relação professor-aluno e da visão que se tem de mundo, de sociedade e de ser humano que se percebe em cada período histórico.

No período colonial os jesuítas eram responsáveis pela escolarização e tinham o propósito de oferecer uma cultura geral básica, ou seja, relevante para a formação do ser humano. Segundo o educador Valente (1999) "as ciências, e em particular a Matemática, não constituíram, ao longo dos duzentos anos de escolarização jesuítica no Brasil, um elemento integrante da cultura escolar".

A pouca atenção dada à Matemática pelos jesuítas em seus colégios no Brasil foi fruto do pensamento corrente da época. A Companhia de Jesus contava com homens de ciências entre os seus, mas mesmo entre eles a Matemática nunca foi considerada ciência autônoma, abstrata e geral. Para eles o ensino das Letras era mais importante, pois era visto como o verdadeiro formador do ser humano.

Valente afirma que essa postura perante a Matemática mudou no Brasil com a independência de Portugal da dominação espanhola, a que esteve submetida de 1580 a 1640. Com o restabelecimento de sua soberania, o rei português dom João IV buscou reorganizar seu Exército nacional e trazer para o país os avanços realizados na arte da guerra.

Esse movimento influenciou a educação em Portugal e, consequentemente, no Brasil. O rei precisava de engenheiros aptos aos novos métodos de construção de fortificações e à arte de trabalhar o aço e a pólvora, para a criação e o manuseio de canhões de artilharia; esses profissionais foram peças fundamentais das novas Forças Armadas, pois eram especialistas nas "artes mecânicas" e matemáticos hábeis capazes de usar geometria e aritmética em múltiplos campos de trabalho. Para esse fim o rei criou as "aulas de artilharia e fortificação". A primeira dessas aulas no Brasil foi criada em 1699, no Rio de Janeiro, com a intenção de ensinar a desenhar fortificações. Assim, o Brasil começava a formar seus próprios engenheiros com ensino baseado na filosofia racionalista cartesiana, com o intuito de assegurar e registrar as fronteiras da colônia portuguesa.

No século XVIII, com a "febre" do ouro no Brasil, os militares portugueses eram responsáveis pela organização, fundação das vilas e construção da vida civil nas regiões de mineração, o que levou à criação de uma escola militar no ano de 1738.

No final do século XIX e começo do século XX o Brasil passou por uma transformação em suas estruturas de poder, deixando para trás uma sociedade latifundiária e escravocrata, caminhando para um modelo urbano-industrial. O ensino da Matemática, que ainda mantinha muitas das características do proposto pelos jesuítas, resumia-se a uma apresentação seca, abstrata e lógica, que não atendia a essa nova sociedade emergente.

A instalação do Governo Provisório em 1930, com uma nova proposta política e econômica, colocou em destaque a necessidade de infraestrutura adequada à nova realidade, provocando as reformas de ensino de Francisco Campos, na década de 1930, e a de Gustavo Capanema, na década de 1940.

Esses dois políticos tomaram emprestado muitas ideias desenvolvidas entre os anos 1929 e 1937 pelo professor de matemática Euclides Roxo. Discípulo do alemão Felix Klein, um matemático que propôs o que se chamava "Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática". Roxo acreditava que o ensino da Matemática de forma fragmentada, como era feito até então, não estava de acordo com o desenvolvimento psicológico do aluno.

A nova proposta curricular de Matemática foi implantada pela primeira vez em 1929 no Colégio Pedro II, onde Roxo era professor catedrático. De acordo com o próprio Roxo (1929), a reforma na cadeira da disciplina foi uma completa renovação e fazia com que os alunos não tivessem provas distintas de Aritmética, Álgebra e Geometria, mas sim um exame único de Matemática. Isso permitia que o conteúdo das três áreas citadas fosse espalhado e dividido ao longo dos quatro anos de educação do colégio. Ele ainda explicou que tal proposta estava resguardada pelas recentes correntes pedagógicas do mundo civilizado.

Roxo acreditava que a Matemática abstrata ensinada nos colégios já não fazia sentido em uma sociedade de demandas comerciais e industriais como a que existia então no Brasil e queria apresentar conceitos matemáticos de forma viva e concreta, respondendo às mudanças culturais do país, mais uma vez influenciado por Felix Klein.

De acordo com Dassie e Rocha (2003), influenciado por essa nova proposta, Francisco Rocha, o então ministro da Educação e da Saúde do Governo Provisório de Getúlio Vargas, buscou reformar a educação brasileira com ideais escolanovistas. Em um esforço para criar uma educação secundária com finalidade própria, e não mais um simples preparatório para cursos das universidades, ele instituiu o Decreto n. 19 890, de 18 de abril de 1931, conhecido como Reforma Francisco Rocha. Nesse documento estava previsto o ensino da Matemática de forma muito similar como pensara Euclides Roxo para o Colégio Pedro II, ou seja, prevendo o ensino simultâneo dos diferentes campos da disciplina, porém sem o preciosismo das instruções metodológicas apresentadas no programa de Roxo.

Tais mudanças não foram recebidas com facilidade pelos professores do país, notadamente pelo Exército brasileiro e pela Igreja católica, que apresentaram críticas severas ao plano do ministro e levaram para a mídia um extenso debate sobre as metodologias do ensino matemático; o professor Euclides Roxo participou como defensor da reforma.

Em 1939, o então ministro da Educação e da Saúde, Gustavo Capanema, começou uma série de estudos e consultas para a elaboração de uma nova reforma. Entre os documentos analisados estão os relatórios do Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos, a proposta do Colégio Pedro II, as legislações educacionais vigentes em diversos países europeus, as cartas enviadas pelo próprio Euclides Roxo e seus opositores às instituições de ensino do Exército e da Igreja.

Assim, a Lei Orgânica do Ensino Secundário foi promulgada em 9 de abril de 1942 e foi fruto de um trabalho de escrita, revisão e crítica de que participaram todos os principais envolvidos nos recentes debates sobre Educação Matemática. O objetivo da nova reforma era criar um ensino secundário capaz de "formar a personalidade integral dos adolescentes; acentuar e elevar, na formação espiritual dos adolescentes, a consciência patriótica e a consciência humanística; e dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial". Ela dividia ensino secundário em dois ciclos: o ginasial, com duração de quatro anos, e os cursos clássico e científico no segundo momento, ambos com duração de três anos.

Esse processo de reestruturação ocorrido no início da década de 1940 ficou conhecido como Reforma Capanema.

Fiorentini (1995) classificou o ensino da Matemática presente até o final da década de 1950 como sendo de tendência *formalista clássica*, na qual o ensino era "acentuadamente livresco e centrado no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo" por meio de explanações orais e apresentação teórica na lousa. Ao aluno cabia apenas o papel de reproduzir exatamente o raciocínio e os procedimentos realizados pelo professor ou presentes no livro didático. Essa tendência recebeu o nome de formalista clássica porque em relação ao seu ensino a Matemática era apresentada como reprodução do modelo euclidiano, isto é, com uma organização lógica a partir de conhecimentos primitivos, axiomas, definições e teoremas para, depois, serem apresentados os exercícios. A concepção de Matemática subjacente era a platônica, na qual se considera que as ideias matemáticas existem independentemente do ser humano e, portanto, não são construídas por ele, o que justifica a postura determinada aos estudantes de apenas reproduzir o que era apresentado.

Do ponto de vista social e político, Fiorentini destaca que nessa época a aprendizagem da Matemática era para poucos "bem-dotados" intelectualmente e financeiramente. Garantia-se na escola um ensino mais racional e rigoroso à elite dirigente e aos membros da Igreja e, para as classes menos favorecidas que frequentavam a escola técnica, prevalecia o cálculo e a abordagem mais mecânica com uma coleção de regras e fórmulas.

Outro marco da década de 1950 foi a derrota dos americanos no início da corrida espacial para os soviéticos, que colocou em destaque a necessidade de se investir em avanço tecnológico. A partir daí, enormes quantias foram dispensadas pelas associações científicas para promover a reunião de especialistas de renome em Educação, Psicologia e diferentes campos das ciências exatas e naturais. Em relação ao ensino da Matemática, ocorreu na França o Seminário de Royaumont, cuja proposta era a de discutir novas perspectivas, tendo em vista uma formação matemática voltada ao pensamento científico e tecnológico. Esse seminário deu origem ao movimento chamado Matemática moderna, consolidado pelo grupo Bourbaki.

No Brasil, de 1955 a 1966, foram realizados cinco Congressos de Professores de Matemática com a preocupação de discutir conteúdos e metodologias de ensino. Esses encontros inspiraram a criação de grupos importantes para o cenário da Educação Matemática no país nas décadas de 1960 e 1970. Dentre eles destacam-se, em São Paulo, o Geem (Grupo de Estudos do Ensino de Matemática), liderado por Oswaldo Sangiorgi e Renata Watanabe; em Porto Alegre, o Geempa (Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação), com Ester Pilar Grossi como líder desde sua criação; no Rio de Janeiro, o Gemeg, que foi substituído pelo Gepem (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), tendo como presidente Maria Laura Mouzinho Leite Lopes; desse grupo também participou José Carlos de Mello e Souza (Malba Tahan) e, posteriormente, em Rio Claro (SP), o Sapo (Serviço Ativador em Pedagogia e Orientação), que foi o embrião do primeiro Mestrado em Educação Matemática do país.

Segundo Fiorentini (1995), os principais propósitos do Movimento da Matemática moderna foram:

- integrar os três campos fundamentais da Matemática com a introdução de elementos unificadores, como a teoria dos conjuntos, estruturas algébricas e relações e funções;
- substituir o caráter mecanizado, não justificado e regrado presente na Matemática escolar por outro com mais ênfase nos aspectos estruturais e lógicos da Matemática;

- fazer com que o ensino de 1º e 2º graus refletisse o espírito da Matemática contemporânea que, graças ao processo de algebrização, tornou-se mais poderosa, precisa e fundamentada logicamente.

Com a aprovação, em 1961, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, esse movimento ganhou força nas décadas de 1960 e 1970. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1998 destacam que, com base nesse movimento, a Matemática era concebida como lógica e que deveria ser compreendida a partir de suas estruturas, conferindo um papel fundamental à linguagem matemática. O ensino passou a ter excessiva preocupação com abstrações internas à própria Matemática, em uma tentativa de aproximar a Matemática pura da Matemática escolar.

Para Fiorentini (1995), esse movimento promovia o retorno ao formalismo matemático, só que tendo como fundamento as estruturas algébricas e a linguagem formal da Matemática contemporânea. Enfatizava o uso preciso da linguagem matemática, o rigor e as justificativas das transformações algébricas por meio das propriedades estruturais.

No entanto, destaca esse autor, que não ocorreram muitas mudanças em relação ao ensino-aprendizagem, pois o ensino continuou sendo acentuadamente autoritário e centrado no professor, que permaneceu desenvolvendo sua aula na lousa, onde demonstrava tudo rigorosamente. O aluno continuou sendo considerado aquele que deve receber passivamente o apresentado pelo professor, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados por ele.

Nessa linha, as finalidades do ensino da Matemática estariam voltadas mais a formar um especialista em Matemática do que um cidadão, pois a Matemática escolar perdeu tanto seu papel de formadora da disciplina mental quanto seu emprego como ferramenta para a resolução de problemas. A formação matemática assumiu uma perspectiva em que era mais importante a apreensão da estrutura, que capacitaria o aluno a aplicar essas formas de pensamento aos mais variados domínios, do que a aprendizagem de conceitos e aplicações da Matemática.

Fiorentini sintetiza dizendo que o ensino da Matemática nesse contexto pode ser considerado de tendência *formalista moderna* e, tal como a tendência formalista clássica, "pecou pelo reducionismo à forma de organização/sistematização dos conteúdos matemáticos, uma vez que em ambos se relega a segundo plano sua significação histórico-cultural e a essência das ideias e conceitos matemáticos". Destaca, porém, que uma diferença fundamental entre essas duas tendências está no fato de que, enquanto a clássica enfatiza e valoriza o encadeamento lógico do raciocínio matemático e as formas perfeitas e absolutas das ideias matemáticas, a moderna busca os desdobramentos lógico-estruturais das ideias matemáticas, tendo por base as estruturações algébricas mais atuais, considerando estar aí expressada a qualidade do ensino.

De acordo com os PCN, em 1980, nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) divulgou o documento "Agenda para Ação", no qual apresentou recomendações para o ensino da Matemática, destacando a resolução de problemas como foco. Imprimiu novos rumos às discussões curriculares ao destacar a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos e linguísticos na aprendizagem da Matemática. As reformas educacionais foram fortemente influenciadas por esse documento, de modo que propostas elaboradas em diferentes países, nas décadas de 1980 e 1990, apresentam pontos em comum no que diz respeito a:

- direcionamento do Ensino Fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
- importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no Ensino Fundamental, elementos de Estatística, Probabilidade e Combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordagem desses assuntos;
- necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação (PCN Matemática, 1998, p. 21).

Esses aspectos apontados foram os norteadores das indicações e propostas apresentadas para o ensino da Matemática pelos PCN, válidas até hoje.

Esse documento destaca a Etnomatemática com suas propostas alternativas para a ação pedagógica. Tal programa contrapõe-se às orientações que desconsideram qualquer relacionamento mais íntimo da Matemática com aspectos socioculturais e políticos — o que a mantém intocável por fatores outros a não ser sua própria dinâmica interna. Do ponto de vista educacional, procura compreender os processos de pensamento, os modos de explicar, de entender e de atuar na realidade, dentro do contexto cultural do próprio indivíduo. A Etnomatemática procura partir da realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural, mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural.

O mesmo documento, ao apresentar "caminhos para se 'fazer Matemática' em sala de aula", dá ênfase à resolução de problemas como um recurso a ser utilizado em seu ensino. Apoia-se na história da Matemática para justificar sua aplicação, considerando que a própria Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. Assim, defende uma proposta com os seguintes princípios:

- o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino-aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; em outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se observa na história da Matemática;
- o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido em um campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (PCN Matemática, 1998, p. 32-33).

A década de 1980 foi decisiva para a Educação Matemática no Brasil, pelo início da expansão, em praticamente todo o país, de programas de pós-graduação em Educação Matemática. Em 1984, inicia-se formalmente o primeiro Mestrado em Educação Matemática do país, na Unesp de Rio Claro. Em 1987 aconteceu o I Encontro Nacional de Educação Matemática, evento realizado, a partir dessa data, a cada três anos. Nesses encontros têm sido apresentados os últimos trabalhos e pesquisas em Educação Matemática, em um esforço de divulgar e socializar os conhecimentos sobre o tema, trocar experiências de ensino de Matemática em todos os níveis e promover o intercâmbio de ideias.

4 Pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino da Matemática

Ensino Médio

Na organização da educação escolar brasileira, determinada pela LDB, o Ensino Médio constitui a última etapa da Educação Básica, sendo considerado um momento de consolidação e aprofundamento dos conhecimentos básicos do Ensino Fundamental. De acordo com ela, nessa fase promover-se-á uma preparação básica para o trabalho e a cidadania da pessoa, que permita que esta continue aprendendo e se adaptando a uma sociedade em constante mudança, isto é, nesse nível de escolaridade deve-se visar ao aprimoramento da ética, da autonomia intelectual e do pensamento crítico do estudante, promovendo o relacionamento entre teoria e prática, possibilitando a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos que orientam os processos produtivos da sociedade.

Mais detalhadamente, a Resolução n. 2, de 30 de janeiro de 2012, emitida pela Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação, ao definir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, agrega a essa etapa do processo educacional maior presença dos desenvolvimentos sociais e tecnológicos e enfoque interdisciplinar, com intuito de garantir uma relação mais ampla entre o aprendido na escola e os acontecimentos cotidianos da sociedade em que estão inseridos. Assim, são pensados como essenciais a participação e iniciativa dos alunos, que devem trazer seu mundo à escola para que possam compreendê-lo e mudá-lo com o exercício de sua cidadania.

Para Angela Maria Martins (2000), estudiosa e pesquisadora de políticas de Educação Básica e Educação Profissional, essas resoluções oficiais estão promovendo um processo de modernização do Ensino Médio, que tem como principal motivo a necessidade de readequação da educação brasileira para atender às mudanças do mercado de trabalho e da nova realidade econômica que começou a se impor a partir da década de 1980, época da revolução tecnológica e início do declínio da concentração de capital nos meios de produção industriais.

Segundo ela, essa modernização torna-se emergencial neste momento histórico de computadores conectados a redes globais, gerando um imenso volume de informação. Momento que mostra ser inegável a importância do conhecimento e raciocínio matemático. O próprio Ministério da Educação, em suas publicações recentes, reconhece que a Matemática deve ser hoje compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, capaz de contribuir para a construção de uma visão de mundo, essencial para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que serão exigidas na vida social e profissional das pessoas.

Nesse contexto, a Matemática supera o caráter instrumental e deve passar a ser apresentada como ciência, com características próprias de investigação e de linguagem, e papel integrador importante ao lado das Ciências da Natureza. Essa nova percepção da Matemática como ciência deve permitir que o aluno perceba sua dimensão histórica e a estreita relação que possui com a sociedade e a cultura em diferentes épocas, ampliando e aprofundando o espaço de conhecimento que existe nessas inter-relações.

Sua inserção no Ensino Médio, no entanto, deve ser adequada ao desenvolvimento e à promoção de seu valor entre os alunos, tendo em mente que existem diferentes motivações, interesses e capacidades.

Levando em conta ainda as resoluções do governo federal, há que se destacar a proposta do Ensino Médio Inovador, motivada, segundo a revista *Educação* de agosto de 2011, pela percepção em todo o mundo de um clima de desinteresse dos adolescentes pela vida escolar. A partir daí, muitas reflexões têm sido feitas sobre os possíveis caminhos para que o Ensino Médio seja vivido e percebido como significativo. Nessa perspectiva, o desafio dos sistemas de ensino nos últimos anos tem sido a busca da organização de um programa curricular que consiga, ao mesmo tempo, formar os jovens para continuar os estudos no Ensino Superior e prepará-los para o mercado de trabalho.

No Brasil, para melhorar o cenário, o governo federal aposta, desde 2004, em propostas que apontem para um programa curricular mais flexível. Uma das principais medidas foi a possibilidade de integrar o ensino regular e a educação profissional, sacramentada pelo Decreto n. 5 154/04. A Portaria número 971, de outubro de 2009, instituiu o Programa Ensino Médio Inovador (ProEMI), como parte das ações do Plano de Desenvolvimento da Educação, em uma tentativa de induzir, por meio de parcerias com municípios e estados, a reestruturação do currículo do Ensino Médio brasileiro.

Essa iniciativa tem como preocupação os recentes números levantados por pesquisas oficiais que mostram o desaceleramento ou a queda no ingresso de alunos no Ensino Médio em todo o território brasileiro. No documento orientador (Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/documento_orientador.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2013), o Ministério da Educação reconhece que um dos fatores possíveis para essas estatísticas problemáticas, nessa etapa do sistema educacional, seja exatamente a falta de sensibilidade e objetivos para o currículo do Ensino Médio.

Assim, o programa tem como objetivo oferecer aos alunos um currículo que esteja de acordo com sua proposta presente nos documentos legais que o definem: um momento para aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, usando-os como um instrumento para agir no mundo em que vive. É por meio da dinamização das atividades oferecidas, da atualização de temas que envolvam mais diretamente ciência, tecnologia e cultura, da criação de um currículo em sintonia com a realidade brasileira, que esse programa considera a possibilidade de sucesso do Ensino Médio.

Essa implantação implicará um aumento de 600 horas na formação do aluno, passando a carga horária de 2 400 horas anuais para 3 000 horas anuais. Esse aumento será gradativo, à razão de 200 horas por ano. A grade horária sofrerá uma flexibilização e o aluno terá a possibilidade de escolher 20% da sua carga horária, a partir de um conjunto de atividades oferecidas pela escola. Além dessas mudanças, o Ensino Médio Inovador estabelece como referencial as seguintes proposições curriculares e condições básicas para os projetos das escolas:

a) centralidade na leitura, como elemento básico de todas as disciplinas; utilização, elaboração de materiais motivadores e orientação docente voltadas para essa prática;
b) estímulo a atividades teórico-práticas apoiadas em laboratórios de Ciências, Matemática e outros que auxiliem os processos de aprendizagem nas diferentes áreas do conhecimento;
c) fomento de atividades de Arte, com o objetivo de promover a ampliação do universo cultural do aluno;
d) atividade docente com dedicação exclusiva à escola;
e) projeto político-pedagógico implementado com a participação efetiva da comunidade escolar e a organização curricular articulada com os exames do Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Médio.

Com a implantação do Ensino Médio Inovador, essa etapa de formação do jovem será mais interessante e terá um objetivo mais bem definido. Espera-se, pois, superar os que talvez sejam os maiores problemas da educação brasileira: a evasão, o baixo rendimento escolar e a superação das desigualdades de oportunidades educacionais, consolidando assim a identidade dessa etapa educacional e oferecendo um acesso universal e um ensino de qualidade a todos.

Tendo esses elementos como pressupostos é que podemos agora considerar os objetivos específicos do ensino de Matemática no Ensino Médio.

Objetivos gerais do ensino da Matemática no Ensino Médio

Vivemos em uma sociedade tecnológica, informatizada, globalizada e é fundamental que se desenvolva nos alunos do Ensino Médio a capacidade de: comunicar-se em várias linguagens; investigar, resolver e elaborar problemas; tomar decisões, fazer conjecturas, hipóteses e inferências; criar estratégias e procedimentos; adquirir e aperfeiçoar conhecimentos e valores; trabalhar solidária e cooperativamente; e estar sempre aprendendo.

No Ensino Fundamental os alunos tiveram um primeiro contato com vários campos da Matemática, como números e operações, formas geométricas planas e espaciais, grandezas e medidas, iniciação à álgebra, aos gráficos e às noções de probabilidade. Agora, no Ensino Médio, é o momento de ampliar e aprofundar tais conhecimentos, estudar outros temas, desenvolver ainda mais a capacidade de raciocinar, de resolver problemas, generalizar, abstrair e de analisar e interpretar a realidade que nos cerca, usando para isso o instrumental matemático.

Mas a Matemática tem características próprias, tem uma beleza intrínseca que deve ser ressaltada na importância dos conceitos, das propriedades, das demonstrações dos encadeamentos lógicos, do seu aspecto dedutivo, fundamentando seu caráter instrumental e validando ou não intuições e conjecturas. Assim, no Ensino Médio é importante trabalhar gradativamente a Matemática também como um sistema abstrato de ideias.

Objetivos específicos do ensino da Matemática no Ensino Médio

As propostas e atividades matemáticas devem possibilitar aos estudantes:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticos e planejar soluções para problemas novos, que exijam iniciativa e criatividade;
- aplicar conhecimentos matemáticos para compreender, interpretar e resolver situações-problema do cotidiano ou do mundo tecnológico e científico;
- desenvolver a capacidade de comunicação de ideias matemáticas por escrito ou oralmente, promovendo sua capacidade de argumentação;
- estabelecer relações, conexões e integração entre os diferentes campos da Matemática para resolver problemas, interpretando-os de várias maneiras e sob diferentes pontos de vista;
- interpretar e validar os resultados obtidos na solução de situações-problema;
- fazer arredondamentos e estimativas mentais de resultados aproximados;
- desenvolver atitudes positivas em relação à Matemática, como autonomia, confiança em relação às suas capacidades matemáticas, perseverança na resolução de problemas, gosto pela Matemática e pelo trabalho cooperativo;
- analisar e interpretar criticamente dados provenientes de problemas matemáticos, de outras áreas do conhecimento e do cotidiano.

Em relação aos campos da Matemática, os objetivos específicos do ensino de Matemática devem ser os de capacitar o estudante para:

- saber utilizar o sistema de numeração, as operações, suas propriedades e suas regularidades nos diversos conjuntos numéricos;
- empregar corretamente os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do importante conceito de função e de suas várias representações (gráficos, tabelas, fórmulas, etc.);
- conhecer as propriedades geométricas das figuras planas e sólidas e suas representações gráfica e algébrica, bem como reconhecer regularidades nelas;
- compreender os conceitos fundamentais de grandezas e medidas e saber usá-los na formulação e resolução de problemas;
- utilizar os conceitos e procedimentos da Estatística e da Probabilidade, valendo-se para isso da Combinatória, entre outros recursos.

Temas transversais e a Matemática

Na escola, professores e alunos muitas vezes são confrontados por questões envolvendo assuntos atuais e urgentes que precisam ser tratados por toda a comunidade escolar, para atender às demandas da sociedade como um todo ou da própria escola. Os temas transversais trazem ao currículo escolar a possibilidade da abordagem dessas questões por todas as áreas e disciplinas.

É importante destacar que os temas transversais não são novas disciplinas ou novos componentes curriculares a serem acrescidos aos já existentes, mas sim objetos de conhecimento cuja complexidade demanda as perspectivas teóricas e práticas de todos os componentes curriculares, além de incluir saberes extraescolares.

É uma proposta que deve buscar construir uma articulação das diversas áreas de conhecimento, o envolvimento de toda a comunidade escolar, desenvolver as relações interpessoais democráticas, o pensamento crítico e a disposição para intervir na realidade e transformá-la.

Os PCN do Ensino Fundamental apresentam quatro critérios a serem adotados para a seleção de temas transversais: urgência social, abrangência nacional, possibilidade de ensino e aprendizagem e favorecimento da compreensão da realidade e da participação social.

O critério da urgência social aponta para a preocupação de se ter como tema transversal questões que se apresentem como obstáculos ao exercício pleno da cidadania, afrontem a dignidade das pessoas e deteriorem sua qualidade de vida.

O critério da abrangência nacional indica a necessidade de se tratar de questões pertinentes a todo o país.

O critério da possibilidade de ensino e aprendizagem procura nortear a escolha de temas ao alcance da aprendizagem, alicerçada nas experiências pedagógicas, no caso específico da Matemática, nas propostas da Educação Matemática.

O último critério, favorecimento da compreensão da realidade e da participação social, aponta para a importância de os temas transversais possibilitarem aos alunos uma visão ampla e consistente da realidade brasileira de modo que possam assumir atitudes responsáveis, sem excluir a possibilidade de que cada localidade apresente temas relevantes às suas necessidades específicas.

A partir desses princípios, os PCN sugerem alguns temas amplos a serem considerados geradores de discussões na comunidade escolar. A Matemática tem muita contribuição a dar nesse trabalho conjunto e muitas delas já permeiam os assuntos desta coleção.

Os temas transversais podem ser apresentados por meio de situações-problema e trabalhos em equipe. Esses temas aparecem ao longo de toda a coleção, tendo um destaque especial na seção *Outros contextos*. O professor poderá enriquecer suas atividades com esses temas seguindo as orientações dos PCN.

A seguir, discutiremos algumas dessas orientações.

Ética

Com atividades apropriadas, é possível desenvolver no aluno **atitudes** como:

- confiança na própria capacidade de construir e adquirir conhecimentos matemáticos e resolver problemas com eles;
- empenho em participar ativamente das atividades na sala de aula;
- respeito à maneira de pensar dos colegas.

Para isso, é preciso que o professor:

- valorize a troca de experiências entre os alunos;
- promova intercâmbio de ideias;
- respeite o pensamento, a produção e a maneira de se expressar do aluno;
- deixe claro que a Matemática é para todos e não apenas para alguns mais talentosos;
- estimule a solidariedade entre os alunos, superando o individualismo.

O trabalho em duplas ou em equipes é próprio para o desenvolvimento de tais atitudes.

Orientação Sexual

Não cabe ao professor de Matemática dar orientação sexual aos alunos, mas, de modo transversal, poderá propor situações-problema, principalmente envolvendo tabelas e gráficos, a respeito de temas sobre os quais os alunos possam refletir.

Veja alguns exemplos que podem ser explorados:

- estatísticas sobre a incidência de gravidez prematura entre jovens e adolescentes;
- evolução da Aids nos diferentes grupos (jovens, homens, mulheres, homossexuais, etc.);
- estatísticas sobre doenças sexualmente transmissíveis;
- estatísticas sobre prevenção de doenças sexualmente transmissíveis.

É possível também trabalhar com estatísticas e situações-problema que não reafirmem preconceitos em relação à capacidade de aprendizagem de alunos de sexos diferentes, bem como mostrar a diferença de remuneração e cargos de chefia entre homens e mulheres.

Meio Ambiente

Este tema pode e deve ser trabalhado em vários momentos na aula de Matemática. Veja alguns exemplos:

Coleta, organização e interpretação de dados estatísticos, formulação de hipóteses, modelagem, prática da argumentação, etc. são **procedimentos** que auxiliam na tomada de decisões sobre a preservação do meio ambiente.

A **quantificação** permite tomar decisões e fazer investigações necessárias (por exemplo, reciclagem e aproveitamento de materiais).

Áreas, volumes, proporcionalidade e porcentagem são **conceitos** utilizados para abordar questões como poluição, desmatamento, camada de ozônio, etc.

Saúde

Dados estatísticos sobre vários fatores que interferem na saúde do cidadão, quando trabalhados adequadamente na sala de aula, podem conscientizar o aluno e, indiretamente, sua família. Alguns contextos apropriados para a aprendizagem de conteúdos matemáticos são:

- índices da fome, da subnutrição e da mortalidade infantil em várias regiões do país e, em particular, naquela em que vive o aluno;
- médias de desenvolvimento físico no Brasil e em outros países;
- razão médico/população e suas consequências;
- estatísticas sobre várias doenças (dengue, malária, etc.) e como preveni-las;
- levantamento de dados sobre saneamento básico, condições de trabalho, dieta básica, etc.

Pluralidade Cultural

A Matemática foi e é construída por todos os grupos sociais (e não apenas por matemáticos) que desenvolvem habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses. Valorizar esse saber matemático-cultural e aproximá-lo do saber escolar em que o aluno está inserido é de fundamental importância para o processo de ensino-aprendizagem. A Etnomatemática dá grande contribuição a esse tipo de trabalho.

No estudo comparativo dos sistemas de numeração, por exemplo, os alunos poderão constatar a supremacia do sistema indo-arábico e concluir que a demora de sua adoção pelos europeus se deveu também ao preconceito contra os povos de tez mais escura e que não eram cristãos. Outros exemplos poderão ser encontrados ao se pesquisar a produção de conhecimento matemático em culturas como a chinesa, a maia e a romana. Nesse momento entra o recurso da história da Matemática e da Etnomatemática.

Trabalho e Consumo

Situações ligadas ao tema trabalho podem se tornar contextos interessantes a ser explorados na sala de aula: o estudo de causas que determinam aumento/diminuição de empregos; pesquisa sobre oferta/procura de emprego; previsões sobre o futuro mercado de trabalho em função de indicadores atuais; pesquisas dos alunos dentro da escola ou na comunidade a respeito dos valores que os jovens de hoje atribuem ao trabalho.

Às vezes o consumo é apresentado como forma e objetivo de vida, transformando bens supérfluos em vitais e levando ao consumismo. É preciso mostrar que o objeto de consumo – um tênis ou uma roupa "de marca", um produto alimentício ou um aparelho eletrônico, etc. – é fruto de um tempo de trabalho.

Aspectos ligados aos direitos do consumidor também necessitam da Matemática para serem mais bem compreendidos. Por exemplo, para analisar a composição e a qualidade de produtos e avaliar seu impacto sobre a saúde e o meio ambiente, ou para analisar a razão entre menor preço/maior quantidade. Nesse caso, situações de oferta como "compre 3 e pague 2" nem sempre são vantajosas, pois geralmente são feitas para produtos que não estão com muita saída – portanto, não há, muitas vezes, necessidade de comprá-los em grande quantidade – ou que estão com o prazo de validade próximo do vencimento.

Interdisciplinaridade e contextualização

O atual mundo globalizado apresenta muitos desafios ao ser humano, e a educação manifesta a necessidade de romper com modelos tradicionais para o ensino. Essa necessidade foi expressa no relatório da Comissão Internacional sobre a Educação para o Século XXI, no texto "Educação: um tesouro a descobrir", publicado em 1998 por Edições Unesco Brasil. As considerações desse importante documento passaram a integrar os eixos norteadores da política educacional. Os quatro pilares da educação contemporânea citados pela Unesco são: aprender a ser, aprender a fazer, aprender a viver juntos e aprender a conhecer. Esses eixos devem constituir ações permanentes que visem à formação do educando como pessoa e como cidadão. Na relação entre esses quatro pilares é que a interdisciplinaridade e a contextualização se inserem na ousadia de novas abordagens de ensino na Educação Básica.

Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade, como a própria palavra recomenda, não anula as disciplinas, mas sugere que elas dialoguem entre si. O caráter puramente disciplinar do ensino formal tem dificultado a aprendizagem do aluno e não tem estimulado o desenvolvimento de seu pensamento, a habilidade de resolver problemas e de estabelecer conexões entre os fatos e conceitos, isto é, de "pensar" sobre o que está sendo estudado. De acordo com Edgar Morin (2001), "o parcelamento e a compartimentação dos saberes impedem o aluno de apreender o que está tecido junto".

É importante considerar que a interdisciplinaridade supõe um eixo integrador com as disciplinas de um currículo para que os alunos aprendam a olhar o mesmo objeto sob diferentes perspectivas. Os PCN destacam que:

O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com os outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, de ampliação, [...].

PCNEM (1999, p. 88).

Dessa forma, trabalhando de modo interdisciplinar, propõe-se que a organização e o tratamento dos conteúdos do ensino e as situações de aprendizagem sejam feitos destacando-se as múltiplas interações entre as várias disciplinas do currículo, superando sempre que possível a fragmentação entre elas. É sabido que algumas disciplinas se identificam, se aproximam, têm muitas afinidades (como, por exemplo, a Matemática e a Física), enquanto outras se diferenciam em vários aspectos: pelos métodos e procedimentos que envolvem, pelo objeto que pretendem conhecer ou ainda pelo tipo de habilidade que mobilizam naquele que as investiga, conhece, ensina ou aprende.

Os professores de uma mesma classe podem promover um ensino interdisciplinar por meio de um projeto de investigação, um plano de intervenção ou mesmo de uma atividade. Nesse caso, são identificados os conceitos e procedimentos de cada disciplina que podem contribuir nessa tarefa, descrevendo-a, explicando-a, prevendo soluções e executando-a. Os conceitos podem ser formalizados, sistematizados e registrados no âmbito das disciplinas que contribuem para o seu desenvolvimento, ou seja, a interdisciplinaridade não pressupõe a diluição das disciplinas. A tarefa a ser executada é que é interdisciplinar na sua concepção, execução e avaliação.

A linguagem matemática é comum às demais áreas do currículo. Por exemplo, os conceitos das Ciências Naturais (Física, Química e Biologia) e as leis naturais geralmente são expressos pela linguagem matemática.

Esta coleção procura dar relevo a vários modelos matemáticos que favorecem a interdisciplinaridade, tais como: a função linear e as situações de proporcionalidade direta; a função quadrática e o movimento uniformemente variado; a função exponencial e vários fenômenos naturais; a probabilidade e a genética; as grandezas e medidas e as práticas científicas, tecnológicas e sociais; as funções trigonométricas e os fenômenos periódicos; etc.

Contextualização

Tratar os conteúdos de ensino de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto pessoal ou social do aluno, dando significado ao que está sendo aprendido, levando-se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Assim, a contextualização ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. Ajuda também a articular a Matemática com os temas atuais da ciência e da tecnologia, bem como a fazer conexões dentro da própria Matemática.

A história da Matemática é também uma importante ferramenta de contextualização ao enfocar a evolução e as crises pelas quais determinados conceitos matemáticos passaram ao longo da história. Grande parte das situações-problema desta coleção é contextualizada. Como exemplo de contexto histórico citamos a crise dos pitagóricos na passagem dos números racionais para os reais, com a introdução dos irracionais, feita no capítulo 1 do volume 1.

A contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada em uma abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial, forçado e restrito. Não se pode entender a contextualização como banalização do conteúdo, mas como recurso pedagógico para tornar a constituição de conhecimentos um processo permanente de formação de capacidades intelectuais superiores. Capacidades que permitem transitar inteligentemente do mundo da experiência imediata e espontânea para o plano das abstrações. Assim, contextualizar é situar um fato dentro de uma teia de relações possíveis em que se encontram os elementos constituintes da própria relação considerada.

Ao assumir essa concepção de contextualização, toma-se a posição de que um trabalho em Matemática, com esse propósito, não tem sua ênfase apenas voltada a situações aplicadas ao cotidiano ou a outras disciplinas, mas também a situações puramente matemáticas. Nesses casos, são propostas investigações que podem ser efetuadas a partir de conhecimentos mais simples que evoluem para situações e conhecimentos mais complexos. Esse tipo de contextualização atende às perspectivas de formação de alunos mais curiosos, estimulando a criatividade e o espírito inventivo.

Etnomatemática e modelagem

O que é Etnomatemática?

O prefixo *etno* tem significado muito amplo, referente ao contexto cultural e, portanto, inclui considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos; *matema* é uma raiz difícil, que vai na direção de explicar, de conhecer, de entender; *tica*, sem dúvida, vem de *techne*, que é a mesma raiz de arte e de técnica. Assim, *Etnomatemática* é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais. Ela procura compreender o saber/fazer matemático ao longo da história da humanidade, contextualizando, em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações.

As práticas matemáticas de feirantes, comerciantes, borracheiros, cirurgiões cardíacos, vendedores de suco de frutas, bicheiros, indígenas, grupos africanos enquadram-se, por exemplo, nos estudos e nas pesquisas da Etnomatemática.

Para se inteirar sobre Etnomatemática, recomendamos a leitura dos livros: *Etnomatemática:* elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrósio, editora Autêntica; e *Etnomatemática*, de Ubiratan D'Ambrósio, editora Ática; e da revista *Educação Matemática em Revista*, da SBEM, ano 1, n. 1, 1993, inteiramente dedicada a esse tema.

O que é modelagem?

Diante de uma realidade complexa, global, podemos reduzir esse grau de complexidade isolando algumas variáveis. Temos, assim, uma representação da realidade sobre a qual refletimos e procuramos construir estratégias de ação. De posse dos resultados obtidos nessa representação, voltamos ao global.

Esse processo de passagem do global para o local e do local para o global, a partir de representações, é geralmente chamado *modelagem*.

Acompanhe esta explicação apresentada por Ubiratan D'Ambrósio:

O esforço de explicar, de entender, de manejar uma porção da realidade, um sistema, normalmente se faz isolando esse sistema e escolhendo alguns parâmetros nos quais concentraremos nossa análise. Com isso, o sistema, com toda a complexidade que ele oferece, fica aproximado por um sistema artificial, no qual se destacam somente alguns parâmetros (algumas qualidades) e se ignoram suas interações com o todo. Dessa maneira considera-se um modelo e passa-se a analisar e refletir sobre o modelo. Este é o processo de modelagem, na sua essência, uma forma de abstração. São exemplos históricos de modelagem em Matemática a Geometria euclidiana, a Mecânica newtoniana, a Óptica geométrica.

A modelagem, visando aplicações, que é mais comum, faz sempre apelo à realidade na qual está inserido o sistema que deu origem ao modelo com o qual trabalhamos, sempre procurando verificar a adequação dos parâmetros selecionados e as implicações dessa seleção no inter-relacionamento desse sistema com a realidade como um todo, isto é, procurando recuperar o sentido holístico que permeia o matema. Não é possível explicar, conhecer, entender, manejar, lidar com a realidade fora do contexto holístico. Têm-se não mais que visões parciais e incompletas da realidade.

A modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da situação real, que, na verdade, estamos elaborando sobre representações. Assim, a modelagem pode ser uma metodologia de ensino muito útil e se enquadra no Programa Etnomatemática, que inclui a crítica, também de natureza histórica, sobre representações, que deve estar subjacente ao processo de modelagem.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: um programa. Educação Matemática em Revista: Blumenau, n. 1, p. 5-11. 1993.

Para saber mais sobre modelagem, recomendamos a leitura de: *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, de Rodney Carlos Bassanezi, editora Contexto; e *Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de Matemática*, de Maria Salett Biembengut, Editora da Universidade Regional de Blumenau (Furb). Veja também um modelo para racionamento de energia elétrica na revista *Educação Matemática em Revista*, da SBEM, ano 8, n. 11, dez. 2001, p. 41-50.

5 Características da coleção

Nesta coleção procurou-se de forma ativa a recordação, a ampliação, o aprofundamento de conceitos e procedimentos já explorados durante o Ensino Fundamental, apresentando-os sob diversos pontos de vista e linguagens: natural, gráfica, em tabelas e simbólica.

Deu-se preferência ao longo da obra para atividades realizadas em dupla ou em equipe, com o intuito de valorizar a iniciativa e a capacidade de decisão dos estudantes, reforçando a ajuda mútua, a ética e a solidariedade.

As situações e problemas apresentados ao longo da coleção têm como pressuposto que as discussões a serem realizadas em sala de aula e os recursos de que o professor pode lançar mão, a partir das resoluções propostas pelos alunos, são os geradores de uma visão de Matemática e de ensino e aprendizagem dessa disciplina como as consideradas até aqui, tanto do ponto de vista dos pesquisadores como das leis e propostas governamentais.

As propostas da coleção visam possibilitar aos jovens alunos a compreensão e interpretação do mundo ao seu redor por meio da ampliação de suas capacidades analíticas e críticas, necessárias para que possam tomar decisões em benefício próprio, de sua comunidade e da sociedade, no complexo processo de participação e cidadania.

Como qualquer outro material didático, o livro deve ser visto como mais um (e não o único) importante auxiliar do professor que busca ensinar Matemática de modo mais significativo para o aluno, com assuntos da vivência dele, desenvolvendo conceitos por meio da compreensão de situações-problema interessantes, contextualizadas ou interdisciplinares.

Em geral, os conceitos são desencadeados a partir de uma situação-problema, como é recomendado hoje pelos educadores matemáticos que trabalham com resolução de problemas; a modelagem matemática é feita pela procura de modelos matemáticos a partir de problemas reais (por exemplo, os números reais como modelo para as medidas; a função linear como modelo dos problemas de proporcionalidade; a função quadrática como modelo do movimento uniformemente variado; a função exponencial como modelo dos juros compostos, da desintegração radioativa, do aumento do número de bactérias em uma cultura, etc.); as abordagens da história da Matemática, ora feitas como introdução de um assunto, ora como leitura para complementação; e o uso da tecnologia de informação, como calculadoras e *softwares*, é realizado em vários momentos da coleção, principalmente nos problemas envolvendo funções, Trigonometria e números reais.

Procurou-se colocar em cada volume conteúdos de diferentes blocos curriculares, permitindo alternância de temas. A organização das atividades foi feita com o objetivo de proporcionar a construção de conceitos, procedimentos e algoritmos, de modo equilibrado e sem descuidar das aplicações.

Sempre que possível, valorizaram-se diferentes enfoques e articulações com diversos campos da Matemática e de outras ciências.

Procurou-se um equilíbrio no emprego da linguagem usual e da linguagem matemática, evitando exacerbar esta última e tornando a comunicação clara e adequada ao nível do aluno a que se destina esta coleção.

A tônica desta coleção é ajudar o aluno a construir e desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que ele está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização. E tudo isso valendo-se de situações-problema contextualizadas e, posteriormente, aplicando os conceitos em situações cotidianas, na própria Matemática ou em outras áreas do conhecimento.

As atividades propiciam, em muitos momentos, fazer a articulação entre os grandes campos temáticos, bem como entre o conhecimento novo e o já abordado. Para exemplificar, citamos funções e progressões, funções (afim e quadrática) e Geometria analítica, sistemas lineares e Geometria analítica, etc.

As retomadas frequentes de conceitos e procedimentos, seguidas de aprofundamento, são outra forma de articulação.

Por exemplo, números reais e números complexos, a equação da reta na função afim e na Geometria analítica, idem para a parábola na função quadrática e na Geometria analítica, os sistemas lineares 2×2 estudados no Ensino Fundamental e os sistemas lineares 3×3 com suas interpretações geométricas, etc.

Sempre que possível, o desencadeamento de novos conceitos e a apresentação de exercícios e problemas são feitos por meio de situações-problema contextualizadas.

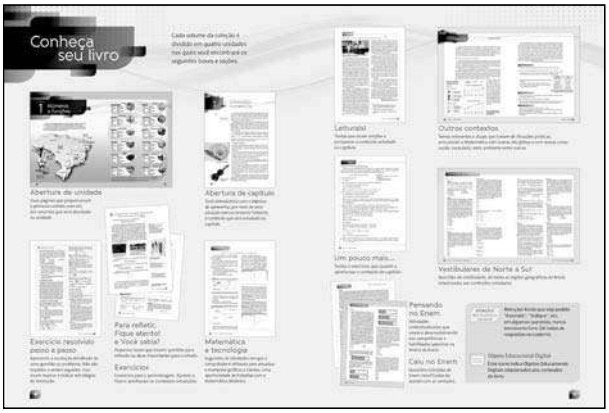
É grande o número de exercícios e problemas desta coleção em que se procurou aplicar conceitos matemáticos na solução de situações de outros componentes curriculares como Física, Química, Geografia, Biologia e outras áreas do conhecimento. Em especial na seção *Outros contextos*.

O enfoque metodológico da coleção, em geral, foi feito por meio da formulação e resolução de problemas, quer desencadeando um novo conceito, quer aplicando os conceitos e procedimentos estudados em situações contextualizadas e/ou interdisciplinares ou mesmo em problemas da própria Matemática.

Seções: definições e algumas sugestões de abordagem

Conheça seu livro

Seção destinada ao aluno, estimulando-o a conhecer os recursos disponíveis em seu material.



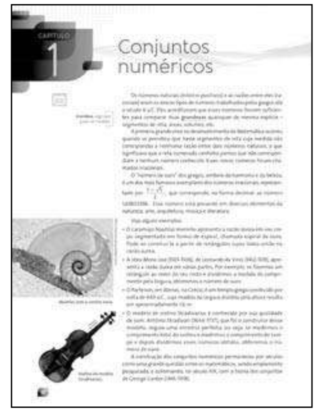
Sumário

Enumeração dos capítulos e das demais seções do volume. Importante para uma visão geral da obra.

Abertura de unidade

Situação contextualizadora de algum assunto/conteúdo que será abordado na unidade. Essa situação é acompanhada de duas questões que visam verificar os conhecimentos prévios do aluno sobre o assunto que será estudado e/ou aguçar a sua curiosidade.

Abertura de capítulo



Texto introdutório cujo objetivo é apresentar o conteúdo a ser trabalhado, situando-o na história e ligando-o, sempre que possível, a algum contexto. No primeiro tópico de conteúdo há uma atividade ou questões que visam permitir que o professor faça uma avaliação diagnóstica de saberes dos alunos se tratar a atividade de modo investigativo.

Para refletir, *Fique atento!* e *Você sabia?*

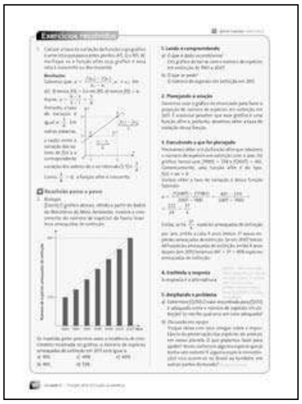
Seções que são dispostas nas laterais das páginas.

Para refletir apresenta questões que visam destacar algo que merece reflexão. São indicadores de investigação a ser realizada de modo que os alunos percebam alguma propriedade ou fato, ou que constatem, descubram, ou provem algo. Pode representar uma complementação do estudo do tópico que está sendo abordado.

Fique atento! apresenta conteúdos que o aluno já estudou e devem ser relembrados ou relacionados com o assunto que está sendo representado ou detalhes importantes que devem ser ressaltados.

Você sabia? apresenta informações interessantes que ampliam o tema em estudo.

Exercícios resolvidos



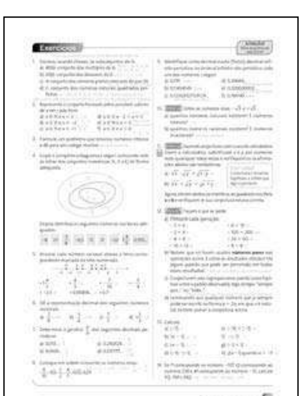
Mostram as várias formas de resolução de uma questão ou problema. **Não** devem ser vistos como modelos que os alunos apenas imitam e dos quais repetem estratégias. Servem apenas para inspirar e indicar possíveis estratégias.

Podem ser resolvidos pelo aluno, como experiência de verificação da compreensão do conteúdo já desenvolvido pelo professor, e comparados com a resolução apresentada no livro. Esse trabalho pode ser realizado em duplas, visando à discussão e ao intercâmbio de experiência.

Também podem ser explorados como um momento de desenvolvimento da leitura e interpretação em Matemática se for pedido ao aluno que explique, com suas próprias palavras, o que está expresso ali, tanto do ponto de vista da solução dada como do ponto de vista da linguagem matemática empregada e do tratamento dado a ela.

Em alguns exercícios resolvidos, explicitamos as fases da resolução de um problema (compreender, planejar, executar, verificar e emitir a resposta); eles são destacados como **passo a passo**. Também mostramos em que direções a questão pode ser ampliada, apresentando em geral uma proposta de discussão em equipe sobre o assunto.

Exercícios



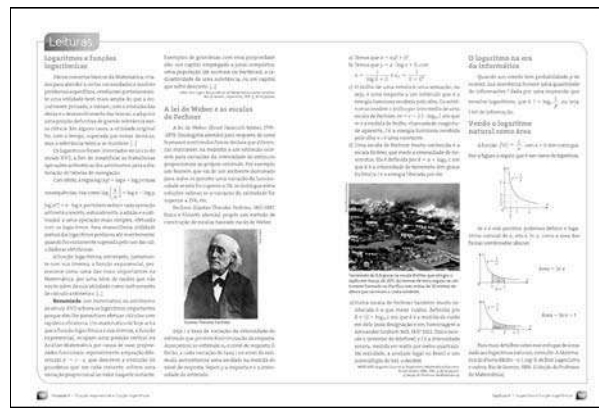
Grande variedade de exercícios e situações-problema para o aluno checar, consolidar e aplicar os conhecimentos recentes. Eles são apresentados com dificuldades graduadas e, sempre que possível, contextualizados com exploração interdisciplinar.

Podem ser trabalhados em sala de aula, dando continuidade ao processo de fixação dos conceitos, ou podem ser distribuídos de forma que sejam resolvidos depois, como tarefa de casa, para sedimentação da aprendizagem.

Alguns exercícios são classificados como desafios. A proposição desse tipo de exercício deve ser feita de modo cuidadoso pelo professor, considerando que nem todo aluno tem pela Matemática um interesse que o leve a sentir atração por esse tipo de atividade.

Também temos exercícios com indicação para serem realizados em duplas ou em equipe, por terem um grau de complexidade maior ou cuja discussão ajudará no entendimento do conceito em estudo.

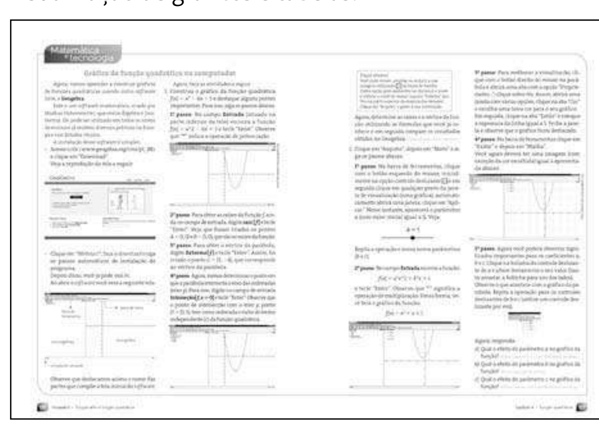
Leitura(s)



Textos que ampliam e enriquecem o conteúdo. Podem ter uma abordagem interdisciplinar.

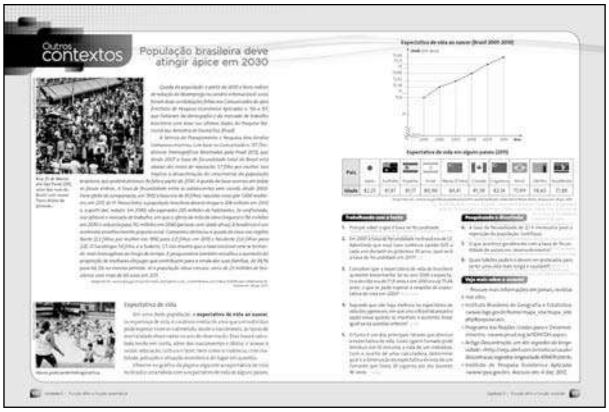
Matemática e tecnologia

Nesta seção apresentamos atividades em que o recurso do computador é utilizado para auxiliar na manipulação e visualização de gráficos e tabelas.



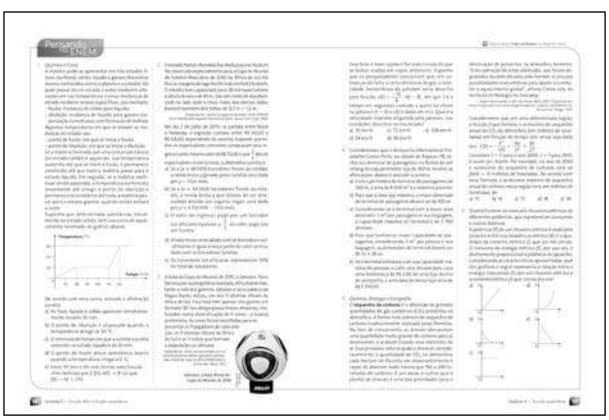
Outros contextos

O foco da seção é colocar o aluno em contato com vários tipos de textos favorecendo a interdisciplinaridade, a experimentação de conteúdos matemáticos e o desenvolvimento da competência leitora. Ela destaca os assuntos ao relacioná-los com situações em que a Matemática estudada tem presença significativa. Embora essas discussões sejam muito mais proveitosas quando feitas em conjunto pela comunidade escolar, o professor poderá promover interessantes investigações matemáticas nos contextos considerados.



Pensando no Enem

Questões direcionadas ao desenvolvimento das habilidades da Matriz de Referência desse exame. As questões propostas são contextualizadas, muitas vezes tratando de fenômenos naturais ou sociais.



Um pouco mais...

Esta seção que aparece no final de alguns capítulos apresenta assuntos adicionais, ou seja, que não são essenciais para a formação do aluno de Ensino Médio. Então, fica a critério do professor abordá-la ou não.

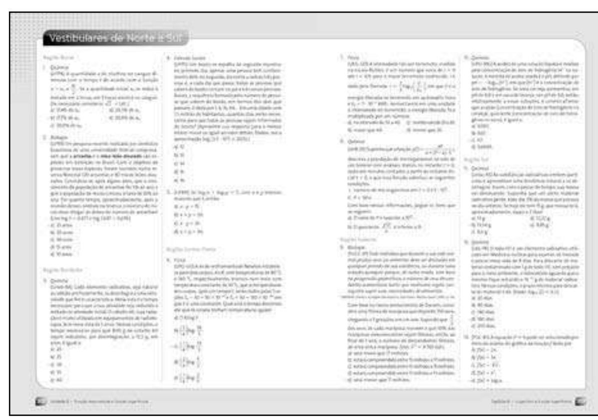
Ao longo dos capítulos indicaremos ao professor, por meio do ícone, alguns outros assuntos que acreditamos ser opcionais, muitos deles não estão relacionados à Matriz do Enem.

A opção de manter esses assuntos no livro se faz necessária para atender alunos que desejem aprofundar conteúdos matemáticos ou se preparar para algum exame específico de acesso ao Ensino Superior.

Ao professor, cabe a responsabilidade de adequar o conteúdo disponível no livro didático à sua realidade. Algumas vezes, "pular" assuntos que não serão obstáculos na aprendizagem do aluno e dedicar o tempo ao trabalho com temas que serão fundamentais na formação do estudante pode ser mais proveitoso. Além disso, nem todos os alunos precisam de um alto grau de aprofundamento, visto que não seguirão carreiras associadas à Matemática.

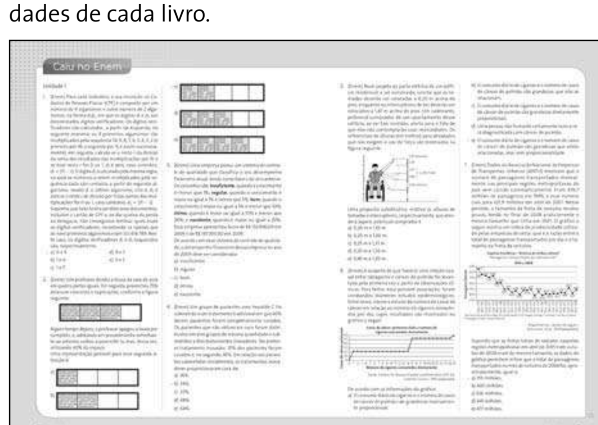
Vestibulares de Norte a Sul

Questões de vestibular, relacionadas ao conteúdo da unidade, separadas por região geográfica.



Caiu no Enem

Questões do Enem classificadas de acordo com as unidades de cada livro.

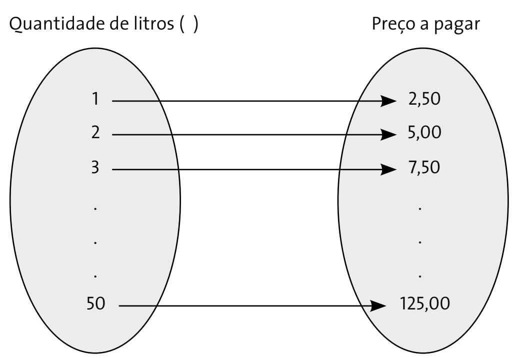


6 Orientações metodológicas e o conteúdo digital na prática pedagógica

Orientações metodológicas

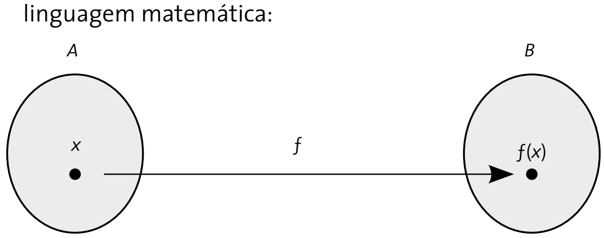
Os avanços conquistados pela Educação Matemática indicam que, para que o aluno aprenda Matemática com significado, é fundamental:

- **trabalhar as ideias, os conceitos matemáticos intuitivamente, antes da simbologia, antes da linguagem matemática**. Por exemplo, antes de ser apresentada em linguagem matemática, a ideia de função deve ser trabalhada de forma intuitiva com o aluno. Uma situação-problema que torna isso possível é: "Considere a quantidade de litros de gasolina e o respectivo preço a pagar:



O preço a pagar é dado em função da quantidade de litros que se coloca no tanque, ou seja, o preço a pagar depende do número de litros comprados".

Depois desse trabalho intuitivo calcado na elaboração de conceitos é que, pouco a pouco, vamos introduzindo a linguagem matemática:



$$f: A \to B$$
$$x \to f(x)$$

- "A cada x de A corresponde um único $f(x)$ de B, levado pela função f."
- **que o aluno aprenda por compreensão**. O aluno deve **atribuir significado ao que aprende**. Para isso, deve saber o porquê das coisas, e não simplesmente mecanizar procedimentos e regras. Por exemplo, não basta dizer que o número racional 0,3333... é igual a $\frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$; é preciso, para a sua compreensão, saber por que isso ocorre, fazendo, por exemplo:

  $x = 0{,}3333... \Rightarrow 10x = 3{,}333... = 3 + 0{,}333... \Rightarrow$

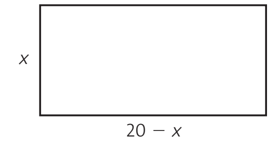
  $\Rightarrow 10x = 3 + 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

- **estimular o aluno a pensar, raciocinar, criar, relacionar ideias, descobrir e ter autonomia de pensamento**. Em lugar de simplesmente imitar, repetir e seguir o que o professor fez e ensinou, o próprio aluno **pode e deve fazer Matemática**, descobrindo ou redescobrindo por si só uma ideia, uma propriedade, uma maneira diferente de resolver uma questão, etc. Para que isso ocorra, é preciso que o professor crie oportunidades e condições para o aluno descobrir e expressar suas descobertas. Por exemplo, desafios, jogos, quebra-cabeças, problemas curiosos, etc. ajudam o aluno a pensar logicamente, a relacionar ideias e a realizar descobertas;
- **trabalhar a Matemática por meio de situações-problema que o façam realmente pensar, analisar, julgar e decidir-se pela melhor solução**.

  Vamos destacar o que consideramos ser um problema matemático. Para alguns autores é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. Outros o definem como uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação. Outros ainda destacam que problema é uma situação na qual um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para tal alguma estratégia em particular. De modo geral, podemos afirmar que existe um problema quando há um objetivo a ser alcançado e não sabemos como atingir esse objetivo, isto é, existe um problema quando há um resultado – conhecido ou não – a ser demonstrado utilizando conhecimentos matemáticos.

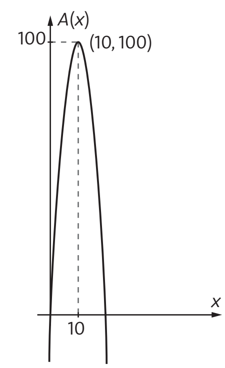
  No plano didático, faz-se a hipótese que existem problemas adequados que permitem a aquisição de conceitos novos e se inscrevem em uma organização de ensino-aprendizagem eficaz para a maioria dos alunos. Uma organização assim foi apresentada por Douady (1984) em sua teoria conhecida como *Dialética Ferramenta-Objeto*. Para ela, em atividades matemáticas, ao resolvermos um problema, podemos considerá-lo resolvido se pudermos fundamentar suas explicações de acordo com um sistema de validação próprio dos matemáticos. Nessa tentativa, criamos conceitos que exercem o papel de ferramentas que servirão à resolução do problema. Quando os descontextualizamos de modo que possam ser reutilizados, tornamo-los um objeto do saber.

Douady chama de dialética ferramenta-objeto ao processo de resolução de problemas, no qual temos as fases:
Fase 1: Antigo – Mobilização de conhecimentos antigos, que funcionam como ferramentas, para resolver, ao menos em parte, o problema.
Fase 2: Pesquisa – Dificuldade em resolver o problema por completo, e novas questões acabam sendo colocadas em jogo. Essas novas questões levam à procura de novos meios para a resolução do problema.
Fase 3: Explicitação – Exposição dos trabalhos realizados, das dificuldades e dos resultados obtidos, sendo as produções discutidas coletivamente com a classe. Essa explicitação possibilita ao professor criar debates sobre os conhecimentos antigos, que estão sendo mobilizados, e sobre os novos, que estão sendo gerados implicitamente, sem que se crie uma situação de bloqueio. Esses debates servem para validar alguns conhecimentos produzidos nessa fase, e permitem aos alunos reconhecer procedimentos corretos ou refletir sobre procedimentos incorretos.
Fase 4: Institucionalização – Institucionalizam-se os novos conhecimentos como objetos de saber matemático. O professor ressalta os conhecimentos que devem ser retidos e explicita as convenções de uso. Trata-se de um meio de constituição de um saber da classe. Para cada aluno, constitui uma maneira de estabelecer pontos de referência para seu próprio saber e, dessa forma, assegurar o progresso de seus conhecimentos.
Fase 5: Familiarização – É o momento de resolver exercícios utilizando as noções recentemente institucionalizadas como ferramentas explícitas. Esses exercícios, simples ou complexos, colocam em jogo apenas o que é conhecido. Os problemas propostos nessa fase destinam-se, segundo Douady, a desenvolver hábitos e práticas, a integrar o saber social com o saber do aluno, pois o aluno ainda precisa colocar à prova em novas experiências, eventualmente sozinho, os conhecimentos que julga ter alcançado e esclarecer para si mesmo o que realmente sabe.
Fase 6: Novo problema – Os alunos são colocados à prova para utilizarem os novos conhecimentos em situações mais complexas que envolvam outros conceitos, sejam eles conhecidos, sejam visados pela aprendizagem. Os conhecimentos novos adquirem, agora, o estatuto de antigos, em um novo ciclo da dialética ferramenta-objeto. De acordo com Douady, para a aprendizagem de um conceito ou propriedade, muitos ciclos podem ser necessários.
Por exemplo, a seguinte situação-problema poderá desencadear o estudo da função quadrática: “Se quisermos cercar um terreno de forma retangular com uma tela de 40 m de comprimento, de modo a cercar a maior área possível, quais devem ser as dimensões do terreno?”.
Como o perímetro é de 40 m, as dimensões do terreno são:



perímetro = 40 m

Área:
$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2 = -x^2 + 20x \Rightarrow$
$\Rightarrow A(x) = -x^2 + 20x$ (modelo matemático para esta situação)
Nesse caso, temos a função quadrática $f(x) = 2x^2 + 20x$, cujo gráfico é dado a seguir.



O ponto de máximo da parábola (10, 100) dará a solução do problema. Assim, o terreno que satisfaz às condições do problema é de forma quadrada (o quadrado é um caso particular de retângulo), de lado igual a 10 m e área igual a 100 m^2. É consenso entre os educadores matemáticos que a capacidade de pensar, de raciocinar e de **resolver problemas** deve constituir um dos principais objetivos do estudo da Matemática;

- **trabalhar o conteúdo com significado, levando o aluno a sentir que é importante saber aquilo para sua vida em sociedade ou que o conteúdo trabalhado lhe será útil para entender o mundo em que vive**. Por exemplo, ao trabalhar as diversas funções e seus gráficos relacionando-os com a vivência e com os fenômenos das Ciências Naturais, ao resolver problemas de juros compostos usando logaritmos, ao coletar dados, fazer tabelas, gráficos e interpretá-los, ao estudar Probabilidade com a Genética da Biologia, etc., o aluno percebe que tudo isso tem sentido em sua vida presente e futura. Para que o aluno veja a Matemática como um assunto útil e prático e possa apreciar o seu poder, precisa perceber que ela está presente em praticamente tudo e é aplicada para resolver problemas do mundo real e entender uma grande variedade de fenômenos;
- **valorizar a experiência acumulada pelo aluno dentro e fora da escola**. É preciso lembrar que, quando o aluno chega ao Ensino Médio, ele já viveu intensamente pelo menos até seus 14 anos de idade. A partir dessa vivência, o professor deve iniciar o trabalho de construir e aplicar novos conceitos e procedimentos matemáticos, dando continuidade ao que o aluno já aprendeu no Ensino Fundamental e na vida. Detectar os conhecimentos prévios dos alunos para, com base neles, desenvolver novos conhecimentos contribui para uma aprendizagem significativa;

- **estimular o aluno a fazer cálculo mental, estimativas e arredondamentos, obtendo resultados aproximados**. Por exemplo, quando o aluno efetua a divisão 306   3 e coloca 12 como resultado, ele evidencia que não tem sentido numérico, não sabe arredondar ($300 \quad 3 = 100$; $6 \quad 3 = 2$ e, portanto, $306 \quad 3 = 102$), enfim, falta-lhe a habilidade de cálculo mental. Muitas vezes, em situações cotidianas, mais vale saber qual é o resultado aproximado do que o resultado correto propriamente dito;
- **considerar mais o processo do que o produto da aprendizagem – "aprender a aprender" mais do que levar em conta resultados prontos e acabados**. É muito mais importante valorizar a maneira como o aluno resolveu um problema, principalmente se ele o fez de maneira autônoma, original, em vez de simplesmente verificar se acertou a resposta. O mesmo se pode dizer sobre o modo de realizar operações, medições, resolver equações e sobre as maneiras de observar e descobrir propriedades e regularidades em algumas formas geométricas. Sempre que possível, devemos analisar diferentes resoluções de um mesmo problema;
- **compreender a aprendizagem da Matemática como um processo ativo**. Os alunos são pessoas ativas que observam, constroem, modificam e relacionam ideias, interagindo com outros alunos e outras pessoas, com materiais diversos e com o mundo físico. O professor precisa criar um ambiente de busca, de construção e de descoberta e encorajar os alunos a explorar, desenvolver, levantar hipóteses, testar, discutir e aplicar ideias matemáticas. As salas de aula deveriam ser verdadeiras salas-ambiente de Matemática, equipadas com grande diversidade de materiais instrucionais que favorecessem a curiosidade, a aprendizagem matemática e o "fazer Matemática". Esse "fazer Matemática" pode ser estimulado apresentando-se atividades investigativas ao aluno. Uma atividade de investigação matemática diferencia-se das demais por ser uma situação-problema desafiadora e aberta, possibilitando aos alunos mobilizarem sua intuição e conhecimentos antigos em alternativas diversas de exploração. Esse tipo de atividade de ensino e aprendizagem:

> [...] *ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor* [...]
>
> PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23.

Tendo como pressuposto que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões, as atividades de investigação podem estar presentes em todos os eixos de conteúdos, contribuindo para um trabalho mais dinâmico e significativo. Chamar o aluno a agir como um matemático não implica obrigatoriamente trabalhar com problemas muito difíceis. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) destacam que, pelo contrário, investigar significa trabalhar com questões que nos rodeiam e, por isso, constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Assim, é em torno de um ou mais problemas que uma investigação matemática se desenvolve, porém, as descobertas que ocorrem durante a busca da solução podem ser tão ou mais importantes que ela.

Em toda atividade de investigação deve ser dado tempo e oportunidade ao aluno para organizar e desenvolver seus modos de pensar, expressá-los aos colegas e ao professor e registrá-los utilizando linguagem matemática adequada. Dessa forma, o aluno deve adquirir confiança na sua capacidade de "fazer Matemática" e tornar-se apto a resolver problemas matemáticos, isso porque aprendeu a pensar e a se comunicar matematicamente.

No entanto, isso não quer dizer que as atividades matemáticas dos alunos se restrinjam apenas às investigativas; as fases da dialética ferramenta-objeto de Douady já indicam que depois dos problemas de investigação o professor deve abordar problemas de familiarização do novo conhecimento, em diferentes domínios matemáticos e contextos. Assim, o tempo didático do professor acaba por se tornar pequeno, exigindo que outras atividades e problemas sejam desenvolvidos como tarefa de casa, de modo que ocorra a fixação e a manutenção dos conhecimentos construídos;

- **utilizar a história da Matemática como um excelente recurso didático**. Comparar a Matemática de diferentes períodos da história ou de diferentes culturas (Etnomatemática). Por exemplo, pode-se contar a época na qual os pitagóricos só conheciam os números racionais e acreditavam apenas na existência dos segmentos comensuráveis (um pode ser medido pelo outro e a medida é expressa por um número racional). Ao medir a diagonal do quadrado de lado igual a uma unidade, usando esse lado como unidade de medida, surgem os números irracionais $\left(\sqrt{2}\text{, no caso}\right)$ e os segmentos incomensuráveis: $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$
  O lado do quadrado e a diagonal desse quadrado são segmentos incomensuráveis entre si;
- **trabalhar o desenvolvimento de uma atitude positiva em relação à Matemática**. Reforçar a autoconfiança do aluno na resolução de problemas; aumentar o interesse por diferentes maneiras de solucionar um problema; levar o aluno à observação de características e regularidades de números, funções, figuras geométricas, etc. Sensibilizar o aluno para organizar, argumentar logicamente e perceber a beleza intrínseca da Matemática (simetrias, regularidades, logicidade, encadeamentos lógicos, etc.);
- **utilizar jogos**. Os jogos constituem outro excelente recurso didático, pois podem possibilitar a compreensão de regras, promover interesses, satisfação e prazer, formar hábitos e gerar a identificação de regularidades. Além disso, facilitam o trabalho com símbolos e o raciocínio por analogias;

- **enfatizar igualmente os grandes eixos temáticos da Matemática – Números e Funções (Álgebra), Espaço e Forma (Geometria), Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação (Estatística e Probabilidade) – e, de preferência, trabalhá-los de modo integrado**;
- **trabalhar os temas transversais (Ética, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo) de modo integrado com as atividades de Matemática, por meio de situações-problema**.

Recursos digitais na prática pedagógica

Atualmente já não há dúvidas sobre a necessidade do uso das novas tecnologias em sala de aula. Novas que já estão ficando velhas, de acordo com o pesquisador de processos de ensino-aprendizagem por meio do computador, José Armando Valente. Para ele, a possibilidade de junção de diferentes mídias em um só artefato: TV, vídeo, computador, internet, poderá ter um impacto ainda maior no processo de ensino-aprendizagem, causando uma revolução a ser enfrentada pelos educadores.

Nessa revolução, ele considera que dois aspectos devem ser considerados na implantação desses recursos na educação, o primeiro é que os conhecimentos técnicos e pedagógicos devem crescer simultaneamente, um demandando novas ideias do outro. O outro é que o educador precisa ponderar sobre o que cada uma dessas facilidades tecnológicas tem a oferecer e como pode ser explorada em diferentes situações educacionais. Ora a televisão pode ser mais apropriada, ora o computador pode ser mais interessante, dependendo dos objetivos que se deseja atingir ou do que esteja sendo explorado. Mesmo o uso do computador permite uma grande variação nas atividades que professores e alunos podem realizar. No entanto, ressalta que:

> [...] *essa ampla gama de atividades pode ou não estar contribuindo para o processo de construção de conhecimento. O aluno pode estar fazendo coisas fantásticas, porém o conhecimento usado nessas atividades pode ser o mesmo que o exigido em uma outra atividade menos espetacular. O produto pode ser sofisticado, mas não ser efetivo na construção de novos conhecimentos.* (VALENTE, [s.d.], p. 23.)

Esse mesmo autor destaca que situações vividas com o emprego de recursos digitais contribuem para que o cotidiano escolar não seja visto como espaço de rotina e de repetição, mas como espaço da reflexão, da crítica e da autoexpressão, promovendo assim um novo sentido para a aprendizagem escolar.

Considerando como um dos objetivos finais do ensino o de preparar estudantes para que se tornem futuros profissionais competentes e aprendizes autônomos, existe um argumento bastante convincente a favor do uso de tecnologias. Cada vez mais, cientistas e outros profissionais estão implantando sistemas colaborativos baseados em conexões via internet. Este meio de comunicação vem ganhando força e importância no mundo profissional. O trabalho cooperativo é fundamental para a conquista de solução de problemas complexos, por conseguinte, a aprendizagem colaborativa é um passo determinante no sentido de preparar o jovem estudante para a futura realidade profissional.

O contraponto deste argumento se situa no fato aceito em educação que diz que, no ensino, diferentemente do que se poderia esperar em outras áreas, o "algo a mais" pode representar "algo a menos". No caso dos recursos digitais, este "a mais" pode estar na forma de sobrecarga de informação, o que atrapalharia o processo de conexões de que a aprendizagem carece para se estabelecer, se transformando, portanto, em "a menos".

A facilidade pela qual o aluno se desvia de seu objetivo e se distrai em relação às suas metas quando navega na internet ou manipula alguma ferramenta tecnológica pode ser um problema para alguns professores. A autodisciplina é qualidade indispensável nessas ocasiões e evita a perda de foco, contudo, não há como assegurar que o aluno já tenha se apropriado desta qualidade. Sendo assim, o uso dos recursos digitais em ensino deve ser mediado por um profissional da educação que exercerá o papel de orientar, chamar atenção, discutir, enfim, direcionar o rumo da aprendizagem obtida por intermédio desses recursos.

A exploração proveitosa de recursos tecnológicos conectados à rede exige a mobilização de habilidades relacionadas à pesquisa que, talvez, o estudante ainda não seja capaz de demonstrar. Isso porque as informações disponíveis deverão ser analisadas pelo sujeito que a acessa: se são confiáveis ou não, relevantes ou irrelevantes, claras ou obscuras, suficientes ou não suficientes, etc. Para uma análise como essa, ele deverá lançar mão de habilidades como identificar, selecionar, comparar, relacionar, enfim, tomar ações e decisões que o capacitem a navegar no "mar" de possibilidades representado pela internet.

Importa destacar que a utilização de recursos digitais na educação não prescinde da necessidade de colocar o aluno como o sujeito de seu processo de aprendizagem, isto é, em procedimentos de investigação de modo que de fato ocorram atos criadores de conhecimento. E o professor de sala é quem pode observar no aluno indicativos que vão além das possibilidades virtuais de interação. Ele fica atento aos sinais de motivação ou indiferença, de entendimento ou dúvida, de simpatia ou antipatia para, a partir daí, criar vínculos intelectuais por meio dos quais a relação dialógica, essencial à aprendizagem, se estabelecerá.

Assim tratado, o uso de recursos digitais passa a ser parte integrante do trabalho de investigação, pois muitos dos problemas podem ser abordados com o apoio de *softwares* e objetos educacionais digitais especialmente elaborados para isso. A seguir indicamos alguns *softwares* que estão sendo alvo de pesquisas bem-sucedidas em Educação Matemática com respectivos *sites* em que há exemplos de utilização em sala de aula.

- **Cabri Geometre II**

  Este é um *software* educacional desenvolvido na Universidade Joseph Fourier de Grenoble (França) por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain. Trata-se de um programa que facilita o estudo da Geometria plana, da Geometria analítica e da Geometria espacial. Por se tratar de um *software* interativo de interface amigável, permite, com pouco esforço, a construção precisa de modelos que exigiriam grande perícia se desenhados na lousa ou em papel. Além da precisão e da beleza, as construções realizadas no Cabri, embora visuais, obedecem às relações matemáticas que as disciplinam, possibilitando a transformação do visual da página, apresentando um dinamismo que muitas vezes convence mais do que qualquer demonstração de resultados. As normas que gerenciam o Cabri são fáceis e suas ferramentas básicas estão à disposição do usuário na tela de trabalho: basta escolher a ferramenta clicando sobre o ícone desejado.

  Exemplos de utilização desse *software* podem ser encontrados em: <www.cabri.com.br/atividades/atividades.htm> e <www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/c15.pdf>. Acessos em: 8 jan. 2013.

- **Geogebra**

  Criado por Markus Hohenwarter, é um *software* de Matemática dinâmica gratuito e desenvolvido para o ensino-aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino. Ele reúne recursos de Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Probabilidade, Estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, ele permite apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS. No livro do aluno apresentamos algumas atividades com esse s*oftware*.

  Os *sites* <www.pucsp.br/geogebrasp/>, do Instituto GeoGebra de São Paulo, e <www.geogebra.im-uff.mat.br/bib.html>, do Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro, fornecem os *links* para *downloads* tanto do *software* como dos tutoriais de uso, além de exemplos de aplicações para sala de aula. Acessos em: 8 jan. 2013.

  Outros exemplos de uso podem ser encontrados em: <http://pt.wikibooks.org/wiki/Aplicações_do_GeoGebra_ao_ensino_de_Matemática/Atividades>. Acesso em: 8 jan. 2013.

Outros *softwares*, não tão estudados por pesquisadores, mas de que você poderá fazer *download* ou sugerir aos alunos que o façam para realizarem alguma investigação sobre gráficos (3D Grapher) ou cálculo de áreas de figuras planas e áreas e volumes de sólidos (Cavo), são encontrados no *site* <www.cienciamao.usp.br>. Acesso em: 8 jan. 2013. Nesse *site* você poderá encontrar também atividades envolvendo temas interdisciplinares à Física e à Química.

Linguagem digital

A linguagem digital voltada ao ensino utiliza três termos correntes, apesar de não haver muito rigor a respeito de seus significados, convém fazer a distinção entre eles: conteúdo digital, ferramenta digital e tecnologia digital. Conteúdo digital é o correspondente ao conteúdo escolar, mas que pode ser disponibilizado na rede, como textos, hipertextos, figuras, gráficos, entre outros. Ferramenta digital é o meio pelo qual o conteúdo digital é disponibilizado na rede, como, filmes, áudios, jogos, animações, simuladores, hipertextos, *sites*, redes sociais, fóruns, *blogs*, entre outros. Tecnologia digital é o instrumento que permite a conexão dessas ferramentas e o respectivo acesso ao conteúdo digital, como computadores, *tablets*, telefones, lousas digitais, entre outras.

A utilização de todos estes recursos digitais no ensino é cada vez mais frequente e facilita a comunicação entre os agentes do processo didático, além de ampliar as possibilidades pedagógicas podem permitir ou não a interação com o usuário.

Animação, por exemplo, é uma representação dinâmica de um processo qualquer, como um fenômeno natural ou outro evento, mas que não admite a interação com o usuário, ela funciona como um filme feito em linguagem computacional. Já os simuladores admitem a interatividade com o usuário, que pode alterar parâmetros e então modificar a dinâmica em curso.

Vídeo-aulas não interativas, dirigidas tanto a alunos do ensino básico quanto à formação docente, também ajudam a compor o conteúdo digital voltado ao ensino que pode ser encontrado na rede. Grandes universidades, nacionais e internacionais, disponibilizam gratuitamente, ou não, cursos inteiros pela internet. Alguns deles são oficiais e atribuem titulação de graduação para o aluno, os conhecidos cursos de EAD (Ensino à Distância). Universidades públicas e outras instituições públicas e privadas ainda se valem dos ambientes virtuais de aprendizagem (AVA) para divulgar calendários, disponibilizar recursos didáticos digitais, além de organizar debates e discussões via fóruns síncronos ou assíncronos para seus alunos. Além disso, professores e alunos contam com um grande acervo de demonstrações experimentais gravadas em vídeo e disponibilizadas de forma gratuita pelos canais da rede, além de enciclopédias virtuais, dicionários *on-line*, entre tantos outros recursos.

As vantagens e prejuízos dos recursos digitais são causados pelo uso que se faz deles, ou seja, devemos evitar a noção ilusória de que a simples presença do recurso digital garante melhores resultados de aprendizagem. Em contrapartida, o seu uso planejado e apropriado tem se mostrado eficiente em melhorar o ensino em vários cenários educacionais.

O uso da calculadora

A presença de telefones celulares na sala de aula, principalmente no Ensino Médio, tem se tornado um problema para as escolas, mesmo considerando sua proibição por leis estaduais. No entanto, em vez de lutarmos contra eles podemos buscar desenvolver propostas em que eles sejam usados pelos alunos em suas atividades investigativas. É preciso considerar que os celulares estão cada vez mais equipados, contando com recursos como câmeras, que fotografam e filmam com boa qualidade de som e imagem; gravadores de áudio; calendários; comunicadores instantâneos; calculadoras e tantas outras ferramentas que precisam ser aproveitadas na escola.

Não existem ainda modelos de sua utilização, mas atividades geralmente propostas com calculadoras podem ser realizadas pelas presentes nos celulares. Exemplos de utilização de calculadoras no Ensino Médio:

- *Quando os cálculos numéricos são apenas auxiliares*.
  A calculadora é recomendada quando os cálculos numéricos são apenas auxiliares na questão a ser resolvida, liberando mais tempo para o aluno pensar, criar, investigar, conjecturar, relacionar ideias, descobrir regularidades, etc. O tempo gasto desnecessariamente com cálculos longos e enfadonhos pode ser usado na busca de novas estratégias para a resolução de problemas, na busca de soluções de um desafio, de um jogo, etc.
- *Para melhorar a estimativa dos alunos por meio de jogos*.
  A calculadora é recomendada também para aguçar a capacidade de estimativa do aluno. Há várias possibilidades de jogos do tipo "estime e confira". Por exemplo, de um conjunto de 15 a 20 números de três algarismos, um aluno escolhe três deles e estima sua soma. Outro aluno escolhe mais três e também estima sua soma. Em seguida, conferem seus cálculos com a calculadora. Quem se aproximar mais do resultado correto marca um ponto. Vence quem fizer 5 pontos primeiro. Algo semelhante pode ser feito com as demais operações, usando números naturais inteiros, racionais e irracionais.
- *Para investigar propriedades matemáticas*.
  Analisando padrões ou regularidades que ocorrem em situações ou em tabelas com muitos dados, o aluno pode levantar hipóteses, fazer conjecturas, testá-las e descobrir propriedades. Por exemplo, ao preencher tabelas usando calculadora, os alunos podem descobrir propriedades da multiplicação e da divisão, que, depois, o professor poderá provar para eles, generalizando.
  Assim:

Fator	15	15	15
Fator	12	24	48
Produto	?	?	?

Dividendo	13	26	52
Divisor	5	10	20
Quociente	?	?	?

"Quando se dobra um fator, o produto também dobra."
"Quando se dobram o dividendo e o divisor, o quociente permanece o mesmo."
Outro exemplo é quando os alunos trabalham com operações de radicais usando calculadora:

a	*b*	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
5	3	?	?	?	?
7	10	?	?	?	?
3	1	?	?	?	?

a	*b*	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a + b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a - b}$
5	3	?	?	?	?
7	10	?	?	?	?
3	1	?	?	?	?

Eles poderão conjecturar que, por exemplo,
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ e $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a \cdot b}$. Depois, o professor poderá demonstrar que essas conjecturas estão corretas.

- *Para trabalhar com problemas da realidade*.
  Ao trabalhar com problemas que apresentam dados reais, em geral os números são muito "grandes" ou "pequenos" e, às vezes, são muitos itens e muitas operações a realizar com eles. Isso faz com que a calculadora se torne um instrumento fundamental para aliviar o aluno do trabalho manual, mecânico, e permitir que ele se concentre mais no essencial, que são o raciocínio, as estratégias e as descobertas. Por exemplo, o índice de massa corpórea (IMC) de uma pessoa é dado pela fórmula IMC $= \frac{m}{h^2}$, em que *m* é a massa (em quilogramas) e *h* é a altura (em metros). Outro exemplo: Gastam-se 11,2 cm de arame de aço galvanizado para fabricar um clipe de papel. Com 100 m desse arame, quantos clipes serão fabricados aproximadamente?

Mais alguns exemplos poderão ser encontrados em: <http://www.univates.br/ppgece/docs/PT_Ieda.pdf> e <http://educacao.uol.com.br/planos-de-aula/medio/matematica-atividades-com-calculadoras.htm>. Acessos em: 8 jan. 2013.

Outras ideias de emprego dos celulares podem ser consideradas, por exemplo, o uso de fotografia para explorar aspectos geométricos de vistas possíveis de sólidos (é possível fotografar um cubo de modo que a vista seja um hexágono?), no uso de torpedos para a troca de informações entre grupos de trabalho para compartilhamento de pesquisas pela internet ou no acesso a vídeos disponíveis na internet.

7 O novo Enem

As exigências presentes no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) se constituem em uma das demandas de nossa sociedade para a continuidade dos estudos.

O Enem foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica, cuja ideia central considera os princípios da LDB (Lei n. 9 394/96), que preconiza, dentre as funções do Ensino Médio, o domínio dos princípios científicos, tecnológicos que orientam a produção moderna, bem como a compreensão do conhecimento das formas contemporâneas de uso e aplicação das linguagens, da utilização dos códigos e o domínio e a aquisição da organização da reflexão filosófica e sociológica para a vida em sociedade.

O pressuposto desse modelo de avaliação representa uma tentativa de análise da qualidade da oferta de Ensino Médio, considerando as expectativas presentes na LDB. Desse modo, a princípio, podiam participar do exame os alunos que estavam cursando ou que tinham concluído o Ensino Médio em anos anteriores, independentemente da idade ou do ano de término do curso. Já nos primeiros anos de aplicação, diversas instituições de Ensino Superior começaram a utilizar o Enem como uma alavanca para a pontuação obtida por aqueles que prestavam vestibular.

Em 2009, o Ministério da Educação alterou de forma significativa a proposta do exame: ele passou a ser um instrumento de política pública para conduzir e alinhar o currículo de Ensino Médio em todo o país.

O Ministério da Educação considera que os vestibulares de ingresso para a maioria das instituições de Ensino Superior, apesar de bem-sucedidos na seleção dos melhores para ingressar em seus quadros discentes, acabam por criar disparidades no sistema de Ensino Médio nacional e na sociedade. As exigências feitas por esses concursos de mérito exercem uma influência indesejada sobre os currículos das instituições de Ensino Médio, que acabam por submeter-se a esses requisitos, sem oferecer sentido ao que se ensina.

Outro fator negativo apontado pelo Ministério foi a falta de mobilidade de estudantes que resulta da descentralização dos vestibulares das diversas instituições públicas de Ensino Superior. A mudança realizada no Enem visa corrigir algumas dessas deficiências, oferecendo um vestibular unificado criado pelo governo federal e obedecendo a suas diretrizes e parâmetros curriculares.

O novo Enem tem como fim avaliar o aspecto cognitivo, mas enfatizando a capacidade de autonomia intelectual e o pensamento crítico dos alunos.

As instituições de Ensino Superior podem usar esse novo exame de diferentes modos, seja considerando-o uma fase única de avaliação, como uma primeira fase do processo de ingresso, utilizando sua nota em conjunto com um exame da própria instituição, seja como critério de seleção para vagas remanescentes.

Com a adoção do Sistema de Seleção Unificado (Sisu), o exame passa a proporcionar aos alunos a possibilidade de escolha da instituição em que desejam estudar, sem terem de prestar vestibular em vários lugares, favorecendo assim a mobilidade estudantil e o intercâmbio entre jovens de todo o país.

Por fim, o Enem se propõe a melhorar a qualidade do Ensino Médio, uma vez que avalia o desenvolvimento de certas competências e habilidades dos alunos, não isoladamente, mas de forma conjunta. Assim, o conteúdo ministrado no Ensino Médio passa a ser determinado pelos professores, coordenadores e diretores e não exclusivamente ditado pelas universidades. Desse modo, é importante que os docentes compreendam e discutam a proposta integralmente, pois a execução desses pressupostos em sala de aula poderá contribuir para uma reorientação nas concepções e nas práticas, já que não se trata de mera revisão de conteúdos a ensinar, mas de redimensionar o papel da escola e seus atores.

Características do novo Enem:

- 180 questões divididas em 4 áreas de conhecimento e uma redação;
- a prova é realizada em 2 dias;
- além da contextualização e interdisciplinaridade, é exigido praticamente todo o conteúdo do Ensino Médio;
- serve também como forma de ingresso em diversas instituições de Ensino Superior.

As questões do novo Enem são elaboradas com base na Matriz de Referência divulgada pelo MEC.

Nessa matriz estão descritas as competências e habilidades que se esperam do aluno do Ensino Médio e que estão fundamentadas em cinco eixos cognitivos:

I. **Domínio das linguagens** (**DL**): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. **Compreensão dos fenômenos** (**CF**): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. **Enfrentamento das situações-problema** (**SP**): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. **Construção da argumentação** (**CA**): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. **Elaboração de propostas** (**EP**): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

A prova do novo Enem abrange uma redação e 180 questões objetivas, sendo 45 questões para cada uma das áreas de conhecimento em que está dividido o exame:

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (Língua Portuguesa, Literatura e Língua Estrangeira).
- Matemática e suas Tecnologias (Álgebra e Geometria).
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Física, Química e Biologia).
- Ciências Humanas e suas Tecnologias (Geografia, História, Filosofia e Sociologia).

As competências e as habilidades (indicadas por **H**) da Matriz de Referência para a prova de Matemática e suas Tecnologias são:

- **Competência de área 1** – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
  H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.
  H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
  H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
  H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
  H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- **Competência de área 2** – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
  H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
  H7 – Identificar características de figuras planas ou espaciais.
  H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
  H9 – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- **Competência de área 3** – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
  H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
  H11 – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
  H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
  H13 – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
  H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.
- **Competência de área 4** – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
  H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.
  H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
  H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
  H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
- **Competência de área 5** – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
  H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
  H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
  H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
  H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
  H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
- **Competência de área 6** – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
  H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
  H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
  H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
- **Competência de área 7** – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
  H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
  H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de Estatística e Probabilidade.
  H29 – Utilizar conhecimentos de Estatística e Probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
  H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de Estatística e Probabilidade.

Além disso, cada área possui objetos de conhecimento que fazem parte do currículo do Ensino Médio atual e que o aluno precisa dominar.

Esta coleção e o Enem

Na seção *11. Observações e sugestões para as unidades e os capítulos* deste Manual, em que comentamos cada capítulo, apresentamos uma tabela que relaciona os objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência para Matemática e suas Tecnologias aos conteúdos abordados no capítulo.

É importante ressaltar que não são todos os assuntos da nossa coleção que estão relacionados com a Matriz do Enem.

8 Avaliação em Matemática

A avaliação é um instrumento fundamental para fornecer informações sobre como está se realizando o processo de ensino-aprendizagem como um todo – tanto para o professor e a equipe escolar conhecerem e analisarem os resultados de seu trabalho, como para o aluno verificar seu desempenho. Ela não deve simplesmente focalizar o aluno, seu desempenho cognitivo e o acúmulo de conteúdos para classificá-lo em “aprovado” ou “reprovado”.

Uma função crucial da avaliação é a de desencadear ações que promovam tanto a evolução do aluno como a do professor para que ambos possam superar os desafios pedagógicos que enfrentam.

Nessa visão, a avaliação é concebida como um processo que implica uma reflexão crítica sobre a prática, no sentido de captar seus avanços, suas resistências, suas dificuldades e possibilitar a tomada de decisão sobre o que fazer para superar os obstáculos.

Esse movimento traz consigo a necessidade de o professor dominar o que ensina para reconhecer qual a relevância social e cognitiva do ensinado e, então, definir o que vai se tornar material a ser avaliado.

A mudança das práticas de avaliação é então acompanhada por uma transformação do ensino, uma vez que essa tomada de posição em relação ao que é realmente importante é que vai orientar a organização do tempo didático em sala de aula e definir o que deve ser avaliado e as formas a serem adotadas para avaliar.

Na busca de exercer a educação de modo justo e eficiente é preciso garantir a coerência entre as metas planejadas, o que se ensina e o que se avalia.

Assim, a definição clara sobre o que ensinar permitirá, em cada etapa ou nível de ensino, delimitar as expectativas de aprendizagem, das quais dependem tanto os critérios de avaliação quanto o nível de exigência.

A clareza sobre o que ensinar e o que avaliar deve estar explicitada em objetivos observáveis que “traduzem” os conteúdos formulados, geralmente de modo muito amplo, nos documentos curriculares ou planos de curso. Tendo isso em mente, a avaliação deve ser considerada em seus três aspectos: diagnóstico, formativo ou processual e acreditativo ou certificativo.

- Em seu aspecto diagnóstico, a avaliação permite detectar os conhecimentos, formais ou informais, que os alunos já possuem, contribuindo para a estruturação do processo de ensino-aprendizagem, pois esses conhecimentos são tomados como base.

  Com a avaliação diagnóstica inicial o professor pode obter evidências sobre as formas de aprender dos alunos, seus conhecimentos e experiências prévios, seus erros e concepções. A interpretação dessas evidências deve ser feita, se possível, em conjunto com o aluno, buscando perceber seu ponto de vista, o significado de suas respostas, as possibilidades de estabelecimento de relações e os níveis de compreensão que possui dos objetos a serem estudados.

  Os instrumentos utilizados nesse tipo de avaliação, conjugados entre si ou não, podem ser: perguntas orais, realização de um microprojeto ou tarefa.
- Em seu aspecto formativo, a avaliação permite acompanhar a evolução dos alunos em seu processo de aprendizagem, por isso também é chamada avaliação processual. Os resultados sobre essa evolução implicam, para os professores, em tarefa de ajuste entre o processo de ensino e o de aprendizagem, a fim de se adequar à evolução dos alunos e estabelecer novos esquemas de atuação.
- Para diagnosticar os avanços, assim como as lacunas na aprendizagem, pode-se tomar para análise tanto as produções escritas e orais diárias dos estudantes quanto alguns instrumentos específicos, como tarefas, fichas, etc., que forneçam dados mais controlados e sistemáticos sobre o domínio dos saberes a que se referem os objetivos e as metas de ensino. A análise dos trabalhos pode ser feita levando-se em conta a exigência cognitiva das tarefas propostas, a detenção de erros conceituais observados e as relações não previstas. Dessa forma, são levantados subsídios para o professor e para o aluno que podem ajudar no progresso do processo de apreensão dos conhecimentos, desenvolvimento e aprimoramento de destrezas, construção de valores e qualidades pessoais.
- O aspecto acreditativo ou certificativo da avaliação é o de obter dados que permitam determinar se os estudantes desenvolveram as capacidades esperadas ao final de um processo. Esses dados devem possibilitar que se conclua, em conjunto com os resultados das avaliações processuais, as condições de desempenho do aluno segundo as normas especificadas, tanto internamente à escola como as requeridas em avaliações externas.

A elaboração de escalas indicando as capacidades esperadas de desenvolvimento no processo de aprendizagem, graduadas em diferentes níveis, de acordo com aspectos observáveis nas produções orais e escritas dos alunos, são instrumentos essenciais tanto para o aspecto formativo como para o certificativo da avaliação.

Os alunos devem ter conhecimento da escala utilizada pelo professor, por uma questão de transparência na avaliação, e também para apoiar-se nela ao fazerem sua autoavaliação.

A tabela da página seguinte é um exemplo de escala[1] que pode ser empregada para avaliação em Matemática.

[1] Adaptada de: PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA (2006), p. 121-123.

Nível	Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
4	Mostra compreender os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema. Executa completa e adequadamente os algoritmos.	Usa informação exterior relevante de natureza formal ou informal. Identifica todos os elementos importantes do problema e mostra compreensão da relação entre eles. Indica estratégia apropriada e sistemática para a resolução do problema e mostra adequadamente o processo de solução.	Usa terminologia e notação apropriadas. Apresenta resposta completa e não ambígua. Inclui diagramas ou representações apropriados, exemplos ou contraexemplos. Apresenta como suporte argumentos coerentes e completos.
3	Mostra compreender, quase completamente, os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema. Executa completamente os algoritmos. Os cálculos em geral estão corretos, contendo eventualmente pequenos erros.	Usa informação exterior relevante de natureza formal ou informal. Identifica todos os elementos importantes do problema e mostra compreensão da relação entre eles. O processo de solução é completo ou quase completo.	Usa terminologia e notação parcialmente corretas. Apresenta resposta completa com explicação razoável. Inclui diagramas ou representações, exemplos ou contraexemplos de modo ainda incompleto. Apresenta como suporte argumentos logicamente corretos, mas insuficientes.
2	Mostra compreender alguns dos conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema. A resposta tem erros de cálculo.	Identifica alguns elementos importantes do problema e mostra compreensão limitada da relação entre eles. Mostra alguma evidência do processo de solução, mas ele está incompleto ou pouco sistematizado.	Mostra progresso significativo na direção de completar o problema, mas a explicação é ambígua. Inclui diagramas ou representações pouco claras e imprecisas. Apresenta como suporte argumentos incompletos ou baseados em premissas pouco importantes.
1	Mostra compreensão muito limitada dos conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema. A resposta tem graves erros de cálculo.	Usa informação exterior irrelevante. Falha na identificação, quase por completo, de aspectos importantes ou coloca muita ênfase em elementos pouco importantes. Reflete uma estratégia inadequada para resolver o problema. O processo de solução não existe, é de difícil identificação ou não está sistematizado.	Falha no uso dos termos matemáticos. Apresenta alguns elementos satisfatórios, mas omite partes significativas do problema. Inclui diagramas ou representações de forma incorreta. Não apresenta argumentos logicamente corretos.
0	Mostra não compreender os conceitos e princípios matemáticos envolvidos no problema.	Tenta usar informação exterior irrelevante. Falha na identificação de quais elementos do problema são apropriados para a resolução. Copia partes do problema, sem procurar a solução.	Comunica de forma ineficaz. Integra desenhos que não representam a situação. As palavras que emprega não refletem o problema.

Indicadores para a avaliação em Matemática

Como já dissemos, esta coleção contemplou algumas das atuais tendências em Educação Matemática. Elas dizem respeito ao desenvolvimento de um ensino que aumente a capacidade matemática do aluno por intermédio da resolução de problemas, valorizando a comunicação matemática, a construção e a compreensão de conceitos e procedimentos. Passamos, então, a exemplificar como avaliar tais capacidades.

Avaliando a capacidade matemática do aluno

É preciso avaliar a capacidade matemática do aluno, ou seja, a sua capacidade de usar a informação para raciocinar, pensar criativamente e para formular problemas, resolvê-los e refletir criticamente sobre eles.

A avaliação deve analisar até que ponto os alunos integraram e deram sentido à informação, se conseguem aplicá-la em situações que requeiram raciocínio e pensamento criativo e se são capazes de utilizar a Matemática para comunicar ideias.

Além disso, a avaliação deve analisar a predisposição dos alunos em face dessa ciência, em particular a sua confiança em fazer Matemática e o modo como a valorizam.

Por exemplo, em uma situação-problema aberta como esta: "Elabore a maquete da escola com base na sua planta", os alunos podem revelar a sua capacidade matemática.

Avaliando a resolução de problemas

Como a resolução de problemas deve constituir o eixo fundamental da Matemática escolar, o mesmo deve ocorrer com a avaliação. A capacidade dos alunos para resolver problemas desenvolve-se ao longo do tempo, como resultado de um ensino prolongado, de várias oportunidades para a resolução de muitos tipos de problemas e do confronto com situações do mundo real.

Ao avaliar essa capacidade dos alunos, é importante verificar se eles são capazes de resolver problemas não padronizados, de formular problemas a partir de certos dados, de empregar várias estratégias de resolução e de fazer a verificação dos resultados, bem como a generalização deles. Identificar lacunas é muito importante na elaboração de problemas. Por exemplo, em um problema do tipo: "Você vai comprar 10 itens no supermercado. Na fila do caixa rápido (para 10 itens ou menos) estão 6 pessoas. O caixa 1 tem uma pessoa na fila e o caixa 3 tem 2.

Os outros caixas estão fechados. Para qual dos caixas você se dirigirá?", qual é a informação necessária para responder à pergunta? (É preciso saber o número de mercadorias que cada pessoa está comprando e a velocidade dos caixas.) Generalizar soluções de problemas é outro ponto fundamental. Por exemplo, peça aos alunos que determinem qual é o valor de $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ (é 25); depois, proponha que eles formulem uma expressão que forneça a soma dos *n* primeiros números ímpares. A solução seria:

1 parcela: 1

2 parcelas: $1 + 3 = 4$ (2^2)

3 parcelas: $1 + 3 + 5 = 9$ (3^2)

4 parcelas: $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ (4^2)

5 parcelas: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ (5^2)

⋮

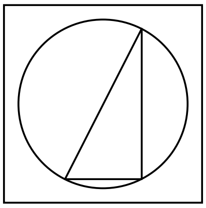
n parcelas: n^2

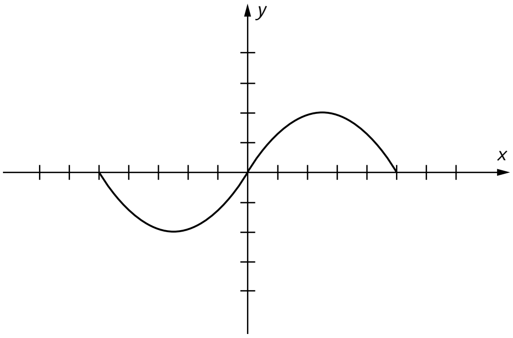
Avaliando a comunicação do aluno

Na sala de aula discutem-se ideias e conceitos matemáticos, partilham-se descobertas, confirmam-se hipóteses e adquire-se conhecimento matemático pela escrita, pela fala e pela leitura. O próprio ato de comunicar clareia e organiza o pensamento e leva os alunos a se envolver na construção da Matemática. Como a Matemática utiliza símbolos e, portanto, tem uma linguagem própria, específica, às vezes a comunicação fica dificultada.

Ao avaliar a comunicação de ideias matemáticas pelos alunos, é preciso verificar se eles são capazes de expressar-se oralmente, por escrito, de forma visual ou por demonstrações com materiais pedagógicos; se compreendem e interpretam corretamente ideias matemáticas apresentadas de forma escrita, oral ou visual e se utilizam corretamente o vocabulário matemático e a linguagem matemática para representar ideias, descrever relações e construir modelos da realidade. Veja a seguir um problema que envolve esses aspectos:

"Suponha que você esteja ao telefone falando com um colega de turma e quer que ele desenhe algumas figuras. Escreva as instruções de modo que seu colega consiga desenhar a figura e o gráfico exatamente como estão desenhados abaixo."





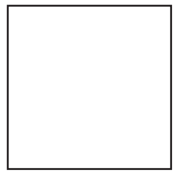
Avaliando o raciocínio do aluno

Para avaliar a capacidade de raciocínio matemático do aluno, é preciso verificar se ele identifica **padrões**, formula **hipóteses** e faz **conjecturas**. Por exemplo, peça a ele que descubra como começaram e como continuam as sequências:

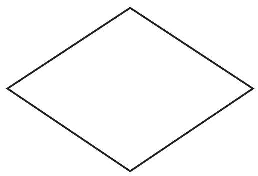
$$0, 3, 8, 15, 24, (35), (48), (63) \rightarrow (n^2 - 1;\ n = 1, 2, 3, ...)$$

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \left(\frac{1}{16}\right), \left(\frac{1}{32}\right), \left(\frac{1}{64}\right)$$

É preciso verificar ainda se ele **analisa** situações para identificar **propriedades comuns**. Por exemplo, o que há de comum entre o losango e o quadrado? E no que eles diferem?



quadrado



losango

E se ele utiliza o raciocínio espacial ou **proporcional** para resolver problemas.

Por exemplo, peça ao aluno que desenhe um cubo planificado, ou que desenhe um cone montado a partir de um planificado. Para verificar o uso do raciocínio proporcional, pergunte: "Quantos alunos da escola usam óculos?". Isso leva os alunos a desenvolver um processo que permita identificar os que usam óculos de uma amostra de alunos e a utilizar raciocínio proporcional para determinar o número de alunos que usam óculos em toda a escola. Para aferir o raciocínio dedutivo, peça aos alunos que justifiquem por que, se somarmos o mesmo número de pontos à porcentagem de acertos no teste de cada aluno, a média das classificações aumentará na mesma quantidade.

Avaliando a compreensão de conceitos

A essência do conhecimento matemático são os conceitos. Os alunos só podem dar significado à Matemática se compreenderem os seus conceitos e significados.

A avaliação do conhecimento de conceitos e da compreensão deles pelos alunos deve indicar se são capazes de verbalizá-los e defini-los; identificá-los e produzir exemplos e contraexemplos; utilizar modelos, diagramas e símbolos para representar conceitos; passar de uma forma de representação para outra; reconhecer vários significados e interpretações de um conceito; comparar conceitos e integrá-los.

Para identificar exemplos e contraexemplos de conceitos, apresente uma questão como esta:

"Quais das seguintes expressões representam números racionais?"

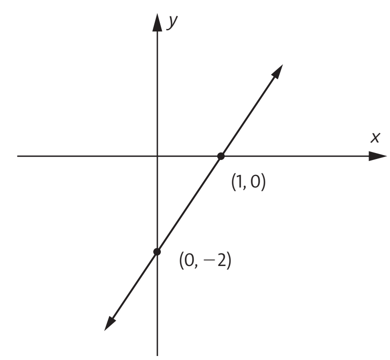
$$\frac{2}{3} \qquad \sqrt{\frac{4}{5}} \qquad 0 \qquad \sqrt{5}$$

$$1{,}3434 \qquad -5{,}6 \qquad 1{,}121121112...$$

$$\sqrt{-16} \qquad \frac{-6}{-6} \qquad 25\%$$

Para reconhecer condições que determinam um conceito, proponha ao aluno que faça uma classificação dos quadriláteros (4 lados). Ao separar os paralelogramos (2 pares de lados paralelos) dos trapézios (apenas 1 par de lados paralelos), o aluno demonstra que sabe identificar essas formas geométricas pelas suas propriedades. Na continuação, pode separar os retângulos (4 ângulos retos) dos losangos (4 lados de mesma medida) e incluir os quadrados (4 ângulos retos e 4 lados de mesma medida) nos losangos, demonstrando compreensão dos conceitos de quadrado, losango, retângulo, paralelogramo e quadrilátero.

Para passar de uma representação de um conceito para outra, peça, por exemplo, que o aluno escreva a equação da reta:



A integração de conceitos pode ser trabalhada com atividades do tipo: "Una os pontos médios dos lados de um trapézio isósceles. Qual figura se obtém? Justifique sua resposta.".

Avaliando procedimentos matemáticos

Procedimentos matemáticos são, por exemplo, os **algoritmos** ou as **técnicas de cálculo**, são as maneiras de traçar retas paralelas, perpendiculares, ângulos, etc.

A avaliação do conhecimento de procedimentos dos alunos deve indicar se são capazes de executar uma atividade matemática com confiança e eficiência; de justificar os passos de um procedimento, reconhecer se ele é adequado ou não a determinada situação e se funciona ou não; e, sobretudo, se são capazes de criar novos procedimentos corretos e simples.

Para verificar se o aluno conhece as razões dos passos de um procedimento, peça, por exemplo, que ele justifique cada passagem da multiplicação $(x + 3)(x + 2)$:

$(x + 3)(x + 2) = x(x + 2) + 3(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 =$
$= x^2 + (2 + 3)x + 6 = x^2 + 5x + 6$

Para verificar se o resultado de um procedimento está correto, proponha, por exemplo, que o aluno inverta a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e verifique se o resultado é realmente a inversa dela.

9 Texto complementar: Leitura e Matemática no Ensino Médio

Angela B. Kleiman (Ph.D. em Linguística pela University of Illinois, Estados Unidos, desenvolve pesquisas sobre leitura e ensino. É professora titular colaboradora do Instituto de Estudos da Linguagem da Unicamp).

A leitura é uma atividade essencial para o estudo da disciplina de Matemática. Ela é condição para a aprendizagem e aquisição de conceitos e, nesse sentido, faz parte do currículo de Matemática também e, em decorrência, o professor de Matemática é também um professor de leitura. De fato, o professor de Matemática é o leitor que atua como modelo na interpretação dos textos matemáticos. Se considerarmos a leitura como uma prática social, diferente de acordo com quem lê, o que, para quem e com que propósitos, a exatidão e a precisão na leitura de um problema por um matemático, sem as inferências e visualizações que outros textos na linguagem natural permitem, é mais bem interpretada por aquele que tem essa prática social, porque faz parte de sua identidade profissional, a de professor de Matemática[2].

Há, no entanto, uma outra faceta da relação entre a leitura e a Matemática, que inverte a relação entre ambas: a Matemática é essencial para a leitura, para interpretar muitos dos textos com que deparamos na vida social. A Matemática está na vida de todos, no nosso dia a dia, e pode ser um instrumento essencial para fazer uma leitura crítica dos textos do cotidiano. Saber como realizar uma leitura que envolve dados matemáticos faz parte do conjunto de estratégias de um leitor e ensinar a fazer tal leitura pode ajudar na formação do leitor.

O exemplo a seguir, retirado de um teste de Matemática, ilustra a importância desse saber matemático na vida cotidiana, como mostra a contextualização do problema. O item, que requer o cálculo de porcentagem com base na leitura de gráficos, começa da seguinte forma: "Nos últimos anos, o aumento da população, aliado ao crescente consumo de água, tem gerado inúmeras preocupações, incluindo o uso desta na produção de alimentos...". Na leitura do matemático não interessam as inferências de cunho crítico que o aluno possa vir a fazer em relação ao controle populacional, ao uso das energias não renováveis, às omissões dos governos no esforço de preservação do planeta, enfim, qualquer e toda inferência própria de um leitor crítico, inclusive do matemático, quando lê um texto da área social. Assim, na avaliação, interessa que o estudante leia como matemático para resolver o problema: sem ambiguidades, sem pressupostos nas entrelinhas, de forma precisa, rigorosa, a fim de pôr em funcionamento as capacidades de raciocínio lógico de um leitor que traduz o enunciado verbal em problemas bem definidos, na linguagem matemática, que têm apenas uma solução.

Já em uma leitura crítica do cotidiano pode interessar que o leitor entenda o uso da porcentagem para apresentar um determinado problema, questionando, por exemplo, como o uso desse sistema de representação pode influenciar a percepção do leitor: em Matemática não há diferença entre dizer 50%, ou metade, ou um meio, ou 5 em cada 10, mas em um texto não matemático as opções que estabelecem o que será dito e o que deixará de ser dito (ou escrito) podem ser relevantes. Assim, por exemplo, quando lemos que o especulador Ponzi tomava dinheiro emprestado prometendo um retorno de 50% em 45 dias, interpretamos que o uso de porcentagens ("retorno de 50%", não "retorno da metade") era crucial para criar a ilusão de enriquecimento rápido nos investidores no seu esquema.

Se o jovem ou adolescente ainda tem dificuldades de leitura quando chega ao Ensino Médio, será mais difícil para ele aprender os conceitos matemáticos que lhe permitem mobilizar suas capacidades de raciocínio matemático. Resolver uma equação é uma habilidade muito importante em Matemática, mas é com base no raciocínio matemático que acompanha a leitura do problema que o aluno pode decidir como montar a equação, que dados ignorar, quais os dados desconhecidos, etc. Resolver problemas é a essência da Matemática. Para montar uma equação o estudante precisa do raciocínio matemático e, para raciocinar, ele antes precisa ler e interpretar enunciados.

Tanto a linguagem matemática como a língua natural são essenciais: habilidade sem compreensão não vai longe, e o mesmo acontece com compreensão sem a habilidade matemática. Há estudos que confirmam, com base na observação da prática docente, que se o aluno não consegue interpretar a linguagem natural, é muito difícil que ele chegue a entender a linguagem matemática e saiba contextualizar conceitos.

Assim sendo, fica difícil para o professor, preocupado com a aprendizagem de seu aluno, ignorar e passar por cima de seus problemas de leitura. As dificuldades encontradas pelos jovens e adolescentes para aprender conhecimentos e conceitos matemáticos NÃO estão fora do campo da Matemática. Limitar-se a apontar que o jovem ou adolescente vai mal porque tem problemas de leitura não é suficiente, mesmo considerando que a leitura seja apenas um recurso, nunca o "essencial da aula" (como propõem os PCNEM[3]). Se outros recursos tecnológicos são ensinados pelo professor, como o uso da calculadora, por

[2] Segundo A. Kleiman e E. Moraes, *Leitura e interdisciplinaridade*. Campinas: Mercado de Letras, 1998.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ensino Médio. Brasília, 2000. p. 53.

que não o uso da língua escrita – especificamente a leitura – uma tecnologia, recurso, instrumento central para a contínua aprendizagem?

Além disso, se de fato a educação matemática deve ter, como os PCNEM sugerem, uma função formativa, podendo ajudar o aluno "a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo", transcendendo seu papel instrumental e assim "gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais"[4], é difícil pensar em alguma prática formativa que venha a ser mais enriquecedora e mais viabilizadora para essa formação do que a leitura.

No entanto, é importante lembrar que o professor de Matemática não foi formado para ensinar a ler. Todavia, sua atuação pode ser, como já indicamos, a de um professor que modela os modos de ler nas práticas matemáticas. E isso pode ser feito com base em uma reflexão sobre seus hábitos e suas estratégias de leitura específicas, como profissional da área da Matemática, aliado a uma compreensão das dificuldades características do leitor escolar no Ensino Médio.

Levando essas restrições em consideração, é possível encontrar pelo menos três áreas de atuação do professor de Matemática para contribuir para a formação de leitores de textos matemáticos: desenvolvimento da leitura crítica, do vocabulário e de estratégias de estudo.

Desenvolvimento da leitura crítica

A Matemática está relacionada intimamente com o desenvolvimento da capacidade de interpretar, analisar, sintetizar, abstrair, projetar, e todas essas atividades se apoiam no uso da linguagem natural, ou seja, da linguagem verbal. Se tomamos como exemplo uma das competências matemáticas exigidas na prova do Enem, como a competência de "Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação" [5] e retiramos a especificidade do texto matemático (ou seja, gráficos e tabelas), vemos que o trecho poderia estar descrevendo uma competência de leitura, pois prever, extrapolar, interpolar e interpretar são também competências absolutamente indispensáveis para a leitura de todo e qualquer texto verbal. E, além disso, as habilidades necessárias para demonstrar a competência são, de fato, habilidades de leitura, se, novamente, retiramos as referências aos gráficos e às tabelas: utilizar informações [expressas em gráficos ou tabelas] para fazer inferências; resolver problemas com dados [apresentados em tabelas ou gráficos]; analisar informações [expressas em gráficos ou tabelas] como recurso para a construção de argumentos.

Um dos atributos importantes da Matemática é sua natureza abstrata. O jovem ou adolescente que consegue transformar um enunciado (uma história, uma descrição em palavras) em um problema matemático está de fato retirando o contexto, ou abstraindo dele a Matemática, de tal forma que o problema básico passa a ser entendido independentemente da situação em que foi apresentado, da sua aplicação. A abstração matemática está baseada nas capacidades de deduzir, inferir, prever, extrapolar, ou seja, no pensamento crítico.

A extração de um problema matemático de um enunciado da linguagem natural é um processo complexo. Cada conceito novo e cada habilidade aprendida pode ser incorporada em problemas de complexidade crescente e a tradução, ou retextualização, da palavra da linguagem natural em linguagem matemática para resolver problemas mais elaborados é uma forma de raciocínio crítico. Para ensinar o processo, o professor pode iniciar com problemas simples, aos poucos aumentando a complexidade. Ao engajar o aluno, com suas perguntas, na resolução desses problemas, desde o mais simples até o mais complexo, ele está propiciando a mobilização do pensamento crítico do aluno, o que exige as mesmas habilidades usadas na leitura de outros textos – e de outras situações da vida cotidiana – que demandam o engajamento intelectual do aluno. Portanto, ele está ensinando a ler criticamente os textos de sua área de especialização.

Aprendizagem de vocabulário especializado

O conhecimento do uso preciso de termos, operações, símbolos é essencial para o domínio da matéria (assim como em toda disciplina). A Matemática é precisa: os significados de termos e conceitos devem ser completamente unívocos, sem ambiguidades, sob pena de o jovem ou adolescente falhar na comunicação e na resolução de problemas. Professor e alunos devem estar completamente de acordo sobre os significados das palavras que usam para poder se comunicar.

---

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ensino Médio. Brasília, 2000. p. 40.

[5] Segundo Mateus Prado, em: <http://ultimosegundo.ig.com.br/colunistas/mateusprado/aprenda+a+ler+graficos+para+a+prova+de+matematica+do+enem/c1597173830927.html>. Acesso em: 11 fev. 2013.

Muitas vezes, um termo matemático é também utilizado na linguagem cotidiana com outro sentido. Os estudos realizados com a aquisição de vocabulário mostram que, quando uma criança se depara com uma palavra que já conhece, com um significado diferente, o primeiro significado, o significado primário, se impõe, mesmo que não faça sentido no contexto. Com os jovens, essa dificuldade de descartar o significado também pode acontecer. Há probabilidade bem maior de que perceba os dois sentidos quando sua atenção é dirigida para o fato. Em uma pesquisa sobre conhecimentos matemáticos, Oliveira & Lopes[6] mostram que, em um primeiro contato com o tema, os alunos não conseguem entender o significado matemático de um termo da linguagem natural: questionados sobre o significado de "arranjo" na unidade, respondiam:

"Pode ser flores, arranjo de conseguir, por exemplo: eu arranjo para você um livro novo".

"Um tipo de arrumar as coisas."

"Me lembra música, mas não tem nada a ver." (p. 527*)*

Uma atividade proposta nesse mesmo estudo consistia na elaboração de um glossário por aluno, com base em um levantamento dos termos que os alunos consideravam mais importantes: os alunos davam sua definição nas suas próprias palavras, fornecendo um exemplo, uma aplicação ou uma relação com algum outro termo. Quando os termos tinham significados diferentes na Matemática e na linguagem cotidiana, os dois significados eram registrados.

Certamente, o conhecimento vocabular é essencial para a aprendizagem dos novos conceitos que são apresentados todo ano aos alunos; a pesquisa mostra que a focalização no termo, no decorrer da aula, por exemplo, propicia no aluno a conscientização que o leva a procurar as diferenças com a linguagem cotidiana, e a construir uma nova definição, dessa vez Matemática, para o termo em questão.

Desenvolvimento de estratégias de estudo

Muitas vezes os estudantes do Ensino Médio ainda não desenvolveram as estratégias de estudo independentes esperadas nesse segmento escolar, em que já teriam práticas de leitura (e de escrita, ou seja, práticas de letramento) mais autônomas. Em relação a qualquer texto, mas muito mais em relação ao texto matemático, o estudante parece depender do auxílio constante do professor.

Pesquisadores[7] têm observado que os alunos solicitam auxílio diante da primeira dificuldade na leitura do problema, sem tentar resolvê-la por si sós, por exemplo, relendo, anotando, sublinhando. Entretanto, esses estudos também mostram que, se o professor orienta os jovens a fazer uma segunda leitura, eles conseguem resolver a dificuldade. Essas práticas mostram que o aluno não tem estratégias de leitura adequadas e, em decorrência, não têm estratégias de estudo que lhe permitam aprender autonomamente.

Uma forma de ensinar ao jovem ou adolescente estratégias de estudo adequadas envolve ensiná-lo a usar o livro didático. Os livros didáticos podem ser um auxiliar valioso para o estudo, pois bem usados fornecem uma oportunidade para o aluno revisar a matéria, refletir sobre os conceitos aprendidos na aula, enfim, para reaprender e praticar. O livro didático de Matemática pode propiciar a consulta de conceitos que ainda não estão claros, a leitura para a aprendizagem, a releitura. O aluno pode determinar seu ritmo de leitura e de aprendizagem (pode até solicitar ajuda a algum membro da família, e este pode ajudar, desde que seja um leitor e o material esteja apresentado de forma clara e explícita).

Para que o aluno possa estudar independentemente, ele deve entender como o texto está estruturado. Saber usar a estrutura do texto, utilizando estratégias que ajudam a explorar todo o capítulo ou a unidade, a lê-lo de modo global, para entender que parte da informação é mais importante, qual informação depende de outras, o que é detalhe, é um saber que precisa ser ensinado. Esse conteúdo pode fazer parte de uma aula cujo objetivo é conhecer o livro didático: ler o sumário, analisar como são sinalizados os títulos e os subtítulos (tamanho das letras, cores, uso de números); descoberta das partes do texto e suas relações (o que os subtítulos indicam; o número de subseções em uma seção, hierarquia entre seções e subseções); elaboração de um diagrama mostrando essas relações. Também com o objetivo de adquirir estratégias de leitura e estudo independentes, o aluno pode ser orientado a fazer um resumo da unidade/capítulo contendo o conceito mais importante abordado, com algum exemplo ou aplicação.

Os documentos oficiais defendem que a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo e um valor instrumental. O foco na leitura contribui para ambos objetivos, pois, por um lado, a leitura desenvolve o raciocínio e o pensamento crítico e, por outro, constitui-se ferramenta para interpretar e resolver problemas, menos precisamente definidos, da vida cotidiana.

[6] OLIVEIRA, Roberto Alves; LOPES, Celi E. *O ler e o escrever na construção do conhecimento matemático no Ensino Médio.* Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 513-534, abr. 2012.

[7] Segundo Vânia G. da Silva Ribeiro; Carmen T. Kaiber. *Leitura e interpretação de textos matemáticos:* construindo competências no Ensino Médio. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC4.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2013.

10 Sugestões complementares: cursos, leituras, recursos digitais e passeios

A importância da atualização

Já falamos anteriormente sobre as mudanças que estão revolucionando a economia e a sociedade, e como a Matemática tem um importante papel a desempenhar na formação e preparação dos alunos para as novas demandas que os esperam. É importante que o professor esteja devidamente informado e seja capaz de lidar com essas expectativas e novos anseios dos alunos.

Além das novas exigências que são trazidas para a sala de aula pela sociedade, teorias e práticas de Educação Matemática passam por debates, discussões, atualizações e alterações que são fruto do trabalho de grupos de estudo e de aplicação. O professor é parte integral desse processo de renovação, sendo ele o responsável por apresentar situações aos alunos, debater alternativas e soluções para os problemas que surgirem e, finalmente, aplicar o que foi proposto em seu espaço de trabalho, chegando a novos resultados.

É importante ressaltar que o próprio curso de Licenciatura em Matemática não é suficiente para oferecer ao professor todos os recursos necessários para ministrar uma boa aula de Matemática. Sérgio Lorenzato (2004) analisa profundamente esse assunto e conclui que a graduação em si não ensina a atividade de docência, observando que, na maioria dos casos, ela é aprendida por meio das próprias experiências adquiridas ao longo da carreira. Cabe ao professor complementar esse aprendizado inicial participando de discussões em encontros e congressos, consultando grupos de estudo e publicações.

Atualmente temos a facilidade da internet, que é capaz de reunir em portais, fóruns de discussão, *blogs*, artigos e listas de *e-mails*, uma comunidade de profissionais competentes e dispostos a manter ativo o debate entre professores e pesquisadores.

Também não faltam oportunidades de cursos oferecidos por instituições de ensino, centros de pesquisa, e até mesmo pelo poder público, que podem aprofundar certos aspectos da atividade de docência e oferecer a chance de troca de conhecimentos e experiências com outros professores e pesquisadores.

Tudo isso é o que podemos chamar de **formação continuada** do professor, esse aperfeiçoamento constante que coloca o docente no tempo presente, pronto para atender às demandas sociais que são impostas sobre eles e seus alunos.

Nas próximas páginas oferecemos informações de locais onde os professores poderão encontrar recursos para dar continuidade à sua formação e orientações para o dia a dia do seu trabalho.

Com quem se comunicar?

Há no país grupos estudando e pesquisando o ensino e a aprendizagem da Matemática (Educação Matemática) sob diversas ópticas e metodologias. Esses grupos oferecem cursos, palestras e orientações técnicas para professores. Na internet também há publicações e recursos disponíveis que podem auxiliar o trabalho diário do professor em sala de aula.

Indicamos algumas instituições, grupos, publicações e *sites* pelos quais você pode se integrar a comunidades regionais e nacionais interessadas na melhoria da qualidade do ensino de Matemática e dividir suas experiências e opiniões, tomando consciência de que não está só na difícil, mas gratificante, tarefa de trabalhar ideias matemáticas, de forma prazerosa e interessante, com os jovens.

Alguns grupos e instituições[8]

Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (Caem)
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo (USP)
Telefax: (11) 3091-6160
e-mail: caem@ime.usp.br
site: <www.ime.usp.br/~caem/>

Centro de Ciências Exatas, Ambientais e de Tecnologias
Pontifícia Universidade Católica de Campinas (PUCC-SP)
Tels.: (19) 3343-7314 e 3343-7315
e-mail: secretaria.ceatec@puc-campinas.edu.br
site: <www.puc-campinas.edu.br/institucional/centros/ceatec/>

Centro de Ciências Exatas e da Terra (*CCET*) – Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Tels.: (84) 3215-3819 e 3215-3522
e-mail: secret-mat@ccet.ufrn.br
site: <www.matematica.ccet.ufrn.br/>

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia – Departamento de Matemática
Fundação Universidade Federal de São Carlos (Ufscar-SP)
Tel.: (16) 3351-8219
e-mail: secretaria@dm.ufscar.br
site: <www.dm.ufscar.br/dm/>

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
Tel.: (48) 3331-9317/Fax: (48) 3331-9688
e-mail: direcao@cfm.ufsc.br
site: <www.cfm.ufsc.br/>

[8] Os dados apresentados foram checados em fevereiro de 2013.

Centro de Ciências Naturais e Exatas (*CCNE*)
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)
Tel.: (55) 3220-8337
e-mail: ccne13@gmail.com
site: <http://w3.ufsm.br/ccne/>

Centro de Ciências Exatas
Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes)
Tel.: (27) 4009-2820
e-mail: faleconoscocce@gmail.com
site: <www.cce.ufes.br/>

Centro de Estudos, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (*Cempem*)
Faculdade de Educação – Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Tel.: (19) 3788-5587
e-mail: cempem@grupos.com.br
site: <www.cempem.fae.unicamp.br/>

Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (*UEL*)
Tel.: (43) 3371-4000/Fax: (43) 3371-4236
e-mail: mat@uel.br
site: <www.mat.uel.br/>

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (*FCET*)
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Tel.: (11) 3124-7200 – ramal 7210/Fax: (11) 3159-0189
e-mail: edmat@pucsp.br
site: <www.pucsp.br/pos/edmat/>

Faculdade de Educação
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Tel.: (31) 3409-5320/Fax: (31) 3409-5311
e-mail: secgeral@fae.ufmg.br
site: <www.fae.ufmg.br/>

Faculdade de Educação
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Tel.: (19) 3521-6701
e-mail: dirfe@unicamp.br
site: <www.fe.unicamp.br/>

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (*Feusp*)
Tels.: (11) 3091-3517 e 3032-1530
e-mail: fe@usp.br
site: <http://www4.fe.usp.br/>

Fundação Universidade Regional de Blumenau (*Furb*)
Departamento de Matemática – Sala S-224
Tel.: (47) 3321-0275
site: <www.furb.br>

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (*Gepem*)
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
Telefax: (21) 2682-1841
e-mail: gepem@ufrrj.br
site: <www.gepem.ufrrj.br/>

Instituto de Ciências Exatas e da Terra (*Icet*) – Departamento de Matemática
Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) – *Campus* Cuiabá
Tel.: (65) 3615-8713/Fax: (65) 3615-8704
site: <http://www.ufmt.br/icet/matematica/>

Instituto de Geociências e Ciências Exatas (*IGCE*)
Universidade Estadual Paulista (Unesp) – *Campus* Rio Claro
Tel.: (19) 3526-9000
site: <www.rc.unesp.br/igce>

Instituto de Matemática
Universidade Federal da Bahia (UFBA)
Tel.: (71) 3283-6258/Fax: (71) 3283-6276
e-mail: mat@ufba.br
site: <www.im.ufba.br>

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (*Impa*)
Tel.: (21) 2529-5000
e-mail: ensino@impa.br
site: <www.impa.br>

Laboratório de Educação Matemática – Faculdade de Educação
Universidade Federal do Ceará (UFC)
Tels.: (85) 3366-7674 e 3366-7675
e-mail: ledum@ufc.br
site: <www.ledum.ufc.br/>

Laboratório de Educação Matemática "Zaíra da Cunha Melo Varizo" (*Lemat*)
Instituto de Matemática e Estatística (IME) – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Tel.: (62) 3521-1124/Fax: (62) 3521-1180
site: <http://lemat.mat.ufg.br/>

Laboratório de Ensino de Matemática (*LEM*)
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (Imecc)
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
Tel.: (19) 3521-6017
e-mail: lem@ime.unicamp.br
site: <www.ime.unicamp.br/lem/>

Laboratório de Ensino de Matemática (*Lemat*) – Departamento de Matemática
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Tel.: (81) 2126-7660
site: <www.dmat.ufpe.br>

Núcleo de Educação Matemática Omar Catunda (*Nemoc*)
Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) – *Campus* Universitário
Tel.: (75) 3161-8115/Fax.: (75) 3161-8086
e-mail: nemoc@uefs.br
site: <www2.uefs.br/nemoc/>

Projeto Fundão – Matemática – Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Telefax: (21) 2562-7511
e-mail: pfundao@im.ufrj.br
site: <www.projetofundao.ufrj.br/matematica>

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (*SBEM*)
Universidade de Brasília (UnB)
Telefax: (61) 3307-2562 – ramal 146
e-mail: sbem@sbembrasil.org.br
site: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

Sociedade Brasileira de Matemática (*SBM*)
Tel.: (21) 2529-5065/Fax: (21) 2259-4143
e-mail: secretaria@sbm.org.br
site: <www.sbm.org.br>

Universidade de Brasília (*Unb*) – Departamento de Matemática
Tels.: (61) 3107-6480 e 3107-6481
site: <www.mat.unb.br>

Universidade Estadual de Maringá (*UEM*)
Departamento de Matemática
Tel.: (44) 3011-4933
e-mail: sec-dma@uem.br
site: <www.dma.uem.br>

Universidade Federal do Paraná (*UFPR*)
Departamento de Matemática – Centro Politécnico
Tel.: (41) 3361-3041/Fax: (41) 3361-3019
site: <www.mat.ufpr.br>

Sites

- <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12583%3Aensino-medio&Itemid=859>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Coleção Explorando o Ensino – Matemática – Ensino Médio: coletânea de artigos extraídos da *Revista do Professor de Matemática* (RPM) – uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio da Universidade de São Paulo.
- <http://matematica.com.br/site/index.php>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Portal Matemática: provas de vestibulares e concursos, simulados *on-line*, curiosidades matemáticas, dicas, biografia de matemáticos, dicionário da Matemática, vídeos e desafios, *link* das maiores universidades e faculdades do Brasil.
- <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/medio.htm>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Matemática essencial: conteúdos de Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior.
- <www.aprendiz.com.br>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Site do **Projeto Aprendiz**, destinado a professores e alunos.
- <www.inep.gov.br/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  No *site* do Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), que responde pelas avaliações do Sistema Educacional Brasileiro (todos os níveis e modalidades), estão todas as informações relativas ao Enem (Exame Nacional de Ensino Médio).
- <www.fc.up.pt/cmup/polya/polya_home.html>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Projeto Polya: *site* especializado na resolução de problemas matemáticos.
- <www.obm.org.br/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM): informações, provas e gabaritos.
- <http://cmais.com.br/educacao>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Cmais: *site* da TV Cultura com informações e notícias sobre educação.
- <www.uol.com.br/cienciahoje>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Publicações como: revista *Ciência Hoje das Crianças, Alô, Professor*, etc.
- <http://revistaescola.abril.com.br/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Revista Escola: apresenta diversos materiais sobre educação e mantém *blogs* e fóruns de discussão.
- <www.laboratoriodematematica.org>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Laboratório de Matemática: oferece cursos a distância gratuitos sobre Ensino de Matemática da Educação Básica.
- <www2.mat.ufrgs.br/edumatec/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Educação Matemática e Tecnologia (Edumatec): *site* mantido pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, com informações sobre *softwares* e recursos digitais a serem usados em sala de aula.
- <www.planetaeducacao.com.br>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Planeta Educação: portal educacional que tem como objetivo disseminar o uso pedagógico e administrativo das novas tecnologias da informação e da comunicação nas escolas públicas brasileiras de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio.
- <http://educador.brasilescola.com/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Orientações para pais e educadores sobre vários aspectos do Ensino.
- <www.somatematica.com.br/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  O Portal **Só Matemática** apresenta conteúdos matemáticos e sugestões de uso de tecnologias e jogos em sala de aula.
- <www.edsurge.com/math>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Site em inglês que lista novidades da tecnologia da informação no ensino.
- <http://fazereaprender.blogspot.com.br/2008/10/dimensions-um-passeio-matemtico.html>. Acesso em: 4 jan. 2013.

Possibilita o *download* do filme *Dimensions*, que propõe uma viagem à quarta dimensão e opções de áudio em inglês e espanhol.

Alguns desses *sites* podem ser trabalhados com os alunos; fica a seu critério selecioná-los.

Revistas e boletins de Educação Matemática

- Bolema – Boletim de Educação Matemática Publicado pelo Departamento de Matemática, IGCE – Unesp – Rio Claro (SP).
  site: <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso em: 4 jan. 2013.
- Boletim Gepem – Série Reflexão em Educação Matemática. Publicações do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e do Mestrado em Educação Matemática da Universidade de Santa Úrsula (RJ).
  site: <www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem>. Acesso em: 4 jan. 2013.
- Educação Matemática em Revista – Temas e Debates
  Publicações da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).
  site: <www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/publicacoes/emr>. Acesso em: 4 jan. 2013.
- Educação Matemática Pesquisa
  Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC (SP).
  site: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/login>. Acesso em: 4 jan. 2013.
- Revista Brasileira de História da Matemática (SBHMat)
  site: <www.sbhmat.com.br>. Acesso em: 4 jan. 2013.
- Revista do Professor de Matemática
  Revista da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).
  site: <www.rpm.org.br>. Acesso em: 4 jan. 2013.
- Revista Pró-Posições
  Publicada pela Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) e editora Cortez.
  site: <mail.fae.unicamp.br/~proposicoes>. Acesso em: 4 jan. 2013.
- Zetetiké
  Publicações do Cempem – Unicamp.
  site: <www.cempem.fae.unicamp.br/zetetike.htm>. Acesso em: 4 jan. 2013.

Alguns órgãos governamentais

- Fundação Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)
  Tel.: 0800-616161
  site: <www.fnde.gov.br>. Acesso em: 4 jan. 2013. O FNDE mantém o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).
- Secretaria de Educação Básica (SEB)
  Tel.: 0800-616161
  site: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=293&Itemid=809>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Informações sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, sobre o Guia do Livro Didático e todas as questões relacionadas ao Ensino Médio.
- Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão (Secadi)
  Tel.: 0800-616161
  site: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=290&Itemid=816>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Implementa políticas educacionais nas áreas de alfabetização e educação de jovens e adultos, educação ambiental, educação em direitos humanos, educação especial, do campo, escolar indígena, quilombola e educação para as relações étnico-raciais.
- Secretarias de Educação estaduais e municipais
  Provavelmente a Secretaria de Educação do estado em que você mora e também a do seu município mantenham equipes pedagógicas, publicações e ofereçam cursos de Matemática a professores. Procure se informar e participar.

Programas de acesso ao Ensino Superior

Com o intuito de auxiliar o ingresso de jovens ao Ensino Superior, o Ministério da Educação (MEC) oferece programas como o Fies, o Prouni e o Sisu.

O Fundo de Financiamento Estudantil (Fies) é um programa que financia a graduação de estudantes em instituições privadas de Ensino Superior. Os estudantes que pretendem ingressar em cursos superiores particulares cadastrados no programa e os que tenham avaliação positiva nos processos conduzidos pelo MEC podem recorrer ao financiamento. É obrigatória a participação no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e os candidatos precisam, após se inscreverem, ser aprovados por uma Comissão Permanente de Seleção, conforme cronograma definido pelo MEC. O pagamento do financiamento deve ser iniciado um ano e meio depois da graduação do estudante, e o prazo final dependerá do curso escolhido.

O Programa Universidade para Todos (Prouni) tem como finalidade a concessão de bolsas de estudos integrais e parciais (50%) a estudantes de cursos de graduação e de cursos sequenciais de formação específica em instituições privadas.

Essas bolsas são destinadas a alunos selecionados com base nas notas do Enem e também em critérios e condições estabelecidos em regulamentação específica. Para os estudantes que receberem bolsas parciais, há a possibilidade de acesso ao Fies para financiar o restante do estudo.

O Sistema de Seleção Unificada (Sisu) é gerenciado pelo MEC. Nesse sistema são oferecidas vagas em instituições públicas de Ensino Superior para candidatos participantes do Enem. A seleção dos candidatos é realizada de acordo com a nota obtida no exame, dentro do número de vagas em cada curso, por modalidade de concorrência.

Para maiores informações sobre esses programas, acesse o portal do Ministério da Educação: <http://portal.mec.gov.br/index.php> (Acesso em: 7 fev. 2013).

Referências bibliográficas e outros *sites* para o professor

Aprofundando os conhecimentos matemáticos

A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.

George Polya.

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a Geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
  Estudo dos fractais voltado para a utilização em sala de aula.
- CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais de Matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1989.
  É um clássico sobre o desenvolvimento da Matemática. Vale a pena estudá-lo, pois apresenta o desenvolvimento das ideias matemáticas ao longo da História com base nas necessidades do ser humano.
- COLEÇÃO do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Vários autores. 12 volumes, 2006.
  Livros temáticos rigorosos e excelentes fontes de pesquisa para o professor.
- KALEFF, Ana Maria M. R. *Vendo e entendendo poliedros*. Niterói: Eduff, 2003.
  Um texto ideal para o professor que deseja aprofundar seus conhecimentos sobre poliedros.
- LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006. 3 v. (Coleção do Professor de Matemática).
  Coleção rigorosa e ideal para o professor aprofundar seus conhecimentos matemáticos.
- TINOCO, Lúcia A. A. *A Geometria euclidiana por meio de resolução de problemas*. Rio de Janeiro: UFRJ (Instituto de Matemática), Projeto Fundão, 1999.
  Ótimo livro para o professor aprofundar seus conhecimentos em Geometria por meio de análise e resolução de problemas.
- WEYL, Herman. *Simetria*. São Paulo: Edusp, 1997.
  Enfoca a simetria nas artes, nos cristais, na Física e na Matemática.

História da Matemática

- BENTLEY, Peter J. *O livro dos números*: uma história ilustrada da Matemática. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.
  Livro ilustrado que visa desvendar alguns segredos e temores que cercam a Matemática, revelando sua natureza fascinante e sua presença em todos os aspectos da nossa vida, da ciência às artes.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.
  Enfatiza detalhes sobre o desenvolvimento histórico das ideias matemáticas, desde suas origens até o início do século XX.
- CARVALHO, Dione Lucchesi de; MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu; BRITO, Arlete de Jesus. *História da Matemática em atividades didáticas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
  Por meio de atividades nas quais a história da Matemática exerce um papel central, os autores discutem três tópicos distintos da Matemática escolar: Geometria, Trigonometria e Números Irracionais.
- CARVALHO, João Bosco Pitombeira de et al. Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de Matemática na década de 30. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, Brasília, v. 81, n. 199, p. 415-424, set./dez. 2000. Disponível em: <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/RBEP/article/view/130>. Acesso em: 5 jan. 2013.
- COLEÇÃO *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*. Vários autores. São Paulo: Atual, 1993.
  Aborda aspectos da evolução histórica das ideias matemáticas e auxilia no enriquecimento das aulas. Cada livro focaliza um destes temas: Álgebra, Cálculo, Computação, Geometria, Números e Numerais e Trigonometria.
- DASSIE, Bruno Alves; ROCHA, José Lourenço da. *O ensino de Matemática no Brasil nas primeiras décadas do século XX*. Caderno Dá-Licença, n. 4, ano 5, p. 65-73, dez. 2003. Disponível em: <www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume4/da_Licena_Bruno.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2013.
- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.
  Aborda a história da Matemática em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Com este livro é possível aprender muita Matemática, além de História.
- FERNANDES, George Pimentel; MENEZES, Josinalva Estácio. *O movimento da Educação Matemática no Brasil*: cinco décadas de existência. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, II, 2002, Natal. Disponível em: <www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe2/pdfs/Tema2/0204.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2013.
  Apresenta uma análise do movimento da Educação Matemática no Brasil.
- FIORENTINI, Dario. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil*. Zetetiké, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-16, 1995.
  Nesse artigo são descritos alguns pontos de vista históricos sobre o ensino da Matemática no Brasil.
- GARBI, Gilberto Geraldo. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 2007.
  Episódios históricos verdadeiros são narrados por meio de um romance. Além disso, aprendemos muita Matemática com sua leitura.
- GUELLI, Oscar. Coleção *Contando a História da Matemática*. São Paulo: Ática. Vários volumes, 1998.

Apresenta questões matemáticas que despertaram o interesse do ser humano ao longo das civilizações.

- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
  Aborda história da Matemática, história da Educação Matemática e como essas duas regiões de inquérito podem se relacionar com a Educação Matemática.
- SINGH, Simon. *O enigma de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998.
  Um livro acessível que conta a evolução histórica da solução de um dos mais famosos e clássicos problemas da Matemática.
- TENÓRIO, R. M. (Org.). *Aprendendo pelas raízes. Alguns caminhos da Matemática na História*. Salvador: Centro Editorial e Didático da Universidade Federal da Bahia, 1995.
  Estudo de autores nacionais sobre Filosofia da Matemática, Geometria, etc.
- VALENTE, Wagner Rodrigues. *Uma história da Matemática escolar do Brasil*, 1730-1930. São Paulo: Annablume, 1999.
  Abordagem sobre a importância e a rapidez da circulação das ideias, dos métodos e das publicações em Matemática no decorrer dos séculos XVIII a XIX.

Educação Matemática

- BICUDO, Maria A. V.; GARNICA, Antonio V. M. *Filosofia da educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de Matemática*. Blumenau: Editora da Universidade Regional de Blumenau (Furb), 2004.
- BORBA, Marcelo de Carvalho. *Tendências internacionais em formação de professores de Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
  Resultados de trabalhos desenvolvidos em diferentes países por pesquisadores renomados na área de Educação Matemática. O autor relaciona esses resultados com as experiências vividas por professores no Brasil.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais* – Matemática. Brasília, 1998.
- BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; Saiz, I. et al. *Didática da Matemática*; reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.
- CARRAHER, Terezinha N. (Org.). *Aprender pensando*. Contribuição da Psicologia cognitiva para a educação. Petrópolis: Vozes, 2008.
  Aborda a relevância do processo ensino/aprendizagem para a educação através do ensinar e do aprender pensando e propõe um novo método de ensino.
- _________. et al. *Na vida dez, na escola zero*. 16 ed. São Paulo: Cortez, 2011.
  A partir de situações cotidianas é analisado o contraste da matemática aprendida em sala de aula e a utilizada na "rua".
- CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.
  Traz questionamentos para a reflexão do professor sobre a Educação Matemática e procura contribuir na reformulação do contrato que une a escola e a sociedade.
- CURY, Helena Noronha. *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
  Apresenta uma visão geral sobre a análise de erros e defende a ideia de que essa análise é uma abordagem de pesquisa e também uma metodologia de ensino.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo/Campinas: Summus/Unicamp, 1986.
- _________. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2002.
- _________. *Etnomatemática*. São Paulo: Ática, 1998.
- _________. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- DANTE, Luiz Roberto. *Criatividade e resolução de problemas*. São Paulo: Unesp (mimeog.). Tese de Livre-Docência, 1998.
- _________. *Incentivando a criatividade através da educação matemática*. São Paulo: PUC-SP (mimeog.). Tese de Doutorado, 1980.
- _________. *Formulação e resolução de problemas de Matemática*: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2011.
- INEP/MEC. *Melhores práticas em escolas de Ensino Médio no Brasil*. Brasília, 2010.
- KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (Org.). *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.
- LINS, Romulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.
- LORENZATO, Sérgio. Formação inicial e continuada do professor de Matemática. *Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática*. São Paulo: USP, 2004.
- LOVELL, Kurt. *Desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança*. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- MACHADO, Silvia A. (Org.). *Educação Matemática*: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999.
- _________. *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2007.
- MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. Dialética ferramenta-objeto. In: MACHADO, Silvia D. A. *Educação Matemática*: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999. p. 115-134.
- _________. *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2007.
- MARANHÃO, Cristina (Org.). *Educação matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio*. São Paulo: Musa, 2009.
- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria M. M. S. *A formação matemática do professor:* licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

- MOYSÉS, Lúcia M. M. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. Campinas: Papirus, 2003.
- NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org.). *A formação do professor que ensina Matemática:* perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- PONTE, J. P. et al. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica (Coleção Tendências em Educação Matemática), 2006.
- ________. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.
- POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.
- POZO, Juan Ignácio. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- PUBLICAÇÕES do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (Caem) do IME/USP. SPEC/PADCT/Capes.
- PUBLICAÇÕES do Gepem – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. Série Reflexão em Educação Matemática.
- PUBLICAÇÕES do Projeto Fundão do Instituto de Matemática da UFRJ:
  — Geometria segundo a teoria de Van Hiele, de Lilian Nasser (Coord.)
  — Construindo o conceito de função do 1º grau, de Lucia A. A. Tinoco (Coord.)
  — Tratamento da informação – Explorando dados estatísticos e noções de Probabilidade a partir das séries iniciais, de Maria Laura M. Leite (Coord.)
  — Geometria – Na era da imagem e do movimento, de Maria Laura M. Leite e Lilian Nasser (Coord.)
  — Razões e proporções, de Lucia A. A. Tinoco (Coord.)
  — A Geometria euclidiana por meio de resolução de problemas, de Lucia A. A. Tinoco (Coord.)
  — Números: linguagem universal, de Vânia Maria P. Santos (Coord.)
  — Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: métodos alternativos, de Vânia Maria P. Santos (Coord.)

Metodologia do ensino de Matemática

- AEBLI, Hans. *Didática psicológica:* aplicação à didática da psicologia de Jean Piaget. São Paulo: Nacional, 1978.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2006.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; SILVA, Viviane Clotilde da; HEIN, Nelson. *Ornamentos × criatividade*: uma alternativa para ensinar Geometria plana. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2013.
- ________. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*: Matemática. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2013.
- BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. *Aprendizagem baseada em projetos:* guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. Ed.Porto Alegre: Artmed, 2008.
- CARVALHO, Dione Lucchesi de. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 2000.
- CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M; GASCÓN, J. *Estudar matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.
- CYRINO, Hélio. *Diálogo geométrico*. Campinas: Átomo, 2001.
- DANTE, Luiz Roberto. Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino da Matemática. *Revista do Professor de Matemática*, n. 6. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).
- LIMA, Elon Lages. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2001. Capítulos 1, 15, 16, 17 e 18. (Coleção do Professor de Matemática).
- LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.
- MARANHÃO, M. Cristina S. de A. *Matemática*. Coleção Magistério 2º grau. São Paulo: Cortez, 1991.
- MONTEIRO, Alexandria; POMPEU JUNIOR, Geraldo. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001.
- PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- ROSA NETO, Ernesto. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 1998.
- TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática de Matemática*: como dois e dois. A construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997.
- TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Matemática recreativa

- CHEMALE, Elena Hass; KRUSE, Fábio. *Curiosidades matemáticas*. Novo Hamburgo: Centro Universitário Feevale, 1999.
- COLEÇÃO *Ciência Hoje na Escola*. Matemática. São Paulo: Instituto Ciência Hoje, 1999. v. 8.
- COLEÇÃO *O Prazer da Matemática*. Vários autores. Lisboa: Gradiva. Diversos volumes.
- ENZENSBERGER, Hans Magnus. *O diabo dos números*. São Paulo: Companhia das Letras, 2000.
- GONICK, Túlio. *Truques e quebra-cabeças com números*. Rio de Janeiro: Ediouro, [s.d.].

- KALEFF, Ana Maria M. R.; REI, Dulce Monteiro; GARCIA, Simone dos Santos. *Quebra-cabeças geométricos e formas planas*. Niterói: Eduff, 2002.
- OBERMAIR, Gilbert. *Quebra-cabeças, truques e jogos com palitos de fósforos*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1981.
- PERELMANN, J. *Aprenda Álgebra brincando*. Tradução de Milton da Silva Rodrigues. São Paulo: Hemus, 1970.
- SBPC. *Matemática*: por que, para quê? Ciência Hoje na Escola, n. 8. São Paulo: Global, 1999.
- TAHAN, Malba. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.
- ________. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 1998.
- ________. *Os números governam o mundo*. Folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.
- ________. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 1991.

Informática e Educação Matemática

- BONGIOVANNI, Vincenzo et al. *Descobrindo o Cabri-Géomètre*. Caderno de Atividades. São Paulo: FTD, 1997.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- CARVALHO, Luiz Mariano e outros (Org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. V. 2.
- PAIVA, Maria Auxiliadora V. et al. *Cabri*: descobrindo a Geometria no computador. Vitória: Leacim-Ufes, 1997.
- PONTE, João Pedro da; OLIVEIRA, Hélia; VARANDAS, José Manuel. *O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional*. Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/curso_rio_claro.htm>. Acesso em: 8 jan. 2013.
- RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho do. *Matematicativa*. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 1997.
- ________. *Matematicativa II*. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 2004.
- RODRIGUES, Claudina I.; REZENDE, Eliane Q. F. *Cabri-Géomètre e a Geometria plana*. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.
- SANGIACOMO, Lígia et al. *Explorando Geometria elementar com o dinamismo do Cabri-Géomètre*. São Paulo: Proem-PUC.
- ________. *Geometria plana com o Cabri-Géomètre*: diferentes metodologias. São Paulo: Proem-PUC.
- VALENTE, José Armando. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: *Tecnologia, currículo e projetos*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/1sf.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2013.
- <www.nied.unicamp.br> : Acesso em: 4 jan. 2013.
  Centro virtual interamericano de cooperação solidária para formação de educadores – possui várias publicações, para *download*, sobre Informática na educação.
- <www.br-ie.org/pub/index.php/index>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Portal de publicações da Ceie, comissão especial de Informática na educação – Sociedade Brasileira de Computação. Publicam a revista brasileira de Informática na educação e anais de congressos.
- <www.suapesquisa.com/educacaoesportes/livros_informatica_educacao.htm>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Bibliografia de publicações recentes sobre Informática na educação.
- <www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/livro/infoacao.pdf>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Site da Unesp de Rio Claro que apresenta o livro *A Informática em ação*: formação de professores, pesquisa e extensão, de vários autores, para *download*.

Educação

Professor, seria interessante que você pudesse ler alguns (ou todos) estes importantes livros, que tratam da formação e da vida profissional do professor.

- BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- DELORS, Jacques (Org.). *Educação*: um tesouro a descobrir. São Paulo/Brasília: Cortez/MEC/Unesco, 1999.
- EGAN, Kieran. Por que a imaginação é importante na educação? *Anais do I Seminário Educação, Imaginação e as Linguagens Artístico-Culturais*. Criciúma: Unesc, 2005. Disponível em: <www.gedest.unesc.net/seilacs/iseilac.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2013.
- ESTRELA, Maria Teresa (Org.). *Viver e construir a profissão docente*. Porto: Porto Editora, 1997.
- GARCÍA, Carlos Marcelo. *Formação de professores*: para uma mudança educativa. Porto: Porto Editora, 1999.
- HERNÁNDEZ, Fernando. *Transgressão e mudança na educação*. Os projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- MARTINS, Angela Maria. Diretrizes curriculares nacionais para o Ensino Médio: avaliação de documento. *Cadernos de Pesquisa*, n. 109, p. 67-87, 2000. Disponível em: <www.scielo.br/pdf/%0D/cp/n109/n109a04.pdf>. Acesso em: 24 jan. 2013.
- MORIN, Edgar. *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. Brasília/São Paulo: Unesco/Cortez, 2001.
- NÓVOA, Antonio. *Profissão*: professor. Porto: Porto Editora, 1999.
- PERRENOUD, Philippe. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- _________. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

- ________. *Ensinar*: agir com urgência, decidir na incerteza. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- ________; PAQUAY, Léopold; ALTET, Marguerite; CHARLIER, Évelyne (Org.). *Formando professores profissionais*: quais estratégias? Quais competências?. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- RATZ, Louis E.; ROTHSTEIN, Arnold M. *Ensinar a pensar*: teoria e aplicação. Tradução de Dante Moreira Leite. São Paulo: EPU, 1977.
- TEDESCO, Juan Carlos. *O novo pacto educativo*. Tradução de Otacílio Nunes. São Paulo: Ática, 2001.
- ZABALA, Antoni. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Sobre o Enem

- ÉTICO Sistema de Ensino. Novo Enem. São Paulo: Saraiva, 2009.
- Explicando o Enem. São Paulo: Abril Educação, 2009.
- Guia do Estudante 2 – O novo Enem 2009. São Paulo: Abril, 2009.
- <www.infoenem.com.br/>. Acesso em: 4 jan. 2013. Informações sobre Sisu, Prouni, provas e gabaritos.

Curso para a formação do professor

- <www.profmat-sbm.org.br/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Pós-graduação *stricto sensu* para aprimoramento da formação profissional de professores da Educação Básica, da Sociedade Brasileira de Matemática.
  Programa semipresencial, com bolsas Capes para professores em exercício na rede pública.

Sugestões de *sites* para os alunos

Os *sites* relacionados a seguir podem ser utilizados pelos alunos de qualquer ano do Ensino Médio, pois tratam de assuntos envolvidos nos 3 volumes desta coleção.

- <www.bussolaescolar.com.br/matematica> Acesso em: 4 jan. 2013.
  Bússola Escolar: apresenta *links* para as mais variadas disciplinas. Em Matemática apresenta resumo dos conteúdos que fazem parte do currículo. Conforme o assunto, ele encaminha para diferentes endereços.
- <www.diadematematica.com>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Dia de Matemática: apresenta questões em forma de testes sobre Álgebra e Números, Geometria e Tratamento da Informação e, ao final, fornece as respostas, mas não as resoluções.
- <www.matematica.br>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  IMática: matemática interativa na internet, *site* criado e alimentado por professores do IME-USP.
- <www.obmep.org.br>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep): apresenta as provas e a resolução das questões, assim como um banco de questões, para que os alunos possam se preparar para as provas.
- <www.sobresites.com/pesquisa>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Pesquisa escolar: apresenta *links* para *sites* sobre educação com comentários para cada um deles.
- <www.tooantonioreis.seed.pr.gov.br/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Apresenta resumo de conteúdos trabalhados no Ensino Médio e traz vários exercícios sobre esses temas. O tema Funções aparece no item Cálculo Diferencial e Integral e é adequado para alunos do Ensino Médio.
- <www.khanacademy.org/>. Acesso em: 5 jan. 2013.
  Khan Academy: *site* em inglês com aulas em vídeo e explicações divertidas e simples para diversos tópicos da Matemática. A maioria do material se encontra hospedado no Youtube e já possui legendas para diversas línguas, incluindo o português.

Nos *links* a seguir temos algumas sugestões de vídeos relacionados com a Matemática que podem ser vistos pelos alunos:

- Donald no país da Matemática – 1ª parte
  <http://br.youtube.com/watch?v=Nc1vulpH31E&feature=related>;
- Donald no país da Matemática – 2ª parte
  <http://br.youtube.com/watch?v=9lxAQrCjvKo&feature=related>;
- Donald no país da Matemática – 3ª parte
  <http://br.youtube.com/watch?v=Qfi-Mk2FYQw&feature=related>;
- Número áureo – 1ª parte – (Prof. Luiz Barco)
  <http://br.youtube.com/watch?v=w2NqqfHM9_8>;
- Número áureo – 2ª parte – (Prof. Luiz Barco)
  <http://br.youtube.com/watch?v=T0CA60XXYp0>;
- Matemática e Música – Parte 1 (Prof. Luiz Barco)
  <http://br.youtube.com/watch?v=jy8KGaXxG4U>;
- Matemática e Música – Parte 2 (Prof. Luiz Barco)
  <http://www.youtube.com/watch?v=rK9xPVB5S3o&hl=pt&gl=BR>;
- Matemática e Música – Parte 3 (Prof. Luiz Barco)
  <http://br.youtube.com/watch?v=6XCKqXxcftQ>;
- Matemática e Música – Parte 4 (Prof. Luiz Barco)
  <http://br.youtube.com/watch?v=nylquiAd6nM>;
- Matemática e Música – Parte 5 (Prof. Luiz Barco)
  <http://br.youtube.com/watch?v=TtWkiQ4NxSw>;
- Matemática e Música – Parte 6 (Prof. Luiz Barco)
  <http://br.youtube.com/watch?v=lgUsAmUnFko>;
- Matemática e Música – Parte 7 (Prof. Luiz Barco)
  <http://br.youtube.com/watch?v=IV8q5mNa62M>;
- Funções de 1º e 2º graus (funções polinomiais)
  <http://br.youtube.com/watch?v=WNKQSQxFnwM>;
- Teorema de Pitágoras
  <http://br.youtube.com/watch?v=qjvy2jcbv8w>. Acessos em: 8 jan. 2013.

Jogos

Os jogos são ótimos recursos para o ensino de Matemática. Tanto os conhecidos jogos de tabuleiro ou cartas como os eletrônicos que podem ser propostos no laboratório de Informática ou para serem explorados em casa, com roteiros de observação, para serem discutidos depois em sala de aula. Na bibliografia sugerida apresentamos livros que discutem o uso de jogos para o ensino da Matemática.

Existem poucos jogos eletrônicos voltados para os temas de Matemática do Ensino Médio. Abaixo seguem *links* para jogos que podem ajudar com a familiaridade dos alunos com a disciplina, mas também encorajamos os professores a desvendar os processos matemáticos que estão contidos nos diversos contatos que os estudantes possuem com os jogos. Entre os jogos eletrônicos adequados para o Ensino Médio sugerimos os que se encontram em:

- **Jogos de Matemática no Racha Cuca** <http://rachacuca.com.br/jogos/tags/matematica/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Este *site* contém uma ampla gama de jogos de Matemática e desafios lógicos que podem ser usados no Ensino Médio. Ele apresenta uma interface de navegação simples que permite ao professor filtrar os jogos que deseja utilizar em sala de aula.
- **MathPlayground** <www.mathplayground.com/game_directory.html>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  O *site* em inglês que contém uma série de jogos matemáticos que abarcam diferentes disciplinas. Os jogos são simples e trabalham com conhecimentos específicos. Para o professor de Ensino Médio recomendamos explorar as sessões de Geometria (Geometry), jogos lógicos (Logic Games) e de contextualização do uso da Matemática no mundo real (Real World Math Connections).
- **Power My Learning** <http://powermylearning.com/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Site em inglês criado pela organização americana CFY. Dedicada à modernização do ensino, oferece jogos e atividades em diversas áreas, como Tecnologia, Matemática, Ciências e Arte, possuindo conteúdo específico para Ensino Médio.

Softwares

Existem *softwares* que podem ser usados especificamente para explorar determinados conceitos matemáticos. Abaixo listamos algumas sugestões de aplicativos e repositórios que podem ser explorados.

- Wolfram Alpha <www.wolframalpha.com/>. Acesso em: 4 jan. 2013.
  Similar a uma ferramenta de busca, o *site* oferece um campo de entrada simples que deve ser preenchido com o “nome” do que se pretende encontrar. O que embasa esse sistema é o Matemathica, de Stephen Wolfram. O *site* é capaz de oferecer soluções para problemas matemáticos complexos, porém toda a linguagem é em inglês.
- TINAFAD <http://www.tinafad.com/>. Acesso em: 7 jan. 2013.
  Site em inglês que permite ao aluno compreender os conceitos matemáticos por meio de sua exploração em simuladores de Matemática e Física. Com conteúdo focado especialmente para o Ensino Médio, ele oferece visualizações envolvendo Trigonometria e Geometria, investigações da aproximação de π e construção de gráficos de funções.
- Lista de *softwares* do portal Só Matemática <www.somatematica.com.br/softwares.php>. Acesso em: 7 jan. 2013.
  Esse portal de ensino de Matemática oferece para professores e alunos uma seleção de aplicativos que podem ser úteis em atividades diárias de sala de aula. A lista é grande e o professor deve pesquisar quais *softwares* são adequadas para as suas necessidades.

Passeios para aprender Matemática

- Estação Ciência – USP
  Horário de funcionamento: 3ª a 6ª feira, das 8h às 18h; sábados, domingos e feriados, das 9h às 18h.
  R. Guaicurus, 1394 – Lapa, São Paulo, 05033-002.
  Tel.: (11) 3871-6750

Rodrigo Coca/Futura Press

- Planetários
  Visitas a planetários são ótimas como geradoras de investigações sobre o uso da trigonometria e dos logaritmos para diversos cálculos envolvendo grandes distâncias e números muito longos, além de aspectos de interdisciplinaridade com a Física e a Biologia. Há planetários importantes em todo o território nacional e seus endereços e contatos podem ser encontrados em: <www.uranometrianova.pro.br/planetarios/planbrasil.htm>. Acesso em: 7 jan. 2013.
- Museus e programas de visitas científicas podem ser encontrados no *site* da Associação Brasileira de Centros e Museus de Ciência; nele você encontra um guia com todos os centros e museus do Brasil e do mundo. Basta acessar: <www.abcmc.org.br/publique1/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?sid=2>. Acesso em: 7 jan. 2013.

11 Observações e sugestões para as unidades e capítulos

Nesta seção do Manual do Professor apresentamos comentários sobre a abertura de cada unidade e sugestões didáticas para cada capítulo que compõe o volume 2 desta coleção.

Também fornecemos a resolução dos exercícios e das atividades propostos no livro do aluno.

Ressaltamos que fica a critério do professor a escolha da ordem de abordagem dos conteúdos, que pode ser diferente da apresentada nesta obra. Cabe ao professor considerar o projeto político-pedagógico da escola para planejar suas aulas.

Unidade 1 – Trigonometria

A abertura desta unidade é proposta de maneira interdisciplinar com Biologia e aborda o tema pressão sanguínea.

Ela propicia ao professor, por meio de situação próxima da realidade do aluno, explorar a principal característica das funções trigonométricas: a periodicidade, bem como apresenta uma situação que é modelada por funções desse tipo.

As respostas apresentadas pelos alunos às duas questões propostas constituem um instrumento para o professor avaliar o nível de compreensão de texto dos alunos. As respostas esperadas são:

1. Eles têm comportamento cíclico, ou seja, repetem-se em intervalos regulares.
2. Cada ciclo completo representa um batimento cardíaco.

Capítulo 1 – Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Revisão sobre resoluções de triângulos retângulos	Conhecimento geométrico: Trigonometria do ângulo agudo	C2	H8/H9
Seno e cosseno de ângulos obtuso	-	-	-
Lei dos senos	Conhecimentos geométricos: Trigonometria do ângulo agudo, unidade de medida	C2/C3	H7/H8/H9/H10/H12/H13
Lei dos cossenos			

Iniciamos o capítulo com uma **Revisão sobre resolução de triângulos retângulos** retomando conteúdos já estudados no Ensino Fundamental e no ano anterior. A realização desses exercícios pode ser feita em grupo. Aproveite os exercícios para perceber o nível de conhecimentos de seus alunos e estimule-os a recordar os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo, bem como o valor dos senos, cossenos e tangentes para os ângulos de 30°, 45° e 60°. Produza um quadro resumo e uma tabela com as informações coletadas para facilitar e agilizar os cálculos. Aproveite para apresentar as relações do tópico **Seno e cosseno de ângulos obtusos** e propor a realização dos exercícios 10 e 11 como exemplos de aplicação.

É importante ressaltar que nem sempre os triângulos são retângulos, e muitas vezes precisamos resolver problemas envolvendo outros triângulos, tendo como referência alguns lados e/ou alguns ângulos. Para esse tipo de problema usaremos novas relações. A primeira delas é a **Lei dos senos**, útil para resolver situações em que se conhecem o valor de dois ângulos e de um lado. Use o exemplo do engenheiro que precisa calcular a distância entre os dois postes, para apresentar a lei dos senos e determinar a distância entre os dois postes. Destaque que essa é uma situação muito comum para os engenheiros civis ao construir estradas, pontes e viadutos, fazendo uso de um equipamento chamado teodolito para determinação de ângulos. Complemente com os exercícios resolvidos 1 e 2 e proponha a resolução dos exercícios 12 a 16 como atividade de fixação.

Em seguida, continue no exemplo do engenheiro, apenas alterando algumas informações iniciais do problema, para apresentar a **Lei dos cossenos**. Essa lei é usada para resolver situações em que se conhecem o valor de dois lados e de um ângulo. Complemente com os exercícios resolvidos 3 e 4. No exercício 4, que é resolvido passo a passo, é apresentada uma situação-problema envolvendo povos indígenas e distribuição de espaço em uma aldeia Yanomami, importante realidade do nosso país, aproveite para fazer uma discussão sobre a realidade desses povos. Proponha os exercícios 17 a 24 como atividade de fixação. Os exercícios 25 a 32 podem ser resolvidos como aprofundamento em dupla, destacando-se os exercícios 26 e 31, em que se apresentam aplicações da Física (soma de vetores). O exercício 26 é um excelente momento para mostrar que a fórmula usada em Física para obter o vetor resultante é uma aplicação da lei dos cossenos.

A seção **Outros contextos** apresenta o texto *O mundo na palma das mãos* sobre a história da Cartografia. Essa é uma oportunidade de apresentar relações entre Geografia e História com a Matemática. O texto e as questões representam um momento de reflexão sobre as conquistas do ser humano, além de focar também uma profissão que usa muitos conceitos matemáticos: a Cartografia.

Capítulo 2 – Conceitos trigonométricos básicos

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Arcos e ângulos	Conhecimentos geométricos - característica de figura geométrica plana	C2	H7/H8
Unidades para medir arcos de circunferência (ou ângulos)	Conhecimentos geométricos - unidade de medida	C2	H7/H8
Circunferência trigonométrica	Conhecimento algébrico-geométrico - plano cartesiano/conhecimento geométrico - unidade de medida	C2/C3	H7/H8/H10/H12
Arcos côngruos (ou congruentes)			

Iniciamos o estudo de **Conceitos trigonométricos básicos** apresentando uma introdução histórica. Solicite aos alunos que façam um resumo do texto introdutório e destaque que passaremos a estudar a Trigonometria em um contexto mais abrangente, no qual o triângulo retângulo passa a ser insuficiente para representar as situações propostas. Este é o momento de recordar alguns conceitos de Geometria plana já conhecidos, tais como **Arcos e ângulos na circunferência, Unidades para medir arcos de circunferência (ou ângulos)** e as **Relações entre unidades para medir arcos**.

Na abordagem da definição do conceito de arco geométrico e das medidas de comprimento da circunferência, arco de circunferência e ângulo central, os alunos podem desenhar em seus cadernos três circunferências concêntricas com raios diferentes e, com o auxílio de um barbante, demarcarem arcos de mesmo ângulo central nas três circunferências. A seguir, determinam o comprimento do arco de cada uma das circunferências desenhadas. Depois, deverão responder se os arcos têm o mesmo comprimento. Discuta então os conceitos de medida de arco (ângulo) e comprimento de arco, pois esses conceitos podem ser confundidos pelos alunos.

No tópico **Unidades para medir arcos de circunferência (ou ângulos)** sugerimos iniciar com a unidade mais conhecida, o grau, e representar alguns arcos importantes na circunferência. Para apresentar a unidade de medida radiano, pode-se desenhar uma circunferência e, com o auxílio do compasso ou barbante, representar o arco equivalente a um raio, ou seja, um radiano. Complemente mostrando que, usando a medida do raio como referência, será possível completar uma volta na circunferência com seis raios, com alguma sobra, e que esse resultado equivale ao comprimento da circunferência ($2\pi r \simeq 6{,}28r$).

Estabeleça a relação entre as unidades para medir arcos, usando os ângulos de 360° (ou 2π rad); 180° (ou π rad); 90° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$; 270° $\left(\text{ou } \frac{3\pi}{4} \text{ rad}\right)$ como referência, e estabeleça uma relação de comparação para uso em regra de três simples (180° equivale a π rad, por exemplo). Faça as conversões sugeridas no texto, explorando as diversas possibilidades de transformação entre as unidades de medida, deixando claro que, na ausência de unidades prevalece o radiano, por exemplo: $\frac{3\pi}{2}$ equivale a $\frac{3\pi}{2}$ rad, mas 30 não equivale a 30°, e sim a 30 rad.

Em geral, os alunos costumam ter dificuldade nesse assunto, e na maioria das vezes essa dificuldade está associada a dois fatores:

1º) O número π: é importante que os alunos percebam que π rad significa aproximadamente 3,14 rad, da mesma forma que π km significam aproximadamente 3,14 km.

2º) Frações: uma das vantagens em usar a unidade de medida radiano reside na possibilidade de fracionar o ciclo trigonométrico e visualizar simetrias. No entanto, muitos alunos têm dificuldade com frações, e automaticamente definem que o sistema de unidade radiano é mais difícil de ser usado.

Com o intuito de diminuir esses obstáculos, pode-se fazer uma atividade lúdica bem simples.

Atividade em dupla: Solicite aos alunos que tragam papéis coloridos, tampas circulares de diversos tamanhos, régua, tesoura e transferidor. Cada dupla deverá traçar no papel colorido 4 circunferências de tamanhos diferentes. Cada uma delas deverá ser dividida ao meio, ficando cada metade com um elemento da dupla. Em seguida, o primeiro pedaço deverá ser dividido ao meio, o segundo pedaço em três partes iguais, o terceiro pedaço em quatro partes iguais e o último pedaço, em seis partes iguais, representando os ângulos de $\frac{\pi}{2}$ rad, $\frac{\pi}{3}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad e $\frac{\pi}{6}$ rad, respectivamente. Compare as divisões de várias duplas, destacando que os raios não interferem no ângulo obtido, e represente os resultados na lousa. Finalize usando o transferidor para medir cada ângulo obtido em graus, comparando com os resultados em radianos.

Os exercícios 1 e 2 podem ser usados como atividade de fixação; já os exercícios 3 a 6 podem ser resolvidos em dupla, como atividade de aprofundamento e revisão.

Use a atividade com a circunferência como referência para apresentar a **Circunferência trigonométrica** aos alunos, representando os principais valores de ângulos (0°, 90°, 180°, 270°, 360°) tanto em graus quanto em radianos, assim como os quadrantes. Represente também alguns ângulos notáveis, tais como 30° $\left(\frac{\pi}{6} \text{ rad}\right)$ ou 45° $\left(\frac{\pi}{4} \text{ rad}\right)$. Destaque que a circunferência trigonométrica possui uma orientação anti-horária para ângulos positivos e horária para ângulos negativos, solicite que os alunos representem a localização do ângulo de $-30°$, por exemplo.

Uma das vantagens do uso da circunferência trigonométrica é a possibilidade se representar qualquer ângulo e observar simetrias. Uma das situações interessantes está relacionada, inclusive, com esportes radicais. Em vários esportes, tais como *skate*, patins, *snowboard*, surfe, *bodyboard*, entre outros, há manobras associadas ao grau da rotação. As mais conhecidas são o 180 e o 360, quando o esportista consegue efetuar um giro de 180° ou de 360°. No entanto, o que aconteceria com o esportista caso ele conseguisse efetuar a manobra 720°, onde ele terminaria? A resposta para essa pergunta é simples: ele completaria duas voltas sobre o seu eixo e pararia na mesma posição.

Aproveite o exemplo para definir os **Arcos côngruos (ou congruentes)**. Represente alguns dos ângulos notáveis e solicite aos alunos que determinem seus ângulos côngruos (para uma e duas voltas completas), e finalize apresentando as expressões gerais para ângulos côngruos, tanto em graus quanto em radianos, apresentando o exercício resolvido 1 como exemplo e propondo também a resolução do exercício resolvido 3, em que se discute uma manobra de *skate* vertical executada por Sandro Dias no X-Games Brasil de 2004.

O exercício 7 pode ser usado como atividade de fixação. Os exercícios resolvidos 2 e 3 podem auxiliar na apresentação do conceito de primeira determinação positiva, usada na representação dos ângulos côngruos, e o exercício 8 como atividade de fixação; já os exercícios 9 a 12 podem ser usados como atividade de aprofundamento e revisão.

Capítulo 3 – Funções trigonométricas

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
A ideia de seno, cosseno e tangente de um número real	Conhecimentos algébricos - relações no ciclo trigonométrico/ Conhecimentos geométricos - simetria, congruência de triângulos	C2	H7/H8
Valores notáveis do seno e do cosseno			
Redução ao 1º quadrante			
A ideia geométrica de tangente			
Estudo da função seno	Conhecimentos algébricos - funções trigonométricas	C5	H19/H20/H21/H22/H23
Estudo da função cosseno			
Senoides			

O estudo das **Funções trigonométricas** é de suma importância para a compreensão de fenômenos comuns em nosso cotidiano, uma vez que todas as situações envolvendo movimentos oscilatórios (tais como relógio de ponteiros, pêndulos, todos os tipos de ondas eletromagnéticas, vibrações em instrumentos de cordas, entre outros) podem ser descritas a partir de funções trigonométricas.

A leitura do texto inicial pode servir como estímulo ao estudo do tema, e a abordagem das **Noções iniciais** deve ser feita recordando as definições de tangente de um ângulo e a relação fundamental, que serão usadas adiante.

A apresentação da **Ideia de seno, cosseno e tangente de um número real** pode ser feita usando o círculo trigonométrico como referência, destacando que, para um ponto qualquer pertencente ao círculo trigonométrico, haverá um ângulo correspondente, e um triângulo, cuja altura estará relacionada ao seno desse ângulo, e a largura da base estará relacionada ao cosseno desse ângulo. Faça uso de figuras e tabelas para representar os **Valores notáveis do seno e do cosseno** em todos os quadrantes, destacando os sinais de cada relação em cada um dos quadrantes. Solicite que cada aluno confeccione um grande círculo trigonométrico representando os eixos dos senos e cossenos, e seus respectivos valores para os ângulos notáveis em todos os quadrantes. A atividade pode ser feita em dupla ou grupo, no entanto cada aluno deverá individualmente registrar a atividade em seu caderno.

Destaque as simetrias existentes determinando o valor do seno dos ângulos: 30°, 150°, 210° e 330° e cosseno dos ângulos 60°, 120°, 240° e 300°. Repita o procedimento para determinar o valor do seno dos ângulos $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$ e cosseno dos ângulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$, solicitando que os exercícios 1 a 6 sejam resolvidos em seguida, como atividade de fixação. Os exercícios 7 e 8 podem ser usados como atividade em dupla, para aprofundamento.

A ideia geométrica de tangente pode ser apresentada usando ângulos em diferentes quadrantes, destacando os sinais e ângulos para os quais ela se anula ou não é definida. O exercício 9 pode ser usado como atividade de fixação, e os exercícios 10 a 12 como atividade de aprofundamento.

Prosseguimos com o **estudo da função seno**, solicitando aos alunos a confecção de uma tabela com os valores do seno para os seguintes ângulos na primeira volta: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, π, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{6}$ e 2π. Em seguida, construa o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, destacando suas principais características, tais como imagem, e definindo seu período e sinais. O exercício 13 pode ser usado como fixação do conceito de imagem da função. Repita o procedimento para o **estudo da função cosseno**, usando o exercício 14 como fixação do conceito de imagem, e os exercícios 15, 16 e 17 como aprofundamento.

Em aplicações cotidianas, as funções trigonométricas envolvendo senos e cossenos são chamadas de **senoides**. Use como exemplo as funções $f(x) = 2 + \cos x$ e $g(x) = \text{sen } 2x$, determinando $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Represente graficamente as funções, comparando-as com as funções sen x e cos x. Na seção **Atividades complementares à Unidade 1** a seguir, apresentamos uma atividade em grupo que pode ser usada para abordar as senoides.

Na seção **Matemática e tecnologia – Gráfico de funções trigonométricas no computador** apresentamos uma sugestão de atividade envolvendo a construção de gráficos de funções senoidais com o auxílio do programa livre Geogebra, que pode ser complementada solicitando que os alunos representem as funções obtidas na atividade proposta a seguir, com o objetivo de comparar os gráficos obtidos pelo programa e pelas medições dos grupos.

Outras contextualizações podem ser obtidas estudando-se as **senoides e os fenômenos periódicos**, que podem ser representados pelas senoides $f(x) = a + b \cdot \text{sen }(cx + d)$ ou $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, com coeficientes b e c positivos, imagem representada pelo intervalo $[a - b; a + b]$ e período $\frac{2\pi}{c}$. O exercício resolvido 6 trata de uma representação do movimento de clientes em um supermercado ao longo do dia, e o exercício resolvido 5 versa sobre a altura das marés em uma determinada localidade (conexão entre Geografia e Física).

No boxe **Você sabia?** temos um texto com uma discussão a respeito da formação das marés (Física) e sua representação senoidal, podendo ser usado como avaliação e revisão.

Os exercícios 18 a 21 representam atividades de fixação individual ou em grupo. Os exercícios 22 a 26 apresentam outras situações do cotidiano que podem ser representadas a partir de senoides, em especial os exercícios 25 e 26 que tratam de temas de Física, tais como velocidade de cordas, ondas em superfícies líquidas e movimento harmônico simples.

Capítulo 4 – Relações trigonométricas

Tópicos	Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Relações fundamentais	Conhecimentos numéricos - relação de dependência entre grandezas	C1	H1/H2
Identidades trigonométricas	Conhecimentos algébricos - relações trigonométricas	C5	H19/H21/H22
Fórmulas de adição Fórmulas do arco duplo e do arco metade	Conhecimentos numéricos - relação de dependência entre grandezas Conhecimentos algébricos - relações trigonométricas	C1/C5	H1/H2/H19/H21/H22
Equações trigonométricas	Conhecimentos algébricos - equações	C5	H19/H21/H22/H23

Trataremos neste capítulo das **Relações trigonométricas**, sendo esse um assunto mais analítico e dedutivo do que prático, mas igualmente importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático.

Iniciamos apresentando as **Relações fundamentais**, cuja principal aplicação ocorre em exercícios nos quais se deve determinar os valores de relações trigonométricas a partir de uma outra dada inicialmente, como no primeiro exercício resolvido. É importante que o aluno entenda o raciocínio usado na resolução desse exercício, então, sugerimos que proponha o seguinte passo a passo para os alunos:

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

$\text{sen } x = -\dfrac{1}{4}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

b) O que se pede?

$\tan x$ e $\sec x$

2. Planejando a solução

Sabemos, a partir das relações fundamentais, que $\tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$ e $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. No entanto, nos foi fornecido apenas o valor de sen x. Para determinar o que é solicitado, precisamos do valor de cos x. Assim, podemos usar a relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para determinar o valor de cos x, já sabendo que cos x será negativo.Depois, devemos calcular o valor de tan x e sec x de acordo com as relações fundamentais.

3. Executando o que foi planejado

Substituindo o valor de $\text{sen } x = -\dfrac{1}{4}$ na expressão, temos: $\dfrac{1}{16} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Agora, vamos determinar o valor de tan x e sec x:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{-4}{\sqrt{15}} = \frac{-4\sqrt{15}}{15}$$

4. Emitindo a resposta

$\tan x = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$ e $\sec x = \dfrac{-4\sqrt{15}}{15}$

A explicação do passo a passo é importante, pois os alunos podem não conseguir resolver um exercício por não estabelecerem relações entre as informações fornecidas no enunciado.

Aproveite para propor o exercício 1, que deve ser feito individualmente em sala de aula, para fixação do procedimento. O exercício 3 pode ser usado como exemplo para simplificação de expressões, e os exercícios 2 e 4 aplicados como atividade de aprofundamento.

Outro ponto importante a ser discutido são as **Identidades trigonométricas**. Os alunos costumam apresentar certa dificuldade nesse tópico, geralmente relacionada a não entenderem o que se deve calcular. Acreditamos que isso ocorre porque os alunos não estão habituados a fazer demonstrações, mas sim a resolver problemas. Para iniciar, pode-se fazer uma atividade simples envolvendo igualdades e identidades. Veja:

Verifiquem as igualdades, classificando-as em verdadeiras ou falsas:

a) $2 = 2$ **(V)**
b) $2 = 0$ **(F)**
c) $2 + 1 = 3$ **(V)**
d) $2 + 1 = 4 - 1$ **(V)**
e) $10 : 2 + 3 = 2$ **(F)**
f) $10 : (2 + 3) = 2$ **(V)**
g) $10 : (2 + 3) = 5 - 12 : 4$ **(V)**

O objetivo desse exercício é estimular os alunos a verificar se as informações contidas nas duas sentenças separadas pelo sinal de igual são equivalentes ou não, trabalhando um processo diferente do qual eles estão acostumados. Em seguida, continuamos com o mesmo tipo de proposição, mas envolvendo as identidades, destacando que a sentença será verdadeira somente quando for válida para qualquer elemento do domínio das funções envolvidas. Assim, os próximos itens seriam:

h) $x = x$ **(V)**
i) $x = 2x - 1$ **(F)**, será verdadeira quando $x = 1$
j) $\tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$ **(V)**
k) $\tan x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$ **(F)**
l) $\text{sen } x \cdot \sec x = \tan x$ **(V)**, pois

$\text{sen } x \cdot \sec x = \text{sen } x \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \tan x$

No trabalho com identidades trigonométricas temos, basicamente, dois procedimentos a partir da relação $f(x) = g(x)$:

- partimos de $f(x)$ e a desenvolvemos até chegar a $g(x)$;
- partimos separadamente de $f(x)$ e $g(x)$ até chegar a um mesmo valor, concluindo assim que $f(x) = g(x)$.

Os exercícios 5 a 7, que podem ser resolvidos em duplas, ajudarão na fixação desses procedimentos.

Em algumas situações não temos tabelas ou calculadora científica para determinar os valores de senos, cossenos e tangentes de ângulos não notáveis. Nesses casos, conhecer algumas fórmulas ajuda na resolução de exercícios. Assim, abordamos as **Fórmulas de adição**, que relacionam senos, cossenos e tangentes de ângulos obtidos a partir de somas e subtrações de ângulos notáveis.

Apresente as fórmulas da adição e subtração de arcos, usando como exemplo o cálculo de:

$\cos 15° = \cos (45° - 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Usando o exemplo acima como referência, peça aos alunos que pensem em outras opções de operações com ângulos notáveis que possam gerar o cos 15°, cos (60° − 45°), por exemplo, e solicite que façam o cálculo para verificar a igualdade: $\cos (45° - 30°) = \cos (60° - 45°)$.

Aproveite e peça que verifiquem a igualdade:
$\cos 45° - \cos 30° = \cos 60° - \cos 45°$. Veja essa verificação:

$\cos 45° - \cos 30° = \cos 60° - \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} \neq 1 - \sqrt{2}$

Para alguns alunos ainda pode não fazer sentido (por causa das raízes), então podemos usar as aproximações $\sqrt{2} = 1{,}41$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$, obtendo:
$\sqrt{2} - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow 1{,}41 - 1{,}73, = 1 - 1{,}41 \Rightarrow$
$\Rightarrow -0{,}32 = -0{,}41$

Observamos aqui dois absurdos:

1) os valores não são iguais.
2) não há como o cosseno de um ângulo no primeiro quadrante (15°) ser negativo.

Discuta os resultados com seus alunos, para que eles percebam um dos principais erros cometidos no tema, que é confundir soma e subtração de ângulos com soma e subtração de senos e cossenos.

Proponha, então, que os exercícios 8, 9 e 10 sejam resolvidos, e use o exemplo de **Aplicação na Geometria** para auxiliá-los na resolução dos exercícios 11 e 12.

Em outros casos é mais útil usarmos as **Fórmulas do arco duplo e do arco metade**, que são obtidas para o caso particular da soma de dois ângulos iguais. Apresente as fórmulas e o exercício resolvido 7 em que dado sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, pretende-se calcular os valores de sen $2x$, cos $2x$ e tan $2x$, usando as fórmulas de arco duplo.

Verifique os cálculos usando o círculo trigonométrico, uma vez que $x = \frac{\pi}{3}$, ou 60°, e $2x = \frac{2\pi}{3}$ ou 120°.

Solicite, em seguida, que os alunos repitam o procedimento para o caso em que sen $x = \frac{1}{2}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ou seja, para o ângulo $x = 30°$ e $2x = 60°$. Nesse caso, a comparação dos resultados é mais simples, pois o ângulo $2x$ também é notável. Finalize com os exercícios 13 a 20, que podem ser resolvidos em dupla, como atividade de aprofundamento.

Finalizamos o capítulo trabalhando as **Equações trigonométricas**, tomando, no entanto, alguns cuidados para a obtenção das soluções. Por exemplo, considerando a equação sen $x = \frac{1}{2}$, sabemos que, para o primeiro quadrante, a solução será $x = \frac{\pi}{6}$ ou 30°. No entanto, se levarmos em conta outros conjuntos universos, essa resposta não será única. No caso de $U = [0, 2\pi]$, teremos também o ângulo $x = \frac{5\pi}{6}$ ou 150°. Mostre isso para os alunos no círculo trigonométrico, e para $U = \mathbb{R}$ teremos infinitas soluções, que podemos representar por meio das soluções gerais: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, com k inteiro.

No caso da equação sen $2x = \frac{1}{2}$, temos $U = \mathbb{R}$ e seguimos o mesmo procedimento descrito acima, chegando às soluções: $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Dividindo ambos os termos por 2, temos: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ e $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

No caso de $U = [0, 2\pi]$ devemos tomar a solução geral acima e substituir vários valores de k até completar o conjunto universo solicitado, assim temos:

para $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12}$

para $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$

para $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2\pi$ ou $\frac{5\pi}{12} + 2\pi$ (não servem, pois extrapolam o intervalo $[0, 2\pi]$)

Assim, a solução será dada por:

$S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$. A verificação pode ser feita usando uma calculadora científica, transformando os ângulos em radianos para graus.

Complemente resolvendo as equações apresentadas nos exercícios resolvidos. O resolvido passo a passo discute a altura de um satélite em órbita elíptica sobre a Terra, em função do ângulo, o que representa uma conexão com as disciplinas de Física e Geografia. Os exercícios 21 a 29 podem ser resolvidos como atividade de fixação e aprofundamento, em dupla ou grupo.

As questões apresentadas na seção **Pensando no Enem** representam algumas aplicações de conceitos trigonométricos e funções trigonométricas em nosso cotidiano, tais como a estrutura da fachada do Monumento aos Direitos Humanos apresentada na questão 1; a planificação do mapa-múndi que aparece nas questões 4 e 5; a relação entre ângulos e plano inclinado usada na Física que aparece na questão 6 e o movimento das marés, que é analisado na questão 7.

Na seção **Vestibulares de Norte a Sul** também encontramos algumas questões contextualizadas que podem ser abordadas como atividade de aprofundamento e revisão. Destaque para o exercício 6, em que se representa a pressão arterial de uma pessoa a partir de uma função cosseno, e o exercício 13, que trata do volume de ar nos pulmões durante a respiração. Nesses temos uma conexão com Biologia.

Atividades complementares à Unidade 1

A atividade a seguir pode ser feita para complementar e auxiliar o estudo das senoides feito no capítulo 3.

1. **Atividade em grupo**: Cada grupo será responsável pela coleta de dados e confecção de uma tabela de dados e de um gráfico, usando como referência o disco do pedal de uma bicicleta, cujo movimento pode ser classificado como um movimento periódico, e, consequentemente, descrito por uma senoide.
   As medidas deverão ser feitas usando uma régua (cm) e um transferidor, para determinar a posição dos ângulos notáveis no disco da bicicleta. Cada grupo deverá também medir e anotar o valor do raio do disco.

Grupo 1: Medirá as alturas do pedal, a partir do centro da circunferência (pedal).

Grupo 2: Medirá as alturas do pedal a partir do ponto mais baixo da circunferência (pedal).

Grupo 3: Medirá as larguras do pedal, a partir do centro da circunferência (pedal).

Grupo 4: Medirá as larguras do pedal, a partir do ponto mais à esquerda da circunferência (pedal).

Compare os gráficos apresentados pelos grupos, e discuta as possíveis comparações para representar as funções obtidas a partir de funções seno e cosseno.

Grupo 1: $f(x) = r \cdot \text{sen } x$, em que r representa o raio do disco do pedal.

Grupo 2: $f(x) = r(1 + \text{sen } x)$, em que r representa o raio do disco do pedal.

Grupo 3: $f(x) = r \cdot \cos x$, em que r representa o raio do disco do pedal.

Grupo 4: $f(x) = r(1 + \cos x)$, em que r representa o raio do disco do pedal.

As atividades a seguir devem ser realizadas em grupos e complementam o assunto estudado na unidade.

2. *Medindo distâncias em ambientes inacessíveis*

A topografia, palavra que significa *descrição de um lugar*, é a ciência que trata da medição e representação da superfície terrestre. Os levantamentos topográficos permitem o conhecimento de determinada região, possibilitando a elaboração de estudos e projetos de Engenharia (edificação, sistemas viários, agrícolas, etc.), além de implantar e controlar dimensionalmente as obras projetadas. Como estudamos no livro, um dos aparelhos característicos dos topógrafos é o teodolito, que serve para medir precisamente ângulos horizontais e verticais, obtendo assim informações sobre terrenos onde serão construídos prédios, casas, além de ajudar a medir distâncias de difíceis acessos, tais como a largura de um rio.

Um rio muito importante para o Nordeste, por exemplo, é o rio São Francisco. Para se ter ideia do tamanho e da sua importância, ele possui 2 830 km de extensão, entre 300 m e 800 m de largura, separa a Bahia de Pernambuco e Alagoas de Sergipe e passa por áreas influenciadas por diferentes climas, vegetações e relevos. Suas utilidades são das mais variadas, por exemplo, o uso para fonte hídrica para a geração de energia em cinco usinas hidrelétricas, além de, em diversos trechos, o "Velho Chico" (como é conhecido popularmente) oferecer condições de navegação servindo assim como transporte de materiais importantes como cimento, sal, açúcar, arroz, soja, madeira, etc.

Com a apresentação dos conceitos iniciais de seno e cosseno de um ângulo agudo, que se dá em um triângulo retângulo, tem-se certa dependência da presença do ângulo reto no triângulo, ou seja, para resolver alguns problemas há a necessidade de que o triângulo seja retângulo. Sempre é possível resolver um problema de trigonometria no triângulo com as definições das razões trigonométricas no triângulo retângulo, porém, existem processos práticos que encurtam as soluções de alguns problemas sem que haja a necessidade da existência de um ângulo reto no triângulo, que é o casos da **lei dos senos** e da **lei dos cossenos**.

Para se calcular a largura de um rio como o São Francisco, que não possui uma largura fixa, basta usar o teodolito para fazer a medição de dois ângulos e, formando um triângulo, a partir da lei dos senos, determinar a largura.

Agora, faça o que se pede.

a) Defina topografia.

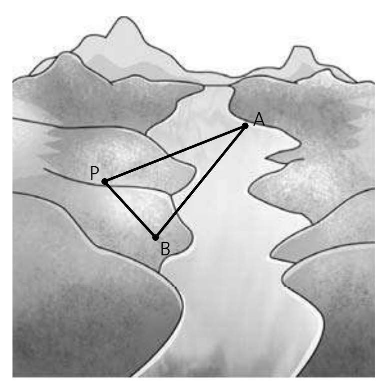
b) Qual é a finalidade do teodolito?

c) Pesquise com seus colegas os tipos de teodolitos mais usados nas edificações hoje.

d) Indique pelo menos três funções importantes do rio São Francisco.

e) Qual é a vantagem de se conhecer a lei dos senos e a lei dos cossenos?

f) Suponha que a largura do rio São Francisco seja a média aritmética entre a maior e a menor largura que ele possui e que um topógrafo localizado num ponto P da margem esquerda fixe um ponto A na margem direita através do teodolito, de modo que $\overline{AP}$ seja a largura média do rio. Se o topógrafo se deslocar 200 m na mesma margem esquerda e ao parar num ponto B, meça um ângulo $P\hat{B}A$ de 30°, observe a representação matemática dessa situação e determine o seno do ângulo $P\hat{A}B$.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

Resolução:

a) Topografia é a ciência que trata da medição e representação da superfície terrestre.

b) Medir precisamente ângulos horizontais e verticais.

c) Resposta pessoal.

d) Fonte hídrica para a geração de energia em cinco usinas hidrelétricas; transporte de vários elementos básicos de alta importância, como açúcar, madeira, etc.; irrigação e desenvolvimento de várias cidades como Pirapora (MG), Juazeiro (BA), Petrolina (PE) e Piranhas (AL).

e) A maior vantagem é a quebra da dependência da existência do ângulo reto, ou seja, essas leis podem ser aplicadas em um triângulo qualquer.

f) De acordo com o texto temos que os valores máximo e mínimo da largura do "Velho Chico" são de 800 m e 300 m, então: $PA = \dfrac{300 \text{ m} + 800 \text{ m}}{2} = 500 \text{ m}$

Sendo α = PÂB, pela lei dos senos, temos:

$$\frac{PA}{\text{sen } 30°} = \frac{PB}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \frac{500}{\frac{1}{2}} = \frac{200}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \text{ sen } \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{5}$$

3. Sejam A, B e C três pontos distintos de uma circunferência tais que $AB = 2$, $BC = 1$ e a medida do ângulo $A\hat{B}C$ seja 120°.

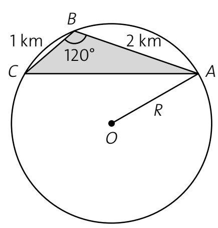
a) Faça uma figura representativa da situação descrita.

b) Calcule a medida de AC.

c) Calcule a medida do raio da circunferência.

Resolução:

a)



b) Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC^2 = 1 + 4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7 \Rightarrow AC = \sqrt{7}$$

c) Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{AC}{\text{sen } 120°} = 2r \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

4. *Triângulo das Bermudas*

O Triângulo das Bermudas é um dos únicos lugares do mundo onde uma bússola não aponta para o norte magnético. Através dos anos centenas de barcos e aviões desapareceram na área do oceano Atlântico entre Bermuda, Porto Rico e Fort Lauderdale. Quando ocorre um desaparecimento as equipes de resgate realizam busca em uma área circular com um determinado raio. Se um navio desapareceu no Triângulo das Bermudas e deseja-se realizar uma busca em uma região circular circunscrita ao Triângulo, qual deverá ser a área de busca sabendo que o Triângulo das Bermudas é equilátero de lado 1 000 km?

a) $1\,000\,000\pi$ km²

b) $\dfrac{1\,000\,000}{3}\pi$ km²

c) $\dfrac{1\,000\,000}{5}\pi$ km²

d) $2\,000\,000\pi$ km²

e) $\dfrac{2\,000\,000}{3}\pi$ km²

Resolução:

Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{1000}{\text{sen } 60°} = 2r \Rightarrow \frac{1000}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2r \Rightarrow r = \frac{1000}{\sqrt{3}}$$

Área de busca: $\pi r^2 = \dfrac{1\,000\,000}{3}\pi$ km²

Resposta: alternativa **b**.

Unidade 2 – Matrizes, determinantes e sistemas lineares

A abertura desta unidade aborda como se dá a formação da imagem digital, que, por se tratar de parte integrante da sociedade atual, desperta o interesse dos alunos para o estudo dos assuntos apresentados na unidade. Ela possibilita ao professor explorar a aplicabilidade das matrizes, assim como ampliar a gama de exemplos.

As respostas apresentadas pelos alunos às duas questões propostas constituem um instrumento de avaliação do nível de compreensão de texto que os alunos possuem. As respostas esperadas são:

1. Uma imagem digital é formada por um conjunto de milhares de *pixels*.

2. A definição da imagem digital está relacionada com a quantidade de linhas e colunas com que é formada, ou seja, com a quantidade de *pixels*.

Capítulo 5 – Matrizes e determinantes

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Definição de matriz	-	-	-
Representação genérica de uma matriz	-	-	-
Matrizes especiais	-	-	-
Igualdade de matrizes	-	-	-
Adição e subtração de matrizes	-	-	-
Multiplicação de número real por matriz	-	-	-
Matriz transposta	-	-	-
Multiplicação de matrizes	-	-	-
Determinante de uma matriz	-	-	-
Matriz inversa de uma matriz dada	-	-	-
Aplicação de matrizes	-	-	-

Apesar de não ser um assunto contemplado na Matriz do Enem, o assunto deste capítulo tem extensas aplicações em nosso cotidiano, variando desde a configuração de memórias em computadores, programas e previsões em redes sociais de empresas até a determinação de probabilidades e cálculos de comissões. O estudo de **Matrizes e determinantes** pode auxiliar a compreensão de diversas situações e desenvolver o raciocínio lógico matemático. Além disso, uma questão do Enem 2012 abordou esse assunto.

O tema pode ser iniciado discutindo-se com os alunos situações que envolvam a distribuição ordenada de informações, tais como um gaveteiro ou uma estante em uma biblioteca, o monitor de um computador ou televisão, entre outras situações que possam surgir. Discuta a estrutura de armazenamento das situações exploradas, aproveitando para fazer uma **Introdução às matrizes**, usando como exemplo os dados disponibilizados sobre a Liga Mundial de Vôlei em 2012, discutindo questões do tipo: "Quantas vitórias teve o Brasil?", "Quantos jogos cada equipe fez?", auxiliando-os a interpretar e a obter informações nas tabelas fornecidas.

Em seguida, aborde o exemplo relacionando a venda de livros em uma editora para chegar à **Definição de uma matriz**, apresentando sua representação matemática e descrevendo suas principais características (número de linhas, número de colunas e elementos da matriz). Complemente com exemplos de outras matrizes com formatos diferentes, por exemplo, matrizes do tipo 2×2, 2×3, 1×3 e 3×1, resolvendo os exercícios 1 e 2 para fixar.

Prossiga apresentando a **Representação genérica de uma matriz** e as **Matrizes especiais**, tais como a matriz quadrada, a matriz identidade e a matriz nula, analisando os exemplos de cada uma delas e destacando as diagonais principal e secundária na matriz quadrada.

Apresente e discuta o conceito de **Igualdade de matrizes** com exemplos de matrizes que podem ser iguais (duas matrizes 2×2) e matrizes que não podem ser iguais (uma matriz 2×3 e outra 3×2) destacando que não apenas os elementos devem ser correspondentes, mas o formato da matriz deve ser compatível, caso contrário não há comparação possível. Complemente com o exercício resolvido 1 e proponha aos alunos a resolução dos exercícios 3 a 7 como fixação e os exercícios 8 a 10 como aprofundamento e revisão.

As operações de **Adição e subtração de matrizes** podem ser explicadas usando o exemplo proposto em que se apresenta, sob a forma de tabela, as vendas de dois eletrodomésticos efetuadas por três vendedores, em um determinado mês, e as mesmas vendas para o mês seguinte. Para se determinar o valor arrecadado com as vendas no bimestre será necessário somar os elementos das duas matrizes obtidas a partir das tabelas. Efetuando-se a subtração pode-se avaliar a evolução das vendas no bimestre. Esse exemplo também pode ser usado para definir matriz oposta de uma matriz *A* e subtração de matrizes, solicitando que os exercícios 11 e 13 sejam feitos como atividade de fixação.

A situação-problema das vendas de eletrodomésticos também é usada como referência para se calcular a **Multiplicação de um número real por matriz**, quando for necessário determinar o valor da comissão ganha por vendedor, presumindo-se que cada um ganha de comissão 5% sobre as vendas, por exemplo. No caso da **Matriz transposta**, basta solicitar que os alunos apresentem os dados das tabelas representando os vendedores nas colunas e não mais nas linhas. Complemente com exemplos de matrizes 2×2, 2×3 e 3×3 e solicite que os exercícios 16 a 18 sejam feitos como atividade de fixação. Os exercícios 19 a 21 podem ser realizados em dupla, como atividade de aprofundamento e avaliação.

A **Multiplicação de matrizes** é usada em casos em que se necessita determinar, por exemplo, a pontuação total de um determinado time em um campeonato, sabendo-se o número de vitórias, empates e derrotas de cada time e dispondo esses dados em uma tabela. Usando a situação apresentada no livro, os alunos serão levados a determinar o total de pontos, sendo necessário transpor para o formato de matrizes e detalhar os procedimentos para a explicação. Destaque que o produto das matrizes ($A \cdot B$) será possível somente nos casos nos quais A é matriz do tipo $m \times n$ e B é matriz do tipo $n \times p$ e a matriz resultante será do tipo $m \times p$. Mostre exemplos de produtos de matrizes 1×3 por uma matriz 3×1, cujo resultado será uma matriz 1×1; de uma matriz 2×3 por uma matriz 3×2, cujo resultado será uma matriz 2×2 e de uma matriz 3×2 por uma matriz 2×2, cujo resultado será uma matriz 3×2. Destaque para o exercício resolvido 5, no qual se discute a quantidade mínima diária de ingestão de proteínas, gorduras e carboidratos, que apresenta uma conexão com Biologia. Solicite que os exercícios 22 a 25 e 28 a 30 sejam resolvidos como atividade de fixação e os exercícios 26 e 27 como referência para discutir as potências de matrizes e produtos notáveis.

Alguns trabalhos podem ser propostos para estimular o estudo do tema, como atividade em grupo de avaliação. Por exemplo:

Proposta 1: Trabalho envolvendo as disciplinas de Educação Física, Biologia e Matemática com o tema: Matrizes e Diabetes, tomando como referência o artigo "Tratamento de diabetes: uma aplicação de matrizes", de Cristiani dos Santos Campo, disponível em: <www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSINO%20DE%20MATRIZES.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2013.

Proposta 2: Trabalho envolvendo matrizes e rotas aéreas, baseado na atividade interativa "Aviões e matrizes", disponível no *site* do Matemática Multimídia da Unicamp: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1221>. Acesso em: 29 mar. 2013.

Proposta 3: Lista extra de exercícios com aplicações diversas, baseada no artigo "A modelagem matemática no ensino de matrizes e sistemas lineares", de Letícia Menezes Panciera e Dr. Márcio Violante Ferreira, disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/621-4.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2013.

Ao abordar o tópico **Determinante de uma matriz**, explique que ele é um número associado a matrizes quadradas que historicamente surgiu para indicar se um sistema possui uma única solução ou não, mas que também possui uma série de aplicações, principalmente no cálculo de áreas de figuras planas e condições de alinhamento de pontos.

Uma vez que os determinantes estão associados às soluções de sistemas, discuta com seus alunos as soluções das seguintes equações:

a) $2x = 8$; possui uma única solução, $x = 4$.
b) $2x = 0$; como no item anterior possui uma única solução, $x = 0$;
c) $0x = 0$; parece óbvio, mas é importante destacar que a equação possui infinitas soluções, uma vez que o produto de qualquer número real por zero será sempre zero.
d) $0x = 5$; nesse caso a equação não possui solução, uma vez que o produto de um número real por zero é sempre zero, nunca será 5.

Na discussão, certifique-se de que os alunos tenham notado que, para a solução ser única, o coeficiente de x não deve ser nulo.

Apresente o **Determinante de ordem 2**, que representa a quantidade de soluções de um sistema 2×2, usando como referência a solução do sistema genérico e compare com o cálculo a partir da matriz. Em seguida, apresente alguns exemplos simples, destacando as nomenclaturas associadas e que o determinante pode ser tanto positivo quanto negativo.

Devemos representar o determinante de uma matriz A por det A ou pelos elementos da matriz A envoltos por | |. O uso de ( ) ou [ ] fica reservado para as matrizes.

O **Determinante de ordem 3** pode ser apresentado usando diretamente a forma prática, ou regra de Sarrus, seguindo as instruções do livro-texto, e usando os exercícios 31 e 32 como atividade de fixação.

Use o exercício resolvido 6 para discutir a solução de equações envolvendo determinantes e os exercícios 33 e 36 como aprofundamento. O exercício 34 pode ser usado como atividade de revisão e aprofundamento, aproveitando para demonstrar algumas propriedades e não propriedades, comparando os itens **d** e **e**; **g** e **h**; **i** e **j**. Já o exercício 38 representa situações em que o determinante resulta em zero, podendo ser usadas como fonte de discussão das propriedades que zeram determinantes.

O **teorema de Binet** também pode ser discutido, fazendo uma apresentação simples com duas matrizes A e B, ambas 2×2, mostrando que det $(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$. Os exercícios 35 e 39 são para fixação e aplicação no cálculo de determinantes de potências de matrizes e o exercício 40 para calcular o determinante da matriz identidade I.

Você pode finalizar definindo a **Matriz inversa de uma matriz dada**, a partir do produto $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = 1$.

Tome como referência a definição de inverso multiplicativo de um número, definindo o produto $a \cdot a^{-1} = 1$, tomando o cuidado de destacar que o inverso de 2 é, por exemplo, $\frac{1}{2}$, mas para determinar a matriz inversa de uma matriz não basta inverter os elementos, temos que considerar a definição de inverso, ou seja, o produto de dois inversos é igual a 1. Use como exemplo as matrizes A e A^{-1} definidas no livro, provando que o determinante de A é diferente de zero e que o produto das duas matrizes é a matriz I_2. Os exercícios 41 e 42 podem ser usados como atividade de fixação, o exercício 43 pode ser usado como exemplo de como se determina uma matriz inversa, e os exercícios 44 e 45 podem ser usados como atividade de aprofundamento e revisão.

Em **Aplicações de matrizes** é apresentada a mudança de posição de figuras (translação, reflexão, rotação e escala) por meio das matrizes e um modo de criptografar textos.

Na seção **Outros contextos** apresentamos outra aplicação de matrizes relacionada com História, na qual se apresenta uma discussão histórica do calendário usado no Ocidente (História) e nos exercícios são apresentadas diversas questões sobre o tema, complementando o estudo do capítulo.

Capítulo 6 – Sistemas lineares

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Sistemas lineares 2×2	Conhecimentos algébricos - equações/ Conhecimentos algébricos/geométricos - sistema de equações	C5	H19/H20/H21/H22/H23
Equações lineares			
Sistemas de equações lineares			

O estudo da resolução de **Sistemas lineares** – problemas com duas ou mais variáveis – sempre esteve entre os desafios mais intrigantes e relacionados a situações do cotidiano, e tem sido objeto de estudo dos matemáticos ocidentais desde o século XVII com as importantes contribuições de Leibniz e Cayley relacionando sistemas lineares a determinantes e suas representações matriciais.

Divida a turma em duplas e apresente o primeiro tópico, **Sistemas lineares 2 × 2**, propondo que eles resolvam os itens apresentados e que sugiram resoluções. Supondo que o tema tenha sido estudado no Ensino Fundamental, a intenção é fazer com que os alunos recordem, discutam e reativem a memória dos procedimentos necessários para obter a solução de sistemas, tais como método da adição, da substituição, comparação; possibilitando ao professor identificar potenciais dificuldades. Caso observe alguma dificuldade, utilize o exercício 1 como ferramenta para revisar os métodos de resolução de sistemas lineares.

Destaque que discutiremos no capítulo somente as **Equações lineares**, citando os exemplos apresentados no livro. Apresente também as equações que não são consideradas equações lineares e o porquê de não serem.

Discuta as possíveis soluções das equações apresentadas nos itens **a** e **b** do início da página 112. Destaque a importância da interpretação das informações contidas no par ordenado. No caso do par (4, 3) temos, obrigatoriamente, $x = 4$ e $y = 3$, e nunca o contrário. Aproveite para discutir o significado geométrico do par ordenado (no caso do exemplo, os pares ordenados são números reais que representam a solução de cada equação linear, geometricamente representadas por retas). No caso do item **b** as ternas ordenadas representam pontos de um plano no espaço.

Os exercícios 2 e 3 são atividades de fixação, com o objetivo de habilitar a verificação de soluções de uma equação linear. Os exercícios de 3 a 6 são para aprofundamento do conteúdo.

Os **Sistemas de equações lineares** podem ser apresentados também a partir dos exemplos sugeridos no livro-texto, discutindo, em seguida, a verificação de possíveis soluções para os outros sistemas apresentados. Destaque que só poderemos considerar como solução possível o conjunto de valores que satisfizer a verificação de todas as equações do sistema linear, usando o exercício 7 como atividade de fixação.

Trabalhamos a **Classificação dos sistemas lineares** usando exemplos de sistemas do tipo 2×2, uma vez que os alunos possuem familiaridade com esse tipo de problema. Além disso, faremos uso da interpretação geométrica de cada situação apresentada, com o objetivo de destacar as aplicações e trabalhar com as habilidades relacionadas à Geometria e a construção de gráficos com os alunos.

O exemplo proposto no item **a** do livro-texto apresenta um sistema possível e determinado, aquele que possui uma única solução, ou seja, um conjunto solução unitário. No nosso exemplo a interpretação geométrica equivale a determinar o ponto de intersecção das duas retas representadas pelas equações lineares do sistema. No item **b** o sistema é impossível e representado geometricamente por duas retas paralelas, já no item **c** o sistema é possível e indeterminado, representado geometricamente por retas coincidentes. O assunto pode ser abordado solicitando que os alunos, em dupla, representem graficamente as retas, usando régua e malha quadriculada, discutindo os resultados obtidos e construindo um resumo das discussões apresentadas. A atividade também poderá ser realizada usando programas de construção gráfica (tais como o programa de uso livre Geogebra), caso seja viável. Finalize a atividade com a resolução dos exercícios 8 e 9, como atividade de fixação.

No capítulo anterior foi apresentada a relação entre determinantes e sistemas, e discutiremos agora com mais precisão a relação entre matrizes, sistemas lineares e determinantes, usando como exemplo os sistemas estudados no item **Classificação dos sistemas lineares**, representando-os matricialmente e solicitando que os alunos calculem o determinante da matriz dos coeficientes e discutindo os resultados obtidos. Os resultados obtidos são apresentados a seguir:

a) $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2 = 15 + 2 = 17 \neq 0$$

b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2 = -4 + 4 = 0$$

c) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9) - (-6) \cdot 3 = -18 + 18 = 0$$

Dessa forma, pode-se observar que determinantes diferentes de zero estão associados a sistemas possíveis e determinados, e que determinantes iguais a zero estão associados a sistemas impossíveis ou a sistemas possíveis e indeterminados. Ressalte que o uso do determinante por si não é suficiente para diferenciar os sistemas impossíveis e os possíveis e inderteminados. Use o exercício 10 como exemplo de aplicação do cálculo do determinante e os exercícios 11 e 12 como atividade de fixação.

O **Escalonamento de sistemas lineares** é um método que proporciona uma classificação eficaz dos sistemas lineares, bem como a determinação de seu conjunto solução. Inicie apresentando o sistema linear escalonado sugerido no livro, proponha aos alunos que determinem sua solução. Permita a discussão para determinar o melhor procedimento a seguir, estimulando-os a notar o que tornou o sistema de simples solução. Apresente então os outros sistemas escalonados propostos no livro como exemplo para **Classificação e resolução de sistemas escalonados**, usando-os como referência para classificá-los, destacando que a observação da última linha é suficiente para determinar sua classificação.

Sistemas possíveis e determinados apresentam na última linha uma equação linear com apenas uma incógnita, com solução determinada, como é o caso do sistema apresentado no item **a**. Para determinar o conjunto solução, basta resolvê-lo de baixo para cima, substituindo os valores de cada incógnita determinada.

O sistema será impossível quando a última equação linear for impossível de ser resolvida, como é o caso do sistema apresentado no item **b**.

O sistema será possível e indeterminado quando o número de equações for menor que o número de incógnitas, ou quando a última equação linear for indeterminada (o que acontece, por exemplo, no caso da equação $0x = 0$).

O conjunto solução, nesse caso, estará invariavelmente ligado a uma ou mais incógnitas livres, ou seja, a determinação das variáveis depende necessariamente de outras. Os exemplos apresentados nos itens **c** e **d** representam duas situações em que o sistema é possível e indeterminado, no primeiro caso com grau de indeterminação 1 (uma incógnita livre) e com grau de indeterminação 2 (duas incógnitas livres) no segundo caso.

O exercício 14 deve ser usado como atividade de fixação, para que os alunos classifiquem e determinem soluções de sistemas escalonados.

O procedimento usado para escalonar sistemas engloba a ideia de **Sistemas lineares equivalentes**, bastando apresentar os sistemas equivalentes sugeridos no livro e a denominação de sistemas equivalentes àqueles sistemas que apresentam o mesmo conjunto solução. O conceito pode ser usado para determinar coeficientes desconhecidos em sistemas equivalentes, como apresentado no exercício resolvido 2 e no exercício 15.

A aplicação mais comum de sistemas equivalentes é o **Processo para escalonamento de um sistema linear**, em que usamos as operações básicas e procedimentos adotados no método da adição (usado para determinar a solução de sistemas lineares no Ensino Fundamental) com o objetivo de sucessivamente reduzir o número de incógnitas nas equações lineares de um sistema. Use os exemplos propostos no livro para apresentar o processo, discutir os sistemas equivalentes obtidos e determinar seu conjunto solução. Complemente a explicação com o exercício resolvido 3, no qual se questiona o preço de venda de livros em uma determinada livraria, a partir de uma tabela geral de vendas.

Você pode usar os exercícios 17 a 20 como atividade de fixação. Os exercícios 21 a 30 apresentam diversas situações contextualizadas, em que é necessário interpretar o enunciado, para posteriormente escrever o sistema e avaliar o melhor procedimento para a resolução do problema, e podem ser usados como atividade de aprofundamento ou em duplas, como avaliação. Alguns, em especial, apresentam aplicações interessantes, tais como o exercício 23, que apresenta uma discussão relacionada ao fluxo de trânsito em uma área urbana de mão única; no exercício 26 se discute o fluxo de atendimento em caixas bancários; o exercício 24 apresenta uma equação química balanceada (se necessário, peça auxílio do professor de Química) e o exercício 28, que discute a quantidade de nutrientes em determinados alimentos em uma determinada receita. O exercício 27 apresenta um sistema para o qual os alunos deverão criar uma situação que possa ser representada por ele, e os exercícios 29 e 30 podem ser usados como exemplos de situações de aprofundamento, pois discutem a solução de sistemas homogêneos (sistemas nos quais todas as equações lineares são iguais a zero.)

Você pode finalizar o capítulo apresentando a **Discussão de um sistema linear**, a partir de parâmetros propostos pelo problema, tomando como referência a classificação dos sistemas a partir do determinante. Use o exemplo apresentado no livro e determine os possíveis valores de cada parâmetro de acordo com o determinante, considerando inicialmente a condição para que ele seja um sistema possível e determinado, ou seja, que o determinante seja não nulo. Em seguida, leve em consideração o determinante nulo associado aos sistemas impossíveis e possíveis e indeterminados, avalie o parâmetro restante, diferenciando as duas classificações. Os exercícios resolvidos 4 e 5 podem ser usados como exemplo, e os exercícios 31 a 36 como atividade de fixação, em dupla.

Como aprofundamento, sugerimos a leitura da seção **Um pouco mais...** A **Programação linear e otimização de funções** aborda a otimização nutricional e custo de uma dieta (conexão com Biologia) e pode ser usada como referência para a execução de um trabalho avaliativo. Sugerimos como material auxiliar o vídeo: Comendo números, disponível no *site* Matemática Multimídia da Unicamp: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1073>. Acesso em: 29 mar. 2013. Também apresentamos a **Interpretação geométrica de sistemas 3 × 3**, na qual se apresentam as diversas classificações de sistemas lineares e suas possíveis interpretações geométricas no espaço, uma vez que equações lineares com três incógnitas representam planos no espaço tridimensional.

As questões apresentadas na seção **Pensando no Enem** representam algumas aplicações de matrizes em nosso cotidiano, tais como a análise das vendas de automóveis por meio de matrizes apresentada na questão 1 e o consumo de energia elétrica por aparelhos eletrônicos discutida na questão 2. Na questão 3 é fundamentada em um tema social.

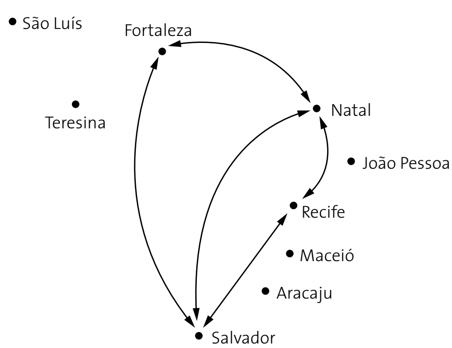
Na seção **Vestibulares de Norte a Sul** são apresentadas diversas situações que podem ser usadas como atividade de avaliação e aprofundamento. Destacamos o exercício 2, no qual se questiona o valor do quilo do peixe vendido no mercado Ver-o-Peso; o exercício 11 que solicita a determinação do valor total consumido em uma certa lanchonete e o exercício 14, que solicita a quantidade de calças compradas em um determinado comércio varejista.

Atividades complementares à Unidade 2

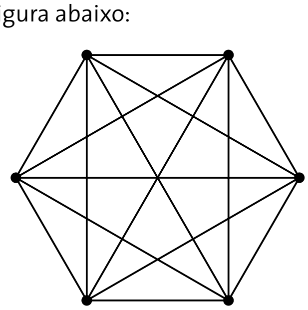
As atividades a seguir envolvem os conteúdos estudados nesta unidade e podem ser abordadas como miniprojetos.

1. *Embalagens, linhas aéreas, as matrizes e o seu ciclo de trabalho*

As matrizes são tabelas nas quais dispomos elementos (números, letras, palavras, etc.) em linhas horizontais e em colunas verticais. Em um mundo globalizado como o nosso, em que a quantidade de informações cresce rapidamente, podemos usar as matrizes para armazenar e exibir, de modo bem organizado e de fácil leitura, muitas informações. Se no dia a dia observarmos mais atentamente ao nosso redor verificaremos diversas situações cujas matrizes se fazem presentes. Por exemplo, nos rótulos de muitos produtos que compramos no supermercado nos quais estão descritas as composições químicas dos produtos; nos boletins escolares, em que as notas das diversas disciplinas, os números de faltas por bimestre são dispostos ao longo do boletim (que nada mais é que uma tabela, ou seja, uma matriz); nos jornais e revistas em que diariamente há dezenas de tabelas com índices de reajustes de preços e de desenvolvimento de diversos países, números de estudantes que tiveram acesso ao ensino superior ao longo de determinados anos, entre muitas outras situações. Enfim, estamos cercados por situações em que as matrizes estão presentes. Uma situação que evidencia o poder de síntese da linguagem das matrizes é o tráfego aéreo existente entre determinadas cidades. A figura abaixo ilustra parte desse tráfego aéreo entre algumas cidades brasileiras:



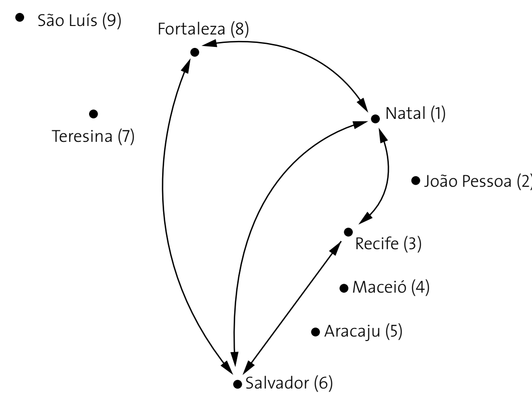
Se entre duas cidades, da figura acima, há uma linha ligando-as, significa que na prática existe voo direto operado por certa companhia aérea de uma para outra e vice-versa. Assim, por exemplo, se olharmos na figura acima temos uma linha de reta ligando as cidades de Natal e Recife o que significa que essa empresa aérea tem voo direto de Natal para Recife e vice-versa. Já as cidades de Natal e Maceió não são conectadas, significando que não existe voo direto de Natal para Maceió pela companhia considerada, nem de Maceió para Natal. Podemos usar a linguagem das matrizes para resumir todas as informações que podem ser obtidas a partir da figura acima. Para ilustrar esse processo consideremos um **grafo**, que, *grosso modo*, é um conjunto de pontos chamados vértices, que podem ou não serem ligados por meio de segmentos chamados de arestas conforme ilustra a figura abaixo:



Quando enumeramos os vértices de um grafo podemos associar a ele uma matriz chamada de **matriz de adjacência** do grafo (que de certa forma carrega muitas informações sobre ele). Para um grafo com n vértices (pontos) a matriz de adjacência é uma matriz $n \times n$ cujos elementos a_{ij} são definidos pela lei:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ quando o vértice } i \text{ está ligado ao vértice } j \\ 0, \text{ quando o vértice } i \text{ não está ligado ao vértice } j \end{cases}$$

Se imaginarmos algumas capitais do Brasil como os vértices e as rotas aéreas que ligam os principais aeroportos dessas capitais, operados por certa empresa aérea como as arestas, conforme o grafo abaixo:



A partir desse grafo podemos montar a seguinte matriz de adjacência:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que resume todas as informações contidas na figura acima, pois quando um elemento a_{ij} dessa matriz é igual a 1 significa que há voo direto, operado por esta empresa, da cidade i para a cidade j e vice-versa. Em um estudo mais aprofundado, demonstra-se que as potências A^2, A^3, ... carregam outras interessantes informações sobre o grafo original.

Agora, faça o que se pede:

a) Procure algumas matrizes presentes em embalagens de alguns produtos que você costuma usar ou consumir no seu dia a dia. Transcreva essas matrizes e identifique as suas ordens (seus tamanhos, isto é, quantidade de linhas e de colunas).

b) O diagrama da página seguinte ilustra as rotas efetuadas por outra companhia aérea brasileira entre diversas cidades do nosso país e de alguns países vizinhos. Enumere as cidades que aparecem no mapa, e a partir daí monte um grafo que represente essas rotas aéreas e finalize montando a matriz de adjacência desse grafo.

c) O modelo que descrevemos para as rotas aéreas entre algumas cidades também pode ser usado para descrever, por exemplo, as relações entre alunos de uma turma. Imaginando os alunos da sua turma como os pontos e que dois alunos são ligados por um traço se eles já fizeram trabalhos juntos, desenhe um grafo que descreva essa relação e monte a sua matriz de adjacência. Neste modelo considere que cada pessoa faz trabalho consigo mesma e em termos do grafo desenhe para cada uma das pessoas uma curva iniciando nela e voltando para ela.

d) Pesquise outras características sobre o grafo que podem ser obtidas a partir das potências naturais da matriz de adjacência de um grafo.

e) Explique por que a matriz de adjacência de um grafo é uma matriz simétrica.

Resolução:

a) Podem ser encontradas tabelas que apresentam a composição química em pacotes de alimentos em geral, produtos de limpeza entre outros.

b) Enumere as cidades a partir de uma cidade qualquer, entre as existentes no mapa, e a partir daí monte uma matriz $n \times n$ (em que n é o número de cidades) na qual os seus elementos a_{ij} são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ quando a cidade } i \text{ está ligada à cidade} \\ j \text{ por uma linha aérea} \\ 0, \text{ quando a cidade } i \text{ não está ligada à cidade} \\ j \text{ por uma linha aérea} \end{cases}$$

A matriz que cada aluno irá obter depende dos números que ele atribuir inicialmente a cada cidade.

c) De posse da relação de todos os alunos da sua turma cada aluno deve ser representado por um ponto, numerando-os e em seguida ligando os pontos em que os dois alunos já fizeram trabalhos juntos. Os alunos não podem esquecer de considerar que cada pessoa sempre faz trabalho consigo mesma. Em seguida, deve-se montar a matriz de adjacência desse grafo, seguindo a lei:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ quando o aluno } i \text{ já fez trabalhos} \\ \text{como aluno } j \\ 0, \text{ quando o aluno } i \text{ não fez trabalhos} \\ \text{como aluno } j \end{cases}$$

d) Uma propriedade interessante das potências naturais da matriz de adjacência de um grafo é que, por exemplo, na matriz A^2 (quadrado da matriz de adjacência), cada um dos seus elementos indicam o número de caminhos de comprimento 2 (isto é, uma rota aérea com uma escala ligando duas determinadas cidades). Já na matriz A^3, cada um dos seus elementos indica o número de caminhos de comprimento 3 (isto é, uma rota aérea com duas escalas ligando duas determinadas cidades) ligando duas cidades e assim sucessivamente.

e) Na matriz de adjacência de um grafo sempre temos $a_{ij} = a_{ji}$, pois se i está ligado com j, então j está ligado com i ou i e j não são ligados entre si. Assim:

$$a_{ij} = a_{ji} = 1 \text{ ou } a_{ij} - a_{ji} = 1$$

Assim, em uma matriz de adjacência sempre teremos $a_{ij} = a_{ji}, \equiv i, j$, que é justamente a condição para que $A = A^t$, ou seja, para que a matriz A seja simétrica.

2. *Qual é o valor da minha conta? Use sistemas lineares!*

Geralmente quando deparamos com sistemas de equações lineares, mesmo em situações práticas, sempre preferimos que o número de equações e o número de incógnitas que queremos determinar sejam os mesmos. Esse é um hábito tão comum e tão cultivado na escola que sempre que estamos diante de um problema, mesmo prático, cuja solução passe por um sistema de equações lineares, sempre nos esforçamos ao máximo para ficarmos com uma mesma quantidade de equações e incógnitas. Mas em algumas situações isso não é necessário, por exemplo na situação a seguir.

Imagine que três amigos, João, José e Maria, realizaram uma compra em um determinado supermercado e que as suas compras foram as seguintes:

João: 1 lanche, 2 maçãs e 3 sucos

José: 2 lanches, 3 maçãs e 1 suco

Maria: 2 lanches, 5 maçãs e 11 sucos

Sabendo que todos compraram produtos iguais e que os valores pagos por João e por José foram respectivamente R$ 13,00 e R$ 16,80, qual foi o valor pago por Maria?

Sendo l, m e s os preços individuais dos lanches, maçãs e sucos, respectivamente, segue:

João $\rightarrow 1l + 2m + 3s = 13$

José $\rightarrow 2l + 3m + 1s = 16{,}80$

Maria $\rightarrow 2l + 5m + 11s = ?$

Nesse caso temos um sistema com duas equações e três incógnitas: $\begin{cases} l + 2m + 3s = 13 \\ 2l + 3m + s = 16{,}80 \end{cases}$.

Evidentemente não temos como achar algebricamente os valores de l, m e s individualmente. Então, como podemos obter o valor de $2l + 5m + 11s$? Nesse caso, podemos tentar "combinar" as equações do sistema para obter a combinação.

Para isso, multiplicamos a primeira equação por α e a segunda equação por β:

$$\begin{cases} \alpha l + 2\alpha m + 3\alpha s = 13\alpha \\ 2\beta l + 3\beta m + \beta s = 16{,}80\beta \end{cases}$$

Adicionando as duas equações acima, obtemos:
$(\alpha + 2\beta)l + (2\alpha + 3\beta)m + (3\alpha + \beta)s = 13\alpha + 16{,}80\beta$
Mas, para obtermos o valor da conta de Maria, devemos calcular $2l + 5m + 11s$. Assim, igualando os respectivos coeficientes de l, m e s obtemos:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 \\ 2\alpha + 3\beta = 5 \Rightarrow \alpha = 4 \text{ e } \beta = -1 \\ 3\alpha + \beta = 11 \end{cases}$$

Nesse último sistema escolhemos duas das três equações (as duas primeiras, por exemplo), resolvemos o sistema formado por estas duas equações e verificamos se os valores encontrados para α e β também satisfazem a terceira equação.
Assim, substituindo-se estes valores $\alpha = 4$ e $\beta = -1$ na equação: $(\alpha + 2\beta)l + (2\alpha + 3\beta)m + (3\alpha + \beta)s = 13\alpha + 16{,}80\beta$
Obtemos:
$(4 + 2(-1))l + (2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1))m + (3 \cdot 4 + (-1))s =$
$= 13 \cdot 4 + 16{,}80 \cdot (-1) \Rightarrow 2l + 5m + 11s = 35{,}20$
Assim, o valor pago por Maria foi de R$ 35,20.
Agora, faça o que se pede:

a) Na situação apresentada, quaisquer que fossem as quantidades de lanches, maçãs e sucos compradas por Maria, nós poderíamos determinar o valor gasto por ela?
b) Que condições devem satisfazer as quantidades de lanches, maçãs e sucos compradas por Maria para que possamos encontrar o total gasto por ela?
c) Escolha três entre os seus colegas de sala para simular uma situação como essa em uma lanchonete, ou seja, pesquisem os preços de três ou mais produtos e simulem a compra desses produtos. Escolha dois entre os três amigos para relatar as quantidades e quanto gastariam na compra dos respectivos produtos. A partir dessas informações, tente descobrir quanto gastaria a terceira pessoa, sabendo apenas das quantidades de produtos que ela comprou. Discuta com seus colegas como você conseguiu descobrir o valor gasto pela terceira pessoa ou explique a eles porque não é possível descobrir esse valor, se for o caso.
d) É possível fazer este procedimento com mais de três pessoas?

Resolução:

a) Não. Nem sempre conseguiremos encontrar o gasto referente às compras de Maria. Na verdade só conseguiremos encontrar o gasto referente às compras de Maria quando as quantidades de lanches, maçãs e sucos compradas são tais que o sistema: $\begin{cases} \alpha + 2\beta = l \\ 2\alpha + 3\beta = m \\ 3\alpha + \beta = s \end{cases}$ tenha solução. Assim, por exemplo, se $l = 2$, $m = 5$ e $s = 10$ o sistema acima não teria solução.
b) Como dito no item anterior, para que possamos encontrar o gasto de Maria na compra de lanches, maçãs e sucos é preciso que estes números permitam que o sistema $\begin{cases} \alpha + 2\beta = l \\ 2\alpha + 3\beta = m \\ 3\alpha + \beta = s \end{cases}$ admita solução.
c) Resposta pessoal.
d) Sim, basta que a expressão que se queira encontrar possa ser obtida a partir das equações dadas por um procedimento análogo ao descrito no texto.

Unidade 3 – Geometria plana e espacial

Na abertura desta unidade abordamos o origâmi, que é a arte oriental de dobradura de papel, para retomar e ampliar os conceitos da geometria plana e espacial.

As atividades com dobraduras, geralmente, despertam o interesse dos alunos, então o professor pode aproveitar essa oportunidade para propor a construção dos poliedros de Platão, ressaltando as propriedades geométricas envolvidas em cada um deles.

As questões apresentadas constituem um instrumento de avaliação do nível de compreensão dos alunos em relação às informações apresentadas nesta abertura e aos conteúdos matemáticos relacionados a ela.

Respostas esperadas:

1. Na confecção de origâmis podem ser identificados os conceitos de plano, ponto, retas paralelas, retas concorrentes, bissetriz, diagonal, etc.
2. São cinco os poliedros de Platão: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

Capítulo 7 – Polígonos inscritos e áreas

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Polígonos regulares inscritos na circunferência	Conhecimentos geométricos - características das figuras planas, circunferência	C2	H7/H8
Áreas: medidas de superfícies	Conhecimentos geométricos - grandezas, unidades de medida, áreas	C2/C3	H7/H8/H10/H12/H13/H14

Neste capítulo aprofundaremos alguns aspectos da Geometria plana com o intuito de preparar os alunos para o estudo da Geometria espacial.

A situação introdutória visa instigar os alunos. Incentive-os a desenvolver estratégias para comparar as áreas. Essa situação será retomada posteriormente e ajudará na compreensão dos conceitos a serem estudados.

Antes de abordar o tópico **Polígonos regulares inscritos na circunferência** você pode fazer com os alunos uma lista com todos os polígonos que eles lembrarem, destacando as características de cada um deles. Posteriormente, eles deverão classificar esses polígonos em regulares ou não. Aproveite para mostrar que todas as figuras planas regulares possuem uma circunferência que tangencia seus vértices, definindo também o apótema (segmento com extremidades no centro da circunferência circunscrita e no ponto médio do lado do polígono regular). Peça aos alunos que identifiquem os apótemas nas figuras regulares que eles citaram anteriormente.

Você pode apresentar o **Cálculo da medida do lado e do apótema de um polígono regular em função do raio da circunferência** para o quadrado, o hexágono regular e o triângulo equilátero, resolvendo os exercícios 1 a 4 como atividade de fixação.

Uma vez que os polígonos regulares estão associados à circunferência, é importante recordar o cálculo do comprimento da circunferência e do comprimento do arco, fazendo os exercícios 5 a 7 e 11 como atividade de fixação e os exercícios 8 a 10 e 12 como atividade de aprofundamento ou avaliação.

Retome a discussão inicial do capítulo, sobre as superfícies dos lagos, para introduzir o tópico **Áreas: medidas de superfícies**, apresentando a ideia intuitiva de área e a região quadrada unitária como referência de medida. Represente regiões limitadas pelas figuras geométricas citadas (quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio, losango e hexágono regular), discutindo com os alunos as fórmulas usadas para calcular a área de cada uma delas. No caso específico do triângulo, destaque as diferentes opções de cálculo, dependendo das informações contidas na figura (base e altura, ângulo e lados adjacentes, perímetro). Finalize apresentando o cálculo da área de uma região limitada por um polígono regular, utilizada em situações em que o apótema é explicitado. Os exercícios resolvidos 6 e 7 são exemplos de situações em que se faz necessária a determinação de áreas. Os exercícios 13 a 24 podem ser usados como atividade de fixação e os exercícios 25 a 34 como atividade de aprofundamento ou avaliação.

Apresente a **Área do círculo** e a **Área do setor circular** por meio dos exercícios 35 e 36 como atividade de fixação, e os exercícios 37 a 49 como atividade de aprofundamento (estes podem ser feitos em duplas). O exercício 49 é um exemplo em que se deve efetuar o cálculo aproximado de áreas.

Para discutir a **Razão de semelhança para áreas**, apresente o enunciado do exercício resolvido 10 e pergunte aos alunos qual seria a solução. Direcione a discussão apresentando desenhos das figuras semelhantes, fazendo com que eles determinem a resolução em conjunto, destacando que a razão de semelhança *k* aparece ao quadrado no caso do cálculo de áreas e, ao cubo, no caso de proporções entre volumes.

Complemente com os exercícios resolvidos 11 e 12, em que são apresentadas outras situações envolvendo proporção entre áreas, usando os exercícios 50 a 58 como atividade de fixação em dupla.

A seção **Outros contextos** apresenta um texto que fundamenta uma discussão a respeito da terra indígena Raposa Serra do Sol, podendo ser usada como avaliação em forma de trabalho em grupos, bem como referência para discussões em conjunto com os professores de História e Geografia.

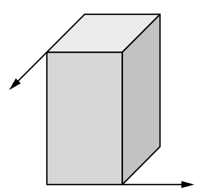
Capítulo 8 – Geometria espacial de posição: uma abordagem intuitiva

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	**Competência**	**Habilidade**
Geometria de posição no plano	-	-	-
Posições relativas: ponto e reta; ponto e plano	-	-	-
Posições relativas de pontos no espaço	-	-	-
Posições relativas de duas retas no espaço	Conhecimentos geométricos - posições de retas	C2	H7/H8
Determinação de um plano	-	-	-
Posições relativas de dois no espaço	-	-	-
Posições relativas de uma reta e um plano	-	-	-
Paralelismo no espaço	-	-	-
Perpendicularismo no espaço	-	-	-
Projeção ortogonal	-	-	-
Distâncias	-	-	-

O estudo da **Geometria espacial de posição: uma abordagem intuitiva** tem como objetivo ajudar a desenvolver as habilidades relacionadas à Geometria plana e espacial, reduzindo as dificuldades encontradas pelos alunos na observação e identificação de elementos e estruturas tridimensionais.

Inicie o assunto solicitando que os alunos pesquisem e apresentem imagens de diferentes construções. A partir dessas imagens discuta a importância da Geometria na Arquitetura e promova uma discussão sobre posições relativas de pontos e retas no mesmo plano, destacando a:

- relação entre ponto e reta: ponto pertence ou não pertence à uma reta;
- relação entre pontos: pontos colineares ou não colineares;
- relação entre retas de um plano: retas paralelas, concorrentes, coincidentes e perpendiculares, destacando que a classificação é válida apenas para posições relativas entre pontos e retas no mesmo plano, usando como exemplo a figura sugerida a seguir.



Para analisar situações envolvendo figuras tridimensionais será necessário estudar outras posições relativas, tais como **Posições relativas: ponto e reta; ponto e plano** usando as figuras sugeridas no livro como referência para a discussão das relações de pertinência acima. Em seguida, discuta as **Posições relativas de pontos no espaço** (colineares ou não, coplanares ou não), usando os exercícios 1 e 2 como atividade de fixação. Complemente solicitando aos alunos que identifiquem pontos nas condições estudadas nas imagens apresentadas por eles no início da aula.

Você pode apresentar então a imagem do paralelepípedo proposto no livro para apresentar as **Posições relativas de duas retas no espaço**, solicitando aos alunos que identifiquem as arestas e as faces da figura. Discuta as diferenças entre aresta e reta, face e plano, definindo para o modelo de estudo que arestas representarão retas, faces que representam planos, e vértices que representam pontos no espaço tridimensional. Dessa forma, pode-se estudar as posições relativas de retas distintas no espaço, definindo as retas coplanares, paralelas, concorrentes e reversas, solicitando aos alunos que identifiquem cada uma delas no paralelepípedo usado como referência. Construa um quadro-resumo ao final da discussão. Proponha o exercício 3 como atividade de fixação.

Discuta com seus alunos as condições necessárias para a **Determinação de um plano**, apresentadas no quadro-resumo do livro e propondo o exercício 4 como referência. Novamente, use a figura do paralelepípedo para apresentar as **Posições relativas de dois planos no espaço** (paralelos distintos, secantes ou concorrentes e coincidentes) e aplique os exercícios 5 a 8 como atividade de fixação em dupla.

Para apresentar as **Posições relativas de uma reta e um plano** também use o paralelepípedo como referência e represente nele as situações em que a reta é paralela, está contida e intersecta o plano de referência. Solicite aos alunos que refaçam as condições apresentadas usando o livro e uma caneta como referências de plano e reta, respectivamente. Proponha os exercícios 9 e 10 como atividade de fixação e os exercícios 11 a 13 como atividade de aprofundamento e avaliação (estes podem ser em dupla).

Retome as situações que representam **Paralelismo no espaço**, selecionando as condições de paralelismo entre retas, planos e reta e plano, usando o exercício 14 como atividade de fixação. Em seguida, apresente as condições de **Perpendicularismo no espaço**, mostrando o quadro-resumo apresentado no livro-texto como referência, e solicitando aos alunos que identifiquem as situações apresentadas usando uma caixa de sapatos. Discuta as características de uma reta e plano perpendiculares, comparando com construções, tais como prédios comuns e a Torre de Pisa na Itália. Analise com os alunos o exercício resolvido 1 que aborda o caminhar de uma formiga por um prisma. Os exercícios 16 e 17 são atividades de fixação. Repita o procedimento para discutir as condições para se obter planos perpendiculares, usando a abertura de livros e *notebooks* como exemplos. O exercício 18 é uma atividade de fixação.

Apresente o conceito de **Projeção ortogonal** usando as sombras como exemplo, discutindo as condições necessárias para comparar uma sombra a uma projeção ortogonal e resolvendo os exercícios 19 e 20 como atividade de fixação.

Sugerimos uma atividade na quadra para discutir o tema **Distâncias**. Solicite aos alunos que tragam diversos instrumentos de medida (trena, régua, esquadro, fita métrica, barbante, entre outros). Divida a sala em grupos e use a quadra (ou até mesmo a sala de aula) como ambiente onde os grupos deverão destacar pontos, retas e planos (oriente e auxilie os alunos sempre que necessário) e determinar as distâncias entre:

- dois pontos;
- um ponto e uma reta;
- um ponto e um plano;
- duas retas distintas e paralelas;
- reta e plano (quando a reta é paralela ao plano e não está contida nele);
- dois planos distintos e paralelos;
- duas retas reversas.

A atividade deverá ser registrada pelo grupo fazendo a representação gráfica do local usado para as medições. Ela pode ser usada como avaliação, em conjunto com os exercícios 21 a 24.

Na seção **Um pouco mais...** apresentamos como assunto opcional **O método dedutivo: algumas demonstrações**, em que são apresentados alguns postulados e teoremas discutidos intuitivamente ao longo do capítulo. O conteúdo dessa seção pode ser usado como atividade de revisão.

Capítulo 9 – Poliedros: prismas e pirâmides

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Poliedros	Conhecimentos geométricos - características das figuras espaciais	C2	H7/H8/H9
Relação de Euler			
Poliedros regulares			
Prismas			
Ideia intuitiva de volume	Conhecimentos geométricos - grandezas, unidades de medida, volume	C2/C3	H7/H8/H10/H12/ H13/H14
Princípio de Cavalieri			
Volume do prisma			
Pirâmides	Conhecimentos geométricos - características das figuras espaciais	C2	H7/H8/H9

Dando continuidade ao desenvolvimento das habilidades relacionadas à observação e à identificação de elementos e estruturas tridimensionais, iniciaremos o estudo dos **Poliedros: prismas e pirâmides**, observando figuras presentes em nosso cotidiano, desde a estrutura de prédios até os mais diversos tipos de embalagens e objetos.

Iniciamos apresentando algumas formas caracterizadas como **Poliedros**, destacando suas principais características e identificando seus vértices, faces e arestas, usando como exemplo uma folha de papel. Em seguida, resolva o exercício 1 como atividade de fixação. Para definir **Poliedro convexo e poliedro não convexo**, convém discutir inicialmente a definição de região convexa e região não convexa, extrapolando a mesma para os poliedros, fazendo uso de desenhos para auxiliar na compreensão, e resolvendo o exercício 2 como atividade de fixação. Destaque que os estudos dos poliedros se concentrarão nos poliedros convexos, sendo desnecessária a classificação a partir de então.

O trabalho com a **Relação de Euler** ajuda a desenvolver a abstração e a estabelecer correlações e padrões. Ele pode ser feito organizando em uma tabela o número de faces, vértices e arestas de vários poliedros e adicionado uma coluna extra para o cálculo da relação de Euler. Em seguida, trabalhe os exercícios resolvidos, em especial o exercício resolvido 2, que apresenta o poliedro descoberto por Arquimedes e que inspirou a fabricação da bola de futebol. Os exercícios 3 a 5 podem ser usados como atividade de fixação e os exercícios 6 a 8 como atividade de aprofundamento ou avaliação.

A discussão sobre **Poliedros regulares** pode ser iniciada recordando o conceito de polígonos regulares e extrapolando para as figuras espaciais. Apresente os poliedros regulares convexos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) avaliando as planificações e as estruturas tridimensionais resultantes. Sugerimos que seja feita uma atividade em grupo em que os alunos deverão, a partir das planificações dos poliedros regulares convexos, construir as figuras e resolver o exercício 9, completando a tabela a partir das construções realizadas. Aproveite para apresentar as diferenças existentes entre os poliedros regulares e os poliedros de Platão, abordando o texto da seção **Leitura**, *Platão e seus poliedros*, disponível ao final do capítulo.

Uma vez compreendidos os conceitos iniciais de Poliedros, podemos apresentar os **Prismas**, destacando entre suas características a presença da dupla de faces paralelas e opostas. Apresente e discuta as principais características, similaridades e diferenças entre os paralelepípedos e prismas retos, orientando os alunos na construção dos prismas retos mais comuns (base triangular, base pentagonal, base hexagonal, paralelepípedo retângulo e cubo) identificando os formatos das faces laterais e bases, e determinando as diagonais (no paralelepípedo retângulo e cubo). Levando-se em consideração que os alunos podem ter dificuldade no aprendizado do assunto por conta da falta de visão espacial, a construção das figuras a partir da planificação pode ser uma ferramenta extremamente eficaz que auxilia tanto na melhoria da percepção espacial quanto identificação das faces. Os exercícios 10 a 12 devem ser usados como atividade de fixação, e o exercício 13 pode ser resolvido pelo professor, como exemplo de aprofundamento.

Na sequência, determine a **Área da superfície de um prisma**, distinguindo a área da superfície lateral da área da superfície total, usando as planificações como ferramenta auxiliar na identificação das superfícies, e propondo os exercícios resolvidos 3 e 4 como exemplo. Os exercícios 14 a 16 podem ser usados como atividade de fixação, e os exercícios 17 a 26 podem ser resolvidos em dupla, como aprofundamento ou avaliação.

Você pode apresentar a **Ideia intuitiva de volume** usando o cubo como referência, e extrapolando para a determinação do volume de um paralelepípedo. Sugerimos como atividade o uso das peças do material dourado (ou de pequenos cubos, se houver disponível) para a construção de um paralelepípedo, fazendo a contagem dos cubos para a determinação do volume total, relacionando a contagem com as dimensões da figura construída. Analisem os exercícios resolvidos de 5 a 7 , destacando o exercício resolvido 7, que aborda uma situação envolvendo o tempo de diminuição do nível de uma eclusa. Complemente com os exercícios 27 a 31 como atividade de fixação, e os exercícios 32 a 34 como aprofundamento e avaliação.

Em seguida vem a determinação da fórmula do volume do prisma (obtida a partir do **Princípio de Cavalieri**), analisando os exercícios resolvidos 8 e 9 como exemplos, e os exercícios 35 a 37 como atividade de fixação. Os exercícios 38 a 44 são atividade de aprofundamento, destacando-se o exercício 44, em que se pede para determinar o volume de água necessário para encher uma piscina com formato de prisma cujas bases estão representadas no desenho como sendo as faces laterais. É um bom exemplo de situação onde se deve observar cuidadosamente a figura para identificar os elementos-chave do problema.

As **Pirâmides** são poliedros com características diferentes dos prismas, por não terem faces paralelas nem faces laterais retangulares, e sim uma base e um vértice, formando faces laterais triangulares. Novamente, a visualização é extremamente importante; portanto, construa com seus alunos pirâmides com as mais diversas bases, não esquecendo de destacar as pirâmides regulares e o tetraedro regular, identificando nas planificações e no objeto tridimensional os elementos relacionados à base e suas faces laterais. Uma vez que pode ocorrer confusão na identificação das alturas, use o objeto tridimensional para identificar e diferenciar a altura da pirâmide do apótema da mesma (altura das faces laterais). O exercício resolvido 10 também pode ajudar na identificação dos elementos da pirâmide e no cálculo das áreas lateral e total. Aplique os exercícios 45 a 47 como atividade de fixação, e os exercícios 48 a 51 como atividade para aprofundamento e avaliação em dupla.

Você pode apresentar então o cálculo do **Volume da pirâmide** fazendo a demonstração sugerida no livro se achar necessário, e usando os exercícios resolvidos 11 a 13 como exemplo, seguidos dos exercícios 52 a 57 como atividade de fixação.

Para introdução do tema **Tronco de pirâmide** aborde o exercício resolvido 14, que trabalha com secções transversais e proporção, servindo como referência para os exercícios 58 a 60.

Use como referência as figuras geradas a partir da secção da pirâmide para iniciar a discussão sobre tronco de pirâmide, apresentando os principais elementos dessa figura, bem como os procedimentos para determinar seu volume, usando os exercícios resolvidos 15 e 16 como exemplo e os exercícios 61 a 64 como atividade de fixação.

Capítulo 10 – Corpos redondos

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Corpos redondos	Conhecimentos geométricos - características das figuras espaciais, grandezas, unidades de medida, área, volume	C2/C3	H7/H8/H9/H10/H12/H13/H14
O cilindro			
O cone			
A esfera			

O capítulo que encerra esta unidade aborda os **Corpos redondos**, classe de sólidos caracterizados por possuírem superfícies curvas, tais como os cilindros, cones, troncos de cones e esferas, possuindo uma infinidade de aplicações em nosso cotidiano, desde o formato de objetos comuns (copos, latas, embalagens, brinquedos) até estruturas arquitetônicas e de engenharia (coberturas em formato cônico, dutos, encanamentos, fiações elétricas, túneis, nanotecnologia, etc.).

Estimule seus alunos a avaliar, dentre a série de figuras apresentadas no tópico **Corpos redondos**, qual tipo de corpo redondo pode ser mais adequado a cada uma delas, destacando as superfícies redondas presentes. Em seguida, apresente aos alunos o **Cilindro**, identificando elementos importantes como bases, superfície lateral, eixos, geratrizes, secções, e destaque a definição de cilindro equilátero, muito presente em diversas aplicações e exercícios. A construção do cilindro a partir de um molde planificado auxilia tanto na visualização da superfície lateral e da base, quanto na determinação das áreas lateral, total e das bases. Os exercícios resolvidos 1 e 2 servem como base para os exercícios 1 a 5 que podem ser usados como atividade de fixação.

Agora, você pode definir o volume do cilindro recordando a definição de volume do prisma e considerando a área da superfície circular como base. Analise, com os alunos, os exercícios resolvidos 3 a 5, destaque o exercício resolvido 5, no qual se discute o custo de velas artesanais produzidas a partir de moldes cartonados. Os exercícios 6, 8 a 11 podem ser usados como atividade de fixação e os exercícios 7, 12, 13 e 14 como atividade de aprofundamento e avaliação, que podem ser feitos em duplas.

O mesmo procedimento adotado para o cilindro pode ser usado no **Cone**, tomando o cuidado de destacar a geratriz, a seção meridiana do cone e a definição de cone equilátero. As fórmulas para determinar a área da superfície lateral costumam causar estranheza, e nesse caso a determinação da área usando a figura planificada pode ajudar. Os exercícios resolvidos 6 e 7 ajudam na resolução dos exercícios 15 a 20, que podem ser usados como atividade de fixação e avaliação.

O cálculo do volume do cone é similar ao cálculo do volume da pirâmide, e os exercícios resolvidos 8 e 9 auxiliam na resolução dos exercícios 21 a 26, com destaque para os exercícios 22, 23 e 26, que apresentam formas com aplicações cotidianas, como o chocolate em forma de guarda-chuva, a construção de silos e objetos de decoração. Os troncos de cone podem ser abordados apresentando algumas figuras e usando as fórmulas para o cálculo de suas áreas e volumes. Os exercícios 27 a 30 apresentam interessantes aplicações dos troncos de cones, tais como xícaras, copos, vasilhas e reservatórios de água, podendo ser usados como atividade de fixação em duplas.

O último dos corpos redondos a ser estudado – e não menos importante – é a **Esfera**, cuja estrutura nos remete às mais diversas formas presentes na natureza como frutas, corpos celestes, entre outros. Apresente os elementos principais da esfera (centro, raio, diâmetro) e defina a área da superfície esférica resolvendo os exercícios 31 a 33. Apresente a fórmula usada na determinação do volume da esfera por meio dos exercícios resolvidos 11 a 13. Os exercícios 34 a 41 são atividade de fixação em duplas. Note que os exercícios resolvidos 12 e 13 discutem a determinação da área de um fuso e o volume de uma cunha, e servem de referência para os exercícios 38 a 45.

Na seção **Um pouco mais...**, sugerimos, como assunto opcional, a apresentação da determinação da área da superfície esférica pela aproximação por polígonos, sendo interessante para discutir aproximações, e, de acordo com a turma, explorar um pouco a ideia intuitiva de limite.

Na seção **Leitura** apresentamos um texto histórico sobre o desenvolvimento da Geometria.

As questões apresentadas na seção **Pensando no Enem** representam algumas aplicações de Geometria plana e espacial em nosso cotidiano, tais como a determinação de um terreno poligonal apresentada na questão 1; figuras planas geradas por planos interceptando poliedros na questão 2; o formato da bola de futebol é discutido na questão 3; o tempo decorrido para o enchimento de uma piscina é apresentado na questão 4 e, na questão 5, o problema envolve a construção de um abrigo para um cão de guarda em um armazém. A questão 6 foi retirada da prova do Enem.

Na seção **Vestibulares de Norte a Sul** são apresentados diversos problemas envolvendo o tema estudado, que podem ser usados como atividade de revisão ou avaliação. Destaque para a questão 3, na qual se questiona a quantidade de água adicionada a um depósito de água com formato de prisma de base quadrada; e a questão 15, em que há uma conexão entre a fórmula para o cálculo do volume de uma esfera e o gráfico da função associada a ela. As demais questões envolvem aplicações conceituais.

Atividades complementares à Unidade 3

As atividades a seguir complementam os assuntos estudados na unidade e representam um momento de aprofundamento, de interdisciplinaridade e de contextualização.

Esta primeira atividade deve ser realizada em trios e visa levar os alunos a conjecturarem.

1. Considerem os prismas de base triangular, quadrangular e pentagonal. Cada aluno do trio deve escolher um dos poliedros e contar o número de vértices, de arestas e de faces. Despois disso, façam o que se pede em cada item a seguir.

a) Juntem os resultados e preencham uma única tabela, relacionando os valores obtidos com o número de lados da base de cada prisma. Sugestão de tabela:

prisma	lados da base	vértices	arestas	faces

b) Observe a tabela e tentem relacionar os dados obtidos (vértices, arestas e faces) com o número de lados da base, conjecturando regras que possam ser válidas para qualquer prisma. Queremos três conjecturas: uma relacionando o número de vértices com o número de lados da base, outra relacionando o número de arestas com o número de lados da base e a última relacionando o número de faces com o número de lados da base.

c) Será que estamos no caminho certo? Testem as conjecturas com o prisma hexagonal. Se forem válidas, é um ótimo sinal. Se falharem, voltem à etapa anterior e elaborem novas conjecturas.

d) Vamos demonstrar essa conjectura? Só a demonstração valida uma conjectura, por mais que estejamos convencidos de que ela é verdadeira. Dica: lembre-se de que um polígono de n lados tem n vértices.

Resolução:

a)

prisma	lados da base	vértices	arestas	faces
triangular	3	6	9	5
quadrangular	4	8	12	6
pentagonal	5	10	15	7

b) Os alunos devem perceber que o número de vértices é o dobro do número de lados da base, o número de arestas é o triplo do número de lados da base e o número de faces é 2 unidades maior do que o número de lados da base.

c) Se os alunos chegaram ao esperado: funciona, pois o prisma hexagonal tem 6 lados na base, 12 vértices, 18 arestas e 8 faces.

d) Se n é o número de lados da base, cada base tem n vértices. Como são duas as bases do prisma, o prisma tem $2n$ vértices. Assim, $V = 2n$. Cada base tem n lados. No prisma, esses lados são arestas da base, então temos $2n$ arestas da base. Além disso, cada um dos n

vértices de uma base se conecta a um vértice da outra base por meio de uma aresta lateral. Com isso, temos mais n arestas, totalizando $3n$ arestas. Assim, $A = 3n$. Conhecendo-se V e A, podemos demonstrar F a partir da relação de Euler: $V - A + F = 2 \Rightarrow 2n - 3n + F = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow F - n = 2 \Rightarrow F = n + 2$

2. *Monumentos da Antiguidade e seus reis*

No decorrer dos séculos muitas foram as construções erguidas pelo ser humano. Os egípcios e os maias deixaram construções que venceram o tempo e até hoje nos espantam pela sua beleza, regularidade e complexidade de construção. As pirâmides egípcias são um belo exemplo disso. Através das várias dinastias que existiram, as construções foram se modificando e ficando cada vez mais belas e elaboradas.

Vejamos como evoluíram as pirâmides, que eram os túmulos dos faraós. Vale ressaltar que alguns egiptólogos discordam das datas exatas de início e término das dinastias.

A partir do início da I dinastia (c. 2920 a 2770 a.C.), os faraós eram enterrados em estruturas formadas por câmaras funerárias abaixo da superfície da terra, sobrepostas por enormes estruturas de "adobe" que significa "tijolo cru". Atualmente são conhecidas por "mastabas". Veja a fotografia abaixo:

Jon Bodsworth/Wikimedia Commons

Mastaba de Shepseskaf.

No subterrâneo das tumbas, ou túmulos, existiam muitas câmaras destinadas aos deuses funerários não tão importantes quanto o faraó. Esses túmulos eram muito procurados por ladrões, fato que levou à evolução de sua estrutura.

Sobre as tumbas dos que reinaram durante a II Dinastia (c. 2770 a 2649 a.C.), foi erguido o templo funerário de Wenis (c. 2356 a 2323 a.C.), que reinou durante a V dinastia, a menos de duas tumbas dos dois últimos reis daquela dinastia, Peribsen e Khasekhemwy, que estão enterrados em Saqqara.

Durante a III dinastia (c. 2649 a 2575 a.C.) houve o faraó Djoser (c. 2630 a 2611 a.C.) e seu arquiteto Imhotep, que construíram um notável monumento, a pirâmide de degraus de Saqqara, que podemos observar na fotografia a seguir, cercada por muros que reservam muitas construções, como dois cemitérios com vários túmulos importantes do que chamamos Período Dinástico Primitivo (c. 2920 a 2575 a.C.).

LatitudeStock/Alamy/Glow Images

Pirâmide de degraus.

Ao longo da IV dinastia (c. 2575 a 2465 a. C.), o poder dos reis aumentou, o que ficou bem claro pelas obras erguidas durante aquele período no qual a construção de pirâmides atingiu seu apogeu. O ponto máximo do desenvolvimento das obras ou construções pode ser observado na Grande Pirâmide ou pirâmide de Quéops. Essa estrutura, que domina o planalto de Gizé, um pouco ao norte de Mênfis, a oeste do Nilo, permanece como uma das mais notáveis construções jamais erguidas pelo homem. Na fotografia abaixo vemos a pirâmide de Miquerinos, a de Quéfren e a de Quéops.

André Klaassen/Shutterstock/Glow Images

Pirâmides de Gizé.

A quantidade de pedra talhada que foi usada para erguer a pirâmide de Quéops não pode ser computada com exatidão, pois o centro de seu interior consiste de um núcleo de rochas cujo tamanho não pode ser determinado com precisão. Todavia, estima-se que quando pronta e intacta devia ser formada por dois milhões e 300 mil blocos de pedra, cada um pesando em média duas toneladas e meia, sendo que os maiores deles pesavam 15 toneladas. O peso total do monumento tem sido avaliado em 5 273 834 toneladas. Sua parte interna foi erguida com a rocha de qualidade inferior que se encontra normalmente naquelas vizinhanças e todo seu revestimento foi feito com a pedra calcária branca de excelente qualidade da região de Tura, localidade perto do Cairo. A altura original da pirâmide de Quéops era de 146 metros e atualmente mede 137 metros, pois nove metros de seu topo se perderam com o tempo.

Os lados da base da pirâmide medem aproximadamente 230 metros cada um e os ângulos entre eles são retos, quase perfeitos. As quatro faces da pirâmide se inclinam em um ângulo de cerca de 51°52' em relação ao solo.

Durante a V dinastia (c. 2465 a 2323 a.C.) as pirâmides continuaram a ser erguidas, algumas em Abusir (Abusir é o nome dado a um sítio arqueológico do Egito nas redondezas da capital, Cairo) e outras em Saqqara, mas todas muito menores do que as grandes estruturas de Gizé, porém, elas foram grandemente qualificadas, decoradas e muito bem pintadas, e ainda mais, com variações.

Adaptado de: <www.fascinioegito.sh06.com/faranome.htm>. Acesso em: 30 mar. 2013.

Agora que você leu um pouco mais sobre o antigo Egito, faça o que se pede com a ajuda de dois ou três colegas:

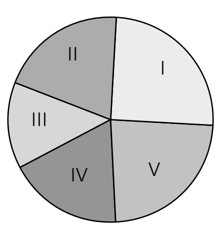
a) De acordo com o texto, façam uma relação das datas das cinco primeiras dinastias.
b) Quantos anos durou cada uma das cinco primeiras dinastias?
c) Façam um gráfico de setores representando o tempo de duração de cada uma das cinco primeiras dinastias. Os valores podem ser arredondados e, se for o caso, usem uma calculadora.
d) Percebam no texto que a altura original e a atual são diferentes. Então, com seus colegas, calculem a diferença de volume que isso significa.
e) Mostrem que, ao saber que a pirâmide de Quéfren tem 143 metros de altura, quantos metros de lado ela deveria ter para que os volumes dela e da pirâmide original de Quéops sejam iguais?
f) Se você tivesse de cobrir a pirâmide de Quéops com uma lona, qual deveria ser a área dessa lona?

Resoluções:

a) I. 2920 a 2770 a.C.
II. 2770 a 2649 a.C.
III. 2649 a 2575 a.C.
IV. 2575 a 2465 a.C.
V. 2465 a 2323 a.C.

b) I. 150 anos; II. l21 anos; III. 74 anos; IV. 110 anos e V. 142 anos

c) I. 25%; II. 20%; III. 13,5%; IV. 18% e V. 23,5%



d) $V_0 = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146 = 2\,574\,446 \text{ m}^3$

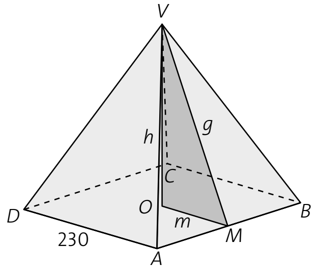
$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 137 = 2\,415\,766 \text{ m}^3$

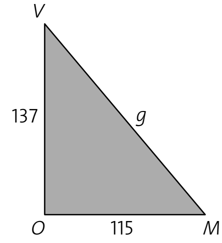
$2\,574\,446 - 2\,415\,766 = 158\,680 \text{ m}^3$

e) Sendo ℓ a medida do lado, temos:

$2\,574\,446 = \frac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot 143 \Rightarrow \ell = 232{,}4 \text{ m}$

f) Do texto obtemos que a altura atual é de 137 m e o lado mede 230 m. Podemos, então, calcular o apótema lateral (g) da pirâmide. Veja figura abaixo:





$g^2 = 137^2 + 115^2 \Rightarrow g = 178{,}9$

Arredondando esse valor para 179 m, a área lateral será:

$4 \cdot 230 \cdot \frac{179}{2} = 82\,340$

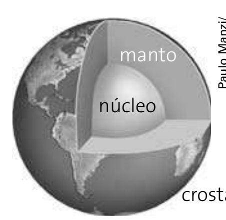
Assim, a área da lona deveria ser de 82 340 m².

3. *Um pouco da Geografia do nosso planeta*

O planeta Terra é o terceiro planeta do nosso Sistema Solar. A distância entre ele e o Sol é de aproximadamente 150 000 000 km.

A atmosfera do planeta Terra é formada por uma camada varia de 500 a 700 quilômetros de espessura, e a distribuição de gases é 78% de nitrogênio, 21% de oxigênio, cerca de 0,9% de argônio, 0,03% de dióxido de carbono e água.

A formação do planeta tem a data aproximada de 4,5 bilhões de anos, quando a sua massa incandescente começou a resfriar-se, criando as primeiras rochas. Primeiramente, o núcleo do planeta é formado por minerais pesados, como o níquel e o ferro, em estado de fusão, a temperaturas altíssimas: entre 2 500 e 5 000 °C. Envolvendo este núcleo, encontra-se o manto, que se constitui de uma massa pastosa, o magma, que está em constante movimentação, e, às vezes, é lançado à superfície através de vulcões ou de fenômenos tectônicos. Finalmente, vem a crosta terrestre, ou litosfera, a camada superficial da parte sólida do globo, formada por três tipos de rocha, como as metamórficas, as sedimentares e as ígneas ou magmáticas.



Paulo Manzi/Arquivo da editora

A Lua é um satélite natural da Terra, que está há uma distância de 382 166 km, em média. Em razão dos efeitos gravitacionais entre a Terra e a Lua, as marés possuem ciclos de movimentação, que podem ser previstos e utilizados para atividades como pesca e navegação. A Terra é o único planeta do Sistema Solar em que existem vida e água em estado líquido. É ainda o quinto maior em tamanho, com um diâmetro equatorial de 12 756 km. Ela realiza diversos movimentos, porém os principais são os de rotação e de translação. O primeiro corresponde a um movimento que a Terra realiza em torno de si mesma e que requer 23 h 56 min 4 s, de oeste para leste, em uma velocidade de 1670 km/h no equador ou 0,47 km/s; esse é movimento responsável pelo surgimento dos dias e das noites. O segundo corresponde ao movimento que a Terra realiza em torno do Sol e, para completá-lo, são necessários 365 d 5 h 48 min 45,97 s (365 d 6 h), em uma velocidade de 107 000 km/h ou 29,79 km/s. As seis horas são somadas ao longo de quatro anos, totalizando 24 horas, ou seja um dia, caracterizando o ano bissexto.

Outras características do nosso planeta:

Diâmetro polar: 12 713,5 km

Densidade: 5,52

Área total do planeta: 510,3 milhões km^2

Área das terras emersas: 149,67 milhões km^2 (29,31%)

Área dos mares e oceanos: 360,63 milhões km^2 (70,69%)

Área do oceano Pacífico: 179,25 milhões km^2, incluindo mar da China Meridional, mar de Okhotsk, mar de Bering, mar do Japão, mar da China Oriental e mar Amarelo (49,7% das águas)

Área do oceano Atlântico: 106,46 milhões km^2, incluindo oceano Ártico, mar do Caribe, mar do norte, mar Mediterrâneo, mar da Noruega, golfo do México, baía de Hudson, mar da Groenlândia, mar Negro e mar Báltico (29,5% das águas)

Área do oceano Índico: 74,92 milhões km^2, incluindo mar da Arábia, golfo de Bengala e mar Vermelho (20,8% das águas)

Profundidade média dos oceanos: 3 795 m

Volume total das águas do planeta: 1,59 bilhões km^3

Circunferência da Terra no equador: 40 075 km

Circunferência da Terra nos trópicos: 36 784 km

Circunferência da Terra nos círculos polares: 15 992 km

Circunferência da Terra nos meridianos: 40 003 km

Diferença entre as circunferências equatorial e meridional: 72 km

Velocidade orbital média: 29,79 km/s

Placas tectônicas: são os vários blocos em que a crosta está dividida. São separadas por grandes fendas vulcânicas em permanente atividade no fundo do mar.

Pontos mais altos do planeta:

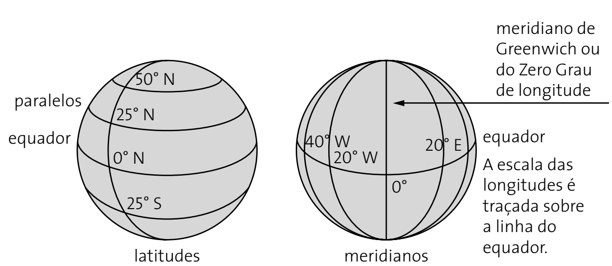
Na Ásia: Everest, no Nepal/China (8848 m); K2, no Paquistão/China (8611 m); Kanchenjunga, no Nepal/Índia (8597 m). Na América do Sul: Aconcágua, Argentina/Chile (6959 m); Ojos del Salado, Argentina/Chile (6880 m).

Na América do Norte: McKinley, Alasca, EUA (6194 m); Logan, Canadá (5959 m).

Na África: Kilimanjaro, Tanzânia (5895 m).

Na Europa: monte Elbrus, Rússia (5642 m); mont Blanc, França/Itália (4807 m);

A latitude é a distância ao equador medida ao longo do meridiano de Greenwich (essa distância é medida em graus) podendo variar entre 0° e 90° para norte ou para sul. E a longitude é medida em graus, de zero a 180 para leste ou para oeste, a partir do meridiano de Greenwich.



Agora em grupos de três ou quatro alunos, façam o que se pede:

a) Tomando como base o diâmetro equatorial, calculem o volume da Terra.

b) Um meridiano é um semicírculo imaginário que vai de um polo a outro. A Terra leva 24 horas para dar uma volta completa em torno de si; então, se separarmos os meridianos de 15 em 15 graus de um para o seguinte, quantos eles seriam? Qual é o tempo de duração para que a partir de um meridiano se chegue ao próximo?

c) Qual é o volume correspondente da porção da terra entre um meridiano e outro (o que chamamos de cunha esférica)?

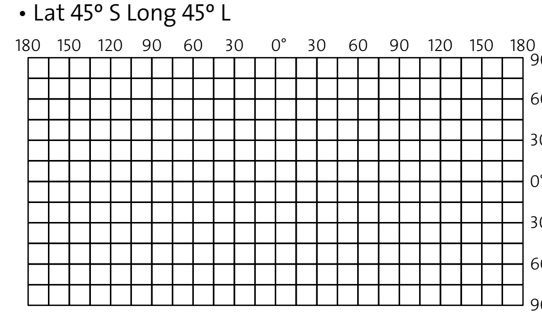
d) Qual é a área da superfície compreendida entre um meridiano e o seguinte?

e) Se o nosso planeta tivesse o formato cilíndrico com raio da base igual ao raio equatorial, qual deveria ser a altura desse cilindro para que o volume permanecesse o mesmo? E se o formato fosse de um cone equilátero com mesmo raio da base do equatorial?

f) Pesquise com os colegas de sua turma se caso eles fossem alpinistas, quais cinco pontos mais altos da terra eles gostariam de escalar. Faça uma relação dos cinco mais votados e no caso de empate, por exemplo, se dois deles tiveram um único voto cada, então considere o mais alto dos dois.

g) Agora, faça um gráfico de barras representado a altura dos cinco mais votados.

h) Como já vimos no texto, o planeta Terra foi dividido em meridianos e paralelos, os quais nos fornecem latitude e longitude de todas as localidades da superfície. Na planificação abaixo, localize, indicando por pontos *A*, *B*, *C*, etc., as seguintes posições:
- Lat 15º N Long 150º O
- Lat 75º S Long 120º L
- Lat 45º S Long 45º L



i) Diga três elementos encontrados na natureza e três construídos pelo ser humano que tenham a forma cilíndrica. Faça a mesma coisa para a forma cônica. As formas naturais não precisam ser perfeitas.

Resolução:

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, então, $V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 6378^3}{3} =$

$= 11\,76\,172\,980\,422 \text{ km}^3$

b) A volta completa é de 360°, assim, $\frac{360°}{15°} = 24$. Dessa forma, de um meridiano para outro, a Terra leva 1 hora para girar esse arco (tomando a linha do equador como referência).

c) $V = \dfrac{\pi r^3 \alpha}{270}$, assim, temos: $\dfrac{3{,}14 \cdot 6378^3 \cdot 15}{270} =$

$= 45\ 259\ 597\ 531\ \text{km}^3$

d) $A = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{90}$, então, $A = \dfrac{3{,}14 \cdot 6378^2 \cdot 15}{90} =$

$= 21\ 288\ 616\ \text{km}^2$

e) Altura do cilindro: $\pi r^2 h = 1\ 176\ 172\ 980\ 422$, ou seja,

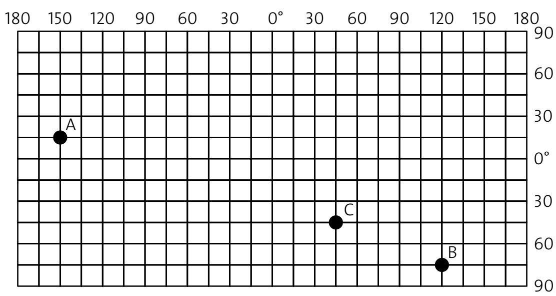
$h = \dfrac{1\ 176\ 172\ 980\ 422}{3{,}14 \cdot 6378^2} = 92081\ \text{km}$

Altura do cone: $\dfrac{92\ 081}{3} = 30\ 693{,}7$

f) Resposta pessoal.

g) Resposta pessoal.

h)



i) Respostas possíveis:

Cilíndricas naturais – Tronco de uma árvore, corpo de uma cobra, parte de uma macaxeira ou mandioca, espiga de milho, etc.

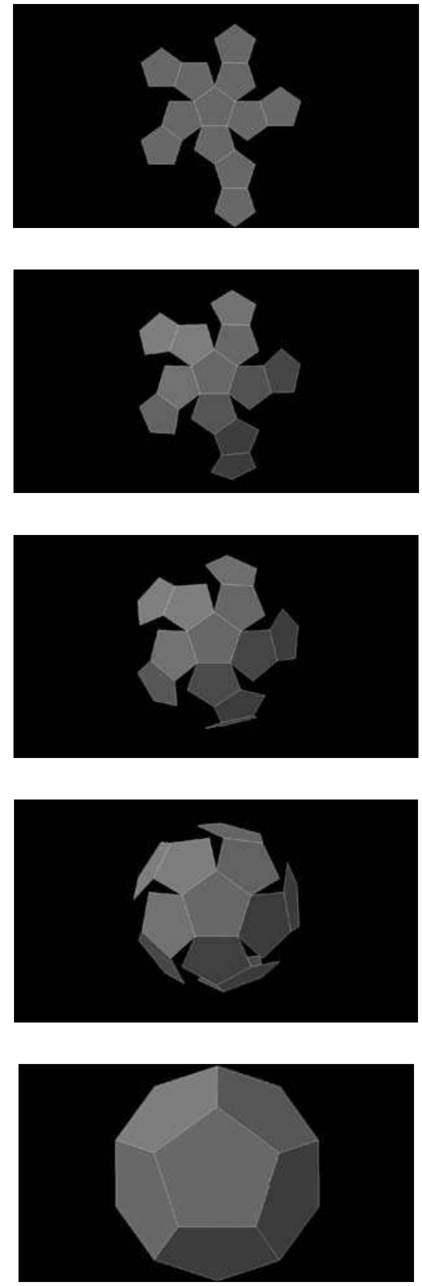
Cilíndricas criadas pelo ser humano – várias latas de alimentos, edifícios, parafusos, colunas de sustentação de muitas construções, etc.

Cônicas naturais – Uma pinha, um pinheiro (árvore de Natal), algumas montanhas, furacões a atingirem a terra, cenoura, etc. Cônicas criadas pelo ser humano – a cobertura de um abajur, pião de brinquedo, pontas de canetas esferográficas, funil, casquinha de sorvete, etc.

A complementação desta unidade também pode ser feita por meio de uma atividade prática: a construção de um sólido geométrico. Esse tipo de atividade ajuda a tornar a aula mais atraente, diversificada, ilustrada e, consequentemente, mais produtiva.

A construção de um material concreto, junto com a sua utilização, tem por objetivo cristalizar o conteúdo aprendido em sala de aula. Tem também como ponto importante tornar a Matemática mais significativa para o aluno, contextualizando e relacionando a teoria com a prática.

Um programa que pode ser utilizado como apoio é o Poly Pro que fornece a opção de usar a versão demonstração sem efetuar o registro. Esse programa apresenta mais de uma centena de sólidos geométricos e em todos eles é possível rotacionar, planificar, mudar cores, etc. A utilização do programa é bem simples e intuitiva.



Os alunos devem formar duplas e escolherem um dos poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) para construírem. Essa construção pode ser feita em casa utilizando-se os mais diversos materiais: cartolinas, canudos, palitos de churrasco, madeira, etc. Deixe que os alunos tenham liberdade para usar a imaginação na realização do trabalho. Os poliedros regulares são mais fáceis de serem construídos, pois são formados por polígonos regulares, mas se achar interessante pode ser solicitado aos alunos à construção de outros sólidos além dos regulares. O programa Poly Pro apresenta outras opções.

Na data estipulada para entrega, peça a cada dupla que faça uma breve explanação sobre o sólido escolhido: falar sobre o material utilizado, o número de faces, número de vértices, número de arestas, mostrar a veracidade da relação de Euler (no caso de poliedros), etc.

Unidade 4 – Análise combinatória e probabilidade

A abertura desta unidade é apresentada de maneira interdisciplinar com a Biologia, por meio da abordagem da herança genética da cor dos olhos.

Por se tratar de assunto próximo da realidade do aluno, tal enfoque constitui um aspecto motivador para o estudo dos conteúdos matemáticos da unidade.

As respostas apresentadas pelos alunos às duas questões propostas constituem um instrumento de avaliação do nível de compreensão de texto que os alunos possuem e as respostas esperadas são:

1. Marcos é filho de Vera e genro de João (ou Vera é mãe de Marcos e João é sogro de Marcos).
2. É mais provável que o bebê de Marcos e Beatriz tenha olhos castanhos, pois é o de maior probabilidade de acontecer (75%).

Capítulo 11 – Análise combinatória

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem	Conhecimentos numéricos - princípios de contagem	C1	H2/H3/H4/H5
Permutações simples e fatorial de um número			
Permutações com repetições			
Arranjos simples			
Combinações simples			
Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamentos			
Números binomiais	-	-	-
Triângulo de Pascal	-	-	-
Binômio de Newton	-	-	-

O estudo da **Análise combinatória** nos permite diversificar e ampliar as formas de se quantificar diferentes situações, tais como: possibilidades de cardápio em um restaurante, rotas aéreas, sorteios possíveis em uma determinada loteria, entre outros. Permite ao aluno aprimorar a percepção de semelhanças e diferenças entre diversas situações-problema, auxiliando na interpretação de textos e desenvolvendo o raciocínio lógico matemático.

Você pode iniciar o trabalho com esse assunto, conversando com os alunos sobre diferentes técnicas de contagem, apresente o exemplo sugerido na abertura do capítulo e, em seguida, a situação problema envolvendo as possíveis rotas para uma viagem de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo, introduzindo assim o **Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem** e apresentando a árvore de possibilidades. Complemente com os exemplos sobre o lançamento da moeda, cardápio do restaurante e formação de números com vários algarismos, resolvendo os exercícios 1 a 6 como atividade de fixação e exercícios 7 a 9 como atividade de aprofundamento e avaliação em dupla.

Aproveite os exercício resolvidos 1 e 2 para discutir as situações envolvendo **Permutações simples e fatorial de um número**, destaque o significado da palavra permutar (trocar), que está diretamente associado à situação avaliada. É importante que o aluno perceba que enunciados diferentes podem propor situações similares; sempre que a situação envolver trocas de posição, teremos um problema relacionado a permutações. O momento também é propício para introduzir o conceito de **Fatorial** de um número e fixar o conteúdo com os exercícios 10 e 11.

Uma aplicação comum relacionada às permutações e fatoriais é o cálculo da quantidade de anagramas de uma palavra, que pode ser exemplificado usando o exercício resolvido 3 e 5, seguidos da resolução dos exercícios 12 a 17, como atividade de fixação e dos exercícios 18 a 19 em dupla, como atividade de aprofundamento e avaliação.

Uma sequência natural do tema é trabalhar as **Permutações com repetição**, usando os anagramas com letras iguais como exemplo, tal como nos exercícios resolvidos 6 e 7, seguidos do exercício 20 como atividade de fixação e dos exercícios 21 a 24 como atividade de aprofundamento e avaliação.

Destaque que as situações trabalhadas até então envolvem problemas em que há “espaço” para todos os envolvidos, caracterizadas pelas permutações. Nas situações seguintes, uma das características é o fato de não haver mais “espaço” para todos os elementos do problema. Use o exercício resolvido 8 como exemplo para explicar os **Arranjos simples**, montando a árvore de possibilidades e usando o Princípio Fundamental da Contagem. Apresente também a situação proposta no exercício resolvido 9, apresentando então a fórmula para o cálculo dos arranjos simples e usando os exercícios 25 e 26 como atividade de fixação. Analise com os alunos os exercícios resolvidos de 10 a 17 que será importante na resolução dos exercícios de 27 a 37.

A situação envolvendo formação de grupos de pessoas visa exemplificar os problemas envolvendo **Combinações simples**, destacando as semelhanças e diferenças entre as situações envolvendo arranjos estudadas anteriormente, apresentando a fórmula e a propriedade da igualdade de combinações complementares. O exercício resolvido 18 é referência para o exercício 38; o exercício resolvido 20 apresenta uma discussão interessante a respeito do número de apertos de mão dados em um grupo e, juntamente com os exercícios resolvidos 19 a 24 apresentam situações diversas que devem ser apresentadas e discutidas para que os alunos percebam, avaliem e analisem as principais características das combinações. Em seguida devem resolver os exercícios 39 a 46 para fixação do conteúdo. Os exercícios 47 a 53 podem ser usados como atividade em dupla, para avaliação e aprofundamento.

Com o objetivo de auxiliar os alunos na interpretação dos problemas e identificação das situações propostas, apresentamos **Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamentos**. Os exercícios resolvidos 25 a 28 podem ser abordados como revisão e destaque das principais características de cada situação estudada, e os exercícios 54 a 65 devem ser usados como atividade de revisão e aprofundamento em dupla.

O conceito de **Números binomiais** pode ser iniciado por meio de exemplos para que os alunos percebam a propriedade da igualdade quando suas classes forem iguais e binômios complementares, bem como as condições para que eles sejam unitários ou iguais ao numerador, usando o exercício 66 como atividade de fixação. Analise o exercício resolvido 29 que envolve equação binomial para auxiliá-los na resolução dos exercícios 67 e 68.

Apresente o **Triângulo de Pascal** por meio do texto da seção **Leitura**, *O triângulo aritmético*, aproveitando para discutir as propriedades dos números binomiais e observar as propriedades do triângulo, destacando-se a relação de Stifel e a soma dos elementos da linha, resolvendo os exercícios 69 a 72. O exercício resolvido 30 pode ser usado como referência para os exercícios 73 a 76.

Destaque que a principal aplicação dos números binomiais e do Triângulo de Pascal se apresenta na determinação dos coeficientes do **Binômio de Newton**, estudados no Ensino Fundamental em sua forma mais simples, com expoentes de baixo índice. No entanto, em casos em que o expoente é alto, o uso dos números binomiais é bastante eficaz. Apresente exemplos de situações simples, que podem ser desenvolvidas por meio de produtos notáveis ou propriedade distributiva, e exemplos mais complexos, avaliando a necessidade de uma ferramenta mais ágil e mostrando o uso dos números binomiais nesses casos, usando os exercícios 77 e 78 como atividade de fixação.

Capítulo 12 – Probabilidade

Tópicos	**Objetos de conhecimento** (associados às Matrizes de Referência para o Enem 2009)	Competência	Habilidade
Fenômenos aleatórios	Conhecimentos de probabilidade - noções	C7	H28/H29/H30
Espaço amostral e evento			
Eventos certo, impossível e mutuamente exclusivos			
Cálculo de probabilidades			
Definição teórica de probabilidade e consequências			
O método binomial	-	-	-
Aplicações de probabilidade à Genética	Conhecimentos de probabilidade - noções	C7	H28/H29/H30

As probabilidades estão inseridas em nosso cotidiano de uma maneira tão sutil que nem percebemos. Aparecem em áreas como meteorologia, comunicação (pesquisa de mercado e desenvolvimento de produtos), loterias, risco bancário (usado na determinação de taxas de juros em empréstimos), seguradoras (o risco do segurado influencia no valor do seguro), entre outras. É uma área muito complexa e interessante, pois integra conceitos desde teoria de conjuntos, operações com frações e porcentagens, até análise combinatória.

Em **Fenômenos aleatórios** apresentamos exemplos de situações em que o cálculo da porcentagem se faz presente.

Destaque e discuta as diferenças entre **Espaço amostral e evento**, usando o lançamento de um dado e o sorteio de um número ímpar como exemplo, diferenciando do espaço amostral obtido no sorteio de dois dados distinguíveis.

Prossiga apresentando os conceitos de **Eventos certo, impossível e mutuamente exclusivos** solicitando aos alunos que apresentem exemplos de situações relacionadas à discussão proposta, aproveitando para recordar operações com conjuntos (união, intersecção e complemento).

O **Cálculo de probabilidades** pode ser introduzido discutindo-se o lançamento de uma moeda e, posteriormente, o lançamento de um dado. Procure apresentar diversas perguntas relacionando as situações, apresentando também problemas em que o uso de diagramas e teoria de conjuntos faz parte da resolução. Caso os alunos apresentem alguma dificuldade no cálculo, recorde os procedimentos necessários para a transformação de frações em porcentagens e proponha os exercícios 1 a 9 como atividade de fixação, e os exercícios 10 a 12 como atividade de aprofundamento e avaliação, em duplas.

A discussão da **Definição teórica de probabilidades e consequências** é um ponto importante para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à abstração, interpretação da linguagem matemática para uma posterior adequação a situações do cotidiano. Os exercícios resolvidos 8 a 13 apresentam situações que auxiliam na resolução dos exercícios 13 a 22, que podem ser resolvidos em dupla, devido ao grau de complexidade e teor das discussões. Os exercícios resolvidos 14 a 17 podem ser usados na exemplificação de casos em que a probabilidade condicional está envolvida, auxiliando na resolução dos exercícios 23 a 26, que pode ser feita em dupla; e os exercícios resolvidos 18 a 22 apresentam situação relacionada a eventos independentes, importantes para os exercícios 27 a 37, cuja resolução poderá ser feita em duplas, como atividade de avaliação e aprofundamento.

Situações mais complexas, que envolvem, por exemplo, a probabilidade de se ter vários filhos de um determinado sexo, podem ser resolvidas usando o **Método binomial**; os exercícios resolvidos 23 a 25 apresentam interessantes exemplos de aplicações desse método, auxiliando na resolução dos problemas 38 a 42, que devem ser resolvidos em dupla, como atividade de aprofundamento.

As **Aplicações de probabilidade à Genética** representam uma das sinergias mais interessantes entre Matemática e Biologia, sendo essencial a discussão e interação entre as disciplinas. Os exercícios resolvidos 26 a 31 apresentam diversos exemplos de problemas de Genética, cuja resolução necessita de conhecimentos de probabilidade, servindo de referência para os exercícios 43 a 46, que podem ser resolvidos em dupla, como atividade de avaliação.

Na seção **Outros contextos** abordamos um assunto também relacionado com Biologia, a doação de órgãos, que além de tratar de conteúdos matemáticos remete à uma reflexão sobre a importância desse ato.

Uma interessante atividade de aprofundamento e avaliação pode ser feita usando as **Leituras**: *A Matemática da sorte* e *Um pouco mais sobre probabilidades*, estimulando os alunos a uma discussão e análise histórica sobre o assunto.

As questões apresentadas na seção **Pensando no Enem** representam algumas aplicações de análise combinatória e probabilidade em nosso cotidiano, tais como a determinação do número de séries de exercícios em um programa de musculação na questão 1; a quantidade de opções de depósito de moedas em uma máquina automática é apresentada na questão 2; as opções de distribuição de barracas em um acampamento são vistas na questão 3; na questão 4 é necessário avaliar qual é a melhor opção de bairro para a abertura de uma loja e na questão 5 discutem-se as chances de um jogador ser escolhido para ir à prisão em um jogo de tabuleiro.

Na seção **Vestibulares de Norte a Sul** são apresentadas diversas questões de vestibulares relacionadas aos temas estudados, com destaque para a questão 2, em que se apresenta uma situação envolvendo a criação de senhas; a questão 5 e 11 em que temos uma situação relacionada à Biologia; a questão 7, na qual se discute a quantidade de caminhos possíveis para um determinado percurso, e a questão 8, em que se analisa a probabilidade de se acertar o jogo da memória na primeira tentativa. As demais questões pedem aplicações conceituais.

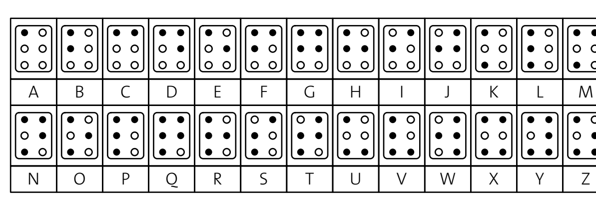
Atividades complementares à Unidade 4

Essa unidade pode ser complementada com atividades em grupo que podem se abordadas como miniprojetos. Veja algumas sugestões a seguir, sendo que as atividades 1 e 2 abordam Matemática e Ciências Sociais (Acessibilidade/Inclusão).

1. *Braille*

O Braille é um processo de escrita em relevo para leitura tátil, inventado por Louis Braille (1809-1852) e compõe-se de diversos sinais formados por pontos a partir de um conjunto matricial. Com o Braille representam-se os alfabetos latino, grego, hebraico e outros, bem como os alfabetos e outros processos de escrita das línguas orientais; escreve-se o texto vocabular, Matemática, Química, Informática, Música, etc.

A escrita é feita com pautas e punções e também em máquinas datilográficas especiais. Veja o alfabeto Braille:



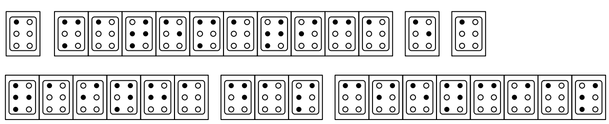
Louis Braille, nascido na França em 1809, aos 3 anos de idade tornou-se deficiente visual ao ferir-se com um instrumento de trabalho do seu pai que produzia selas. Aos 10 anos iniciou os seus estudos na Escola para cegos de Paris. Aos 15 anos, Louis Braille dedicou-se a encontrar um sistema que possibilitasse ao cego escrever em relevo, surgindo o sistema que hoje conhecemos como Braille. É curioso constatar que para criar o sistema Braille ele inspirou-se nos desenhos em relevo que enfeitavam as selas *confeccionadas pelo seu pai, feitos pelo próprio instrumento que o cegou. Apesar do sistema não ter sido muito aceito no seu tempo, ele evoluiu ao longo dos anos e foi aperfeiçoado, sendo nos dias de hoje amplamente utilizado pelos portadores de deficiência visual de todo o mundo para terem acesso à escrita e leitura através do tato. Após mais de 150 anos da sua criação, o sistema Braille tem um inestimável valor e constitui uma contribuição essencial aos deficientes visuais.*

Adaptado de: <www.acessibilidade.net/mecbraille/braille.php>. Acesso em: 1º abr. 2013.

Depois de ler o texto, faça o que se pede:

a) Na escrita Braille cada letra é representada por uma matriz. Qual o tipo (ou a ordem) dessa matriz?

b) Transcreva para a linguagem comum a frase escrita em Braille:



c) Como os caracteres são definidos por matrizes que podem ter um ou mais pontos destacados (pontos pretos), qual é o total de caracteres definidos no sistema Braille?

d) Quantos são os caracteres que apresentam 3 pontos destacados? Se os caracteres do sistema Braille passassem a ser representados utilizando-se uma matriz 3×3, quantos seriam os caracteres que apresentam 3 pontos destacados?

e) Escreva seu nome em Braille.

f) Nas Paralimpíadas de 2012, em Londres, o Brasil tornou-se tricampeão de Futebol de cinco. O futebol de cinco consiste em uma adaptação do futebol de salão para deficientes visuais. Os jogadores podem ter deficiência visual total ou parcial, em que os últimos utilizam vendas. A bola apresenta um dispositivo que emite um som e ajuda na sua localização. Um técnico tem a disposição 10 jogadores, sendo 2 goleiros (que enxergam normalmente), 3 totalmente cegos e 5 com visão parcial. De quantas formas o técnico pode montar um time com um goleiro e quatro jogadores de linha, sendo exatamente dois com visão parcial?

g) Pesquise e discuta com seus colegas a respeito de acessibilidade. Procure informações a respeito de piso tátil e semáforo de trânsito sonoro.

Resoluções:

a) 2×3

b) A MATEMÁTICA É A RAINHA DAS CIÊNCIAS

c) $C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} =$
$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$
O total é de 63 caracteres.
Uma opção alternativa para a resolução desta questão é:
$2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ (Total de subconjuntos subtraído de 1 que é o conjunto vazio).

d) $C_{6,3} = 20$
20 caracteres
$C_{9,3} = 10\,080$
10 080 caracteres

e) Resposta pessoal.

f) $C_{2,1} \cdot C_{3,2} \cdot C_{5,2} = 60$
Assim, o técnico pode montar o time de 60 formas.

g) Resposta pessoal.

2. *Sistema de identificação de cores ColorADD*
O *designer* português Miguel Neiva criou um código que está ajudando aos daltônicos (pessoas que sofrem de daltonismo, que é uma perturbação da percepção visual que dificulta a identificação de uma ou mais cores) a identificar as cores. O código ColorADD foi criado em 2009 e consiste na representação de cada uma das cores primárias (amarelo, azul e vermelho). A justaposição de dois ou três símbolos formam as cores secundárias e terciárias. As cores ainda podem ser identificadas como claras e escuras a partir da combinação com o preto ou com o branco. O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o branco é vazio. Veja a representação abaixo.

a) Sabendo que uma cor secundária é obtida a partir da combinação de duas cores primárias distintas e que uma cor terciária é obtida a partir da combinação de uma cor primária e uma cor secundária, quantas são as cores secundárias e quantas são as cores terciárias possíveis?

b) Imagine que você precisa representar a bandeira do Brasil para um estrangeiro daltônico. Faça o desenho da bandeira do Brasil colocando os símbolos que representam suas cores.

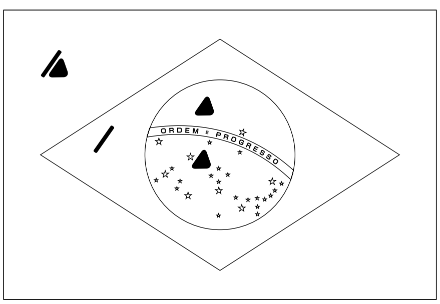
c) Usando apenas cores primárias e secundárias, sem misturá-las, quantas são as possibilidades de pintar-se uma bandeira com quatro listras de tal forma que:
• todas as listras sejam de cores diferentes?
• duas listras vizinhas não sejam da mesma cor?

d) Quantos são os anagramas da cor (palavra) representada por ? E da cor (palavra) representada por ?

e) O daltonismo é bem mais frequente que pensamos. Estima-se que 8% dos homens e 0,4% das mulheres apresentam algum tipo de daltonismo. Qual seria a estimativa para a quantidade de daltônicos no Brasil, sabendo que de acordo com o último censo do IBGE o país possui aproximadamente 194 milhões de habitantes e as mulheres representam 51,5% da população?

Resolução:

a) Cores secundárias: $C_{3,2} = 3$
Cores terciárias $= 3 \cdot C_{3,2} = 9$
Existem divergências entre a quantidade de cores terciárias; aqui consideraremos 9.

b) 

c) • Listras de cores diferentes: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
• Listras vizinhas que não seja da mesma cor:
$6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$

d)  → rosa

Total de anagramas:
$P_4 = 24$

 → laranja
Total de anagramas

$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = 840$

e) Total de mulheres: $\frac{51,5}{100} \cdot 194\,000\,000 = 99\,910\,000$

Total de homens: $\frac{48,5}{100} \cdot 194\,000\,000 = 94\,090\,000$

Mulheres daltônicas: $\frac{0,4}{100} \cdot 99\,910\,000 = 399\,640$

Homens daltônicos: $\frac{8}{100} \cdot 94\,090\,000 = 7\,527\,200$

Total de pessoas daltônicas:
$399\,640 + 7\,527\,200 = 7\,926\,840$

As atividades a seguir são interdisciplinares com Biologia e devem ser feitas em grupos. Elas remetem ao assunto abordado na abertura desta unidade e no capítulo 12, e também podem ser desenvolvidas com a colaboração do professor de Biologia.

3. *Genética*

Quando a mulher está grávida é comum especular-se sobre a cor da pele, dos olhos e do cabelo do bebê. É algo natural e normalmente feito baseado no genótipo dos pais, tios e avós.

A teoria das probabilidades é o ramo da Matemática que pesquisa e desenvolve modelos para o estudo dos mais diversos fenômenos aleatórios e está bem presente em diversas Ciências. Na Biologia, mais especificamente no estudo de Genética, a probabilidade é uma forte aliada no entendimento e a na resolução desse e dos mais diversos problemas. A cor dos olhos é uma herança quantitativa determinada por um par de alelos em que a cor escura é uma característica do gene dominante e a cor clara é uma característica do gene recessivo. O alelo recessivo é representado por uma letra minúscula (a) e o alelo dominante é representado por uma letra maiúscula (A). Denominamos os seguintes pares de alelos e seus fenótipos:

AA → Homozigoto dominante (olhos escuros)
Aa → Heterozigoto (olhos escuros)
aa → Homozigoto recessivo (olhos claros)

Dessa forma, um indivíduo possuirá olhos claros apenas se seu par de alelos for aa. Caso contrário possuirá olhos escuros. O cruzamento de dois indivíduos pode facilmente ser determinado utilizando-se a tabela de cruzamentos ou tabela de Punnett. Veja, como exemplo, o cruzamento de dois indivíduos heterozigotos (Aa × Aa):

Aa × Aa	**A**	**a**
A	**AA**	**Aa**
a	**Aa**	**aa**

O cruzamento de um indivíduo homozigoto dominante e de um indivíduo heterozigoto (AA × Aa):

Aa × Aa	**A**	**a**
A	**AA**	**Aa**
A	**AA**	**Aa**

Agora, faça o que se pede.

a) Faça uma tabela que apresente os resultados possíveis de um cruzamento de um indivíduo homozigoto recessivo com um indivíduo heterozigoto.

b) Qual é a probabilidade de um casal heterozigoto ter uma criança com olhos claros? E com olhos escuros?

c) Qual é a probabilidade de um casal de olhos escuros, cujas mães materna e paterna tenham olhos claros, ter uma menina de olhos escuros?

d) É possível um casal de olhos escuros, cujas mães materna e paterna possuem olhos claros ter 4 crianças sendo duas com olhos claros e duas com olhos escuros? Se isso acontecer, significa que a teoria das probabilidades está errada?

e) Dois irmãos, um de olhos claros e outro de olhos escuros, são filhos do mesmo pai e da mesma mãe. Podemos afirmar a respeito desses pais:

I. Ambos podem ter olhos claros.

II. Ambos podem ser homozigotos dominantes.

III. Ambos podem ser heterozigotos.

IV. Ambos podem ser homozigotos recessivo.

Resolução:

a)

Aa × Aa	a	a
A	Aa	Aa
a	aa	aa

b) Fazendo a tabela de Punnett temos:

Aa × Aa	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Probabilidade de ter uma criança com olhos claros: $\frac{1}{4}$

Probabilidade de ter uma criança com olhos escuros: $\frac{3}{4}$

c) Como as avós da criança têm olhos claros, os pais herdarão o alelo a. Como os pais tem olhos escuros, eles serão heterozigotos (Aa).

Fazendo a tabela de Punnett temos:

Aa × Aa	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Probabilidade de ter uma criança com olhos escuros: $\frac{3}{4}$

Probabilidade de ter uma menina: $\frac{1}{2}$

Probabilidade de ter uma menina com olhos escuros:

$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

d) Como pode-se observar na questão anterior, a probabilidade de nascer uma criança com olhos escuros é $\frac{3}{4}$ e com olhos claros é $\frac{1}{4}$. Porém, é possível que nasçam quatro crianças sendo duas com olhos claros e duas com olhos escuros. Se a quantidade de filhos aumentasse muito (de forma irreal, tendendo ao infinito), teríamos que a proporção dos filhos com olhos claros seria $\frac{1}{4}$ e com olhos escuros seria $\frac{3}{4}$. Com uma quantidade pequena de filhos essa proporção pode ou não acontecer.

e) Os filhos serão da forma aa (olhos claros) e AA ou Aa (olhos escuros). Como um dos alelos é herdado da mãe e o outro alelo é herdado do pai, temos as seguintes possibilidades para os pais: Aa e aa ou Aa e Aa. Portanto, é possível que os pais sejam heterozigotos: alternativa III.

4. Um casal tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual é a probabilidade da outra ser uma menina?

Resolução:

A resposta parece óbvia $\frac{1}{2}$, mas não é. Quando um casal tem duas crianças temos 4 possibilidades: HH, HM, MH e MM. Como uma delas é menina, então a possibilidade HH está descartada. Para serem duas meninas a probabilidade será então 1 em 3, ou seja $\frac{1}{3}$. Observe que é diferente de ter sido dito que a primeira é uma menina, nesse caso a probabilidade seria $\frac{1}{2}$.

5. O transplante de fígado, que é realizado com o doador vivo, é denominado "transplante intervivos". Trinta dias após a cirurgia o doador tem a sua massa hepática restituída ao normal, tendo em vista que o fígado possui alto poder de regeneração. A probabilidade da mãe ser uma doadora compatível é de 50% e do pai ser doador compatível também é de 50%.

Um paciente com uma grave doença hepática precisa de um doador de fígado. Qual é a probabilidade de pelo menos um dos pais ser doador?

Resolução:

O único caso que não serve é nenhum dos pais ser doador, logo:

$P(A) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Durante o Ensino Básico o estudante depara com diversos problemas em que há a necessidade de cálculo de áreas de figuras planas. Mas, em geral, os cálculos são feitos usando figuras elementares, tais como: triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, losangos, hexágonos regulares, etc.

Ao iniciar o Ensino Superior, já nos primeiros semestres, muitos estudantes aprendem a calcular áreas de figuras irregulares. Para isso eles fazem uso de uma poderosa ferramenta que é a **integral**. Com a utilização da integral diversas áreas irregulares podem ser calculadas, mas ainda há necessidade de conhecer a função geradora da curva. O problema consiste em que o assunto integral, em geral, não é ensinado para os alunos do Ensino Médio.

Agora, apresentaremos, por meio de uma experiência, uma interessante forma de estimar o valor da área de uma figura plana irregular. Esse método é conhecido como método de Monte Carlo e é bastante utilizado na estatística em simulações que têm origem em processos não determinísticos. O método de Monte Carlo teve origem durante a construção da bomba atômica na Segunda Guerra Mundial, em que eram feitas simulações probabilísticas que estavam relacionados com o coeficiente de difusão do nêutron em certos materiais. O nome **Monte Carlo** é uma alusão à cidade de Monte Carlo, no principado de Mônaco, famosa por seus cassinos e roletas que geram números aleatórios. Os alunos devem realizar os passos a seguir.

1. Construção do material da experiência
   a) *Material necessário*
      Caixa de sapatos
      Grãos de milho ou grãos de feijão
      Cola
      Tesoura
      Calculadora
      Mapa do Brasil ou da sua cidade/região em escala
      Régua
   b) *Procedimento para a montagem*
      • Recorte um quadrado e cole no fundo da caixa.
      • Meça as dimensões do quadrado e do fundo da caixa.

2. *Realizando a experiência*
   Coloque de forma aleatória uma quantidade conhecida de grãos no fundo da caixa. Quanto maior a quantidade de grãos, maior será a precisão para a estimativa da área. É razoável uma quantidade entre 100 e 300 grãos.
   Espalhe os grãos de forma que não fiquem todos em uma mesma região. Uma forma de deixar os grãos espalhados de forma aleatória é colocar a tampa e realizar algumas batidas no fundo da caixa.
   Conte quantos grãos estão sobre a região do quadrado. Repita a operação por mais quatro vezes, determine a média aritmética simples e em seguida utilize a proporção:

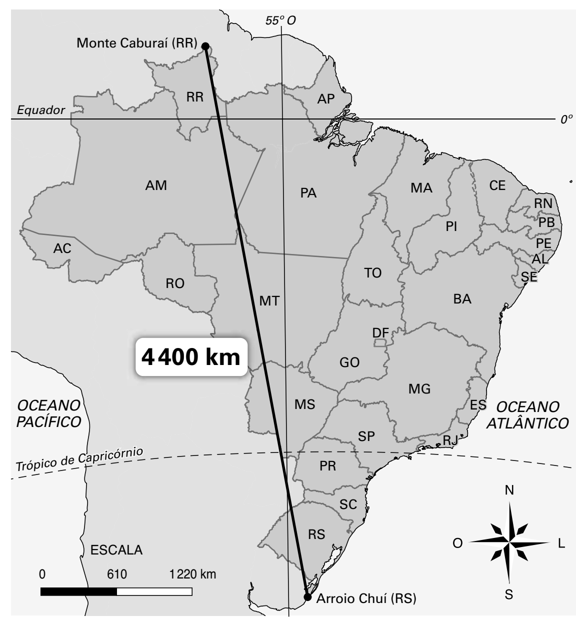
$$\frac{\text{quantidade média de grãos na região do quadrado}}{\text{quantidade de grãos no fundo da caixa}} \simeq$$
$$\simeq \frac{\text{área do quadrado}}{\text{área do fundo da caixa}}.$$

   Você verá que, de fato, chegamos a um resultado aproximado.
   Por exemplo, suponha que o quadrado colado no fundo da caixa tenha lado igual a 8 cm, que as dimensões do fundo da caixa sejam 16 cm por 25 cm e que tenham sido utilizados 200 grãos nessa experiência. Suponha ainda que as quantidades de grãos em cima da região do quadrado nas cinco repetições do experimento foram:

Contagem	Quantidade de grãos
1	31
2	33
3	30
4	32
5	33
Média	31,8

   Assim, de acordo com o exposto anteriormente, teremos:
$$\frac{31{,}8}{200} \simeq \frac{8 \cdot 8}{16 \cdot 25} = 0{,}159 \simeq 0{,}160$$
   Ocorreu um erro de 0,001, que para o nosso experimento é desprezível.

3. *Calculando áreas não elementares de figuras planas*
   Agora que já vimos, empiricamente, que o método funciona, podemos realizar uma estimativa, bem aproximada, para a área de uma figura plana qualquer. Vamos verificar qual o procedimento para calcular a área de uma região utilizando um mapa em escala e o método de Monte Carlo. Como exemplo tome um mapa, em escala, do Brasil. Caso não seja informado qual a escala utilizada é possível descobrir utilizando uma informação complementar.
   A distância entre os dois pontos extremos, monte Caburaí (RR) e Arroio Chuí (RS), é de aproximadamente 4 400 km. Esses dois pontos são facilmente identificados em um mapa.
   a) Verifique qual é a distância entre os dois pontos no mapa utilizando uma régua.



   b) Repita o procedimento da experiência de contagem de grãos, feita anteriormente.
   c) Utilize novamente a relação abaixo:

$$\frac{\text{quantidade média de grãos sobre o mapa}}{\text{quantidade de grãos no fundo da caixa}} \simeq$$
$$\simeq \frac{\text{área do mapa}}{\text{área do fundo da caixa}}$$

   Assim teremos aproximadamente a área do mapa, mas devemos lembrar que o mapa está em uma determinada escala, então usando a relação abaixo iremos identificar a área da superfície brasileira.

$$\left(\frac{\text{distância entre os extremos do mapa}}{\text{distância real entre os extremos}}\right)^2 \simeq \frac{\text{área do mapa}}{\text{área do Brasil}}$$

Esse procedimento envolvendo probabilidade pode ser realizado para estimar as mais diversas áreas (área do estado, da cidade, da escola). Será necessário ter o mapa/planta da região. Na internet temos vários *sites* que fornecem mapas, basta escolher a região. Como a escala não é fornecida o aluno precisará calcular a escala medindo a distância real entre dois pontos conhecidos. Para isso, ele pode utilizar passos, trena, etc.

12 Resolução dos exercícios

Observação: As resoluções que não estiverem nesta seção aparecem ao lado do respectivo exercício no livro do professor.

Unidade 1

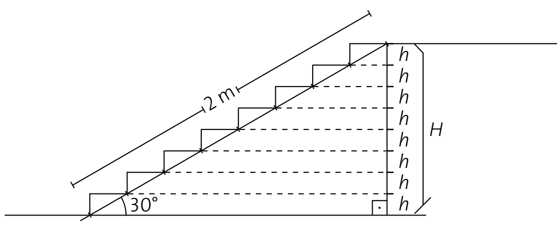
Capítulo 1

1. $\tan 30° = \dfrac{\leqslant}{30} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\leqslant}{30} \Rightarrow \leqslant = 10\sqrt{3}$

2. a) $\cos 45° = \dfrac{x}{16} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{x}{16} \Rightarrow 2x = 16\sqrt{2} \Rightarrow x = 8\sqrt{2}$

b) $\tan 60° = \dfrac{y}{20} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{z}{20} \Rightarrow z = 20\sqrt{3}$

3.



$\text{sen } 30° = \dfrac{H}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{H}{2} \Rightarrow H = 1 \text{ m}$

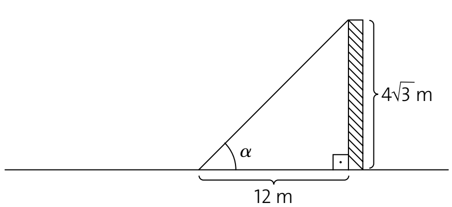
Como $H = 8h$, temos:

$8h = 1 \text{ m} \Rightarrow h = \dfrac{1}{8} \text{ m} \Rightarrow h = 0{,}125 \text{ m} \Rightarrow h = 12{,}5 \text{ cm}$

4. $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{v_x}|}{|\vec{v}|} \Rightarrow \cos 30° = \dfrac{|\vec{v_x}|}{10} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|\vec{v_x}|}{10} \Rightarrow |\vec{v_x}| = 5\sqrt{3} \text{ cm}$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{|\vec{v_y}|}{|\vec{v}|} \Rightarrow \text{sen } 30° = \dfrac{|\vec{v_y}|}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|\vec{v_y}|}{10} \Rightarrow |\vec{v_y}| = 5 \text{ cm}$

5.



$\tan\alpha = \dfrac{\overset{1}{\cancel{4}}\sqrt{3}}{\underset{3}{\cancel{12}}} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$

6. $\overline{CD} = \overline{AB} \cdot \cos 15° \Rightarrow \overline{CD} = 4 \cdot \cos 15° \Rightarrow \overline{CD} \simeq 4 \cdot 0{,}966 \Rightarrow \overline{CD} \simeq 3{,}9 \text{ cm}$

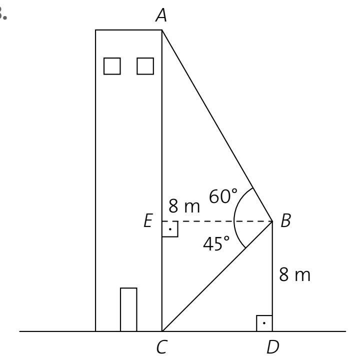
7. $A = \dfrac{AB \cdot h}{2}$

$h = BC \cdot \text{sen } \hat{B} = 4 \cdot \text{sen } 20° = 4 \cdot 0{,}342 \simeq 1{,}37$

$A \simeq \dfrac{7 \cdot 1{,}37}{2} \simeq 4{,}8$

Logo, $A \simeq 4{,}8 \text{ cm}^2$.

8.



$EC = BD \Rightarrow EC = 8 \text{ m}$

Como $EBCD$ é um quadrado, temos $C\hat{B}E = 45°$, e portanto:

$E\hat{B}A = 105° - 15° = 60°$

Então:

$\tan 60° = \dfrac{AE}{BE} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{AE}{8} \Rightarrow AE = 8\sqrt{3} \text{ m}$

Logo:

$h_{\text{prédio}} = AE + EC = 8\sqrt{3} + 8 = 8(\sqrt{3} + 1) \simeq 8(1{,}7 + 1) \simeq 21{,}6 \text{ m}$

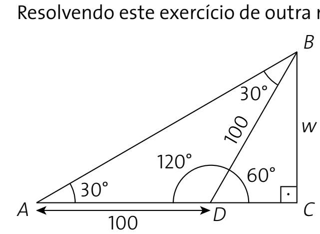
9. a) $\begin{cases} \tan 30° = \dfrac{w}{100 + a} \\ \tan 60° = \dfrac{w}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{w}{100 + a} \\ \sqrt{3} = \dfrac{w}{a} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3w = 100\sqrt{3} + \sqrt{3}a \\ w = a\sqrt{3} \end{cases}$

$3\sqrt{3}a - \sqrt{3}a = 100\sqrt{3} \Rightarrow 3a - a = 100 \Rightarrow 2a = 100 \Rightarrow a = 50$

$w = 50\sqrt{3}$

Resolvendo este exercício de outra maneira:

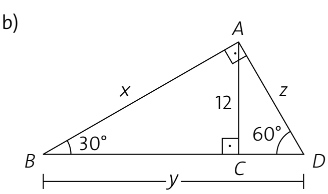


Como $A\hat{D}B = 180° - 60° = 120°$, então $A\hat{B}D = 30°$.

Portanto, o $\triangle ABD$ é isósceles e $\overline{BD} = 100$. Logo:

$\text{sen } 60° = \dfrac{w}{100} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{w}{100} \Rightarrow w = 50\sqrt{3}$

b)



$\text{sen } 30° = \dfrac{12}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{12}{x} \Rightarrow x = 24$

$\text{sen } 60° = \dfrac{12}{z} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12}{z} \Rightarrow \sqrt{3}z = 24 \Rightarrow z = \dfrac{24}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{24\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} \Rightarrow z = 8\sqrt{3}$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$y^2 = x^2 + z^2 \Rightarrow y^2 = (24)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow y^2 = 576 + 192 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 = 768 \Rightarrow y = 16\sqrt{3}$

Podemos contrar o valor de y de outra maneira:

$$y = \overline{BC} + \overline{CD} \Rightarrow y = \frac{12}{\tan 30°} + \frac{12}{\tan 60°} \Rightarrow y = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \Rightarrow y = 16\sqrt{3}$$

10. a) $\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) O suplemento de 150° é 30°, portanto:

$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

d) $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. a) $x = \text{sen } 20° - \text{sen}(180° - 160°) + \cos 44° - \cos(180° - 136°) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \text{sen } 20° - \text{sen } 20° + \cos 44° - \cos 44° = 0$

b) $x = \text{sen } 10° \cdot \cos 50° - \cos(180° - 130°) \cdot \text{sen}(180° - 170°) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \text{sen } 10° \cdot \cos 50° - \cos 50° \text{ sen} \cdot 10° = 0$

12. $180° - (105° + 45°) = 30°$

$$\frac{100}{\text{sen } 30°} = \frac{x}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \frac{100}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = 50\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 100\sqrt{2}$$

13. $$\frac{x}{\text{sen } 45°} = \frac{3\sqrt{2}}{\text{sen } 60°} \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 60°} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

14. a) $\hat{x} = 180° - (75° + 45°) \Rightarrow \hat{x} = 180° - 120° = 60°$

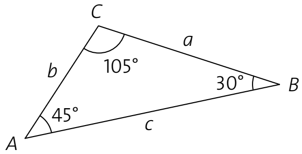
$$\frac{5\sqrt{2}}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 60°} \Rightarrow x = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\text{sen } 60°}{\text{sen } 45°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = 5\sqrt{3}$$

b) $$\frac{8}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 30°} \Rightarrow x = 8 \cdot \frac{\text{sen } 30°}{\text{sen } 45°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 8 \cdot \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 4\sqrt{2}$$

15.



$$\begin{cases} \dfrac{a}{\text{sen } 45°} = \dfrac{b}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \dfrac{a}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \dfrac{b}{\frac{1}{\cancel{2}}} \Rightarrow a = b\sqrt{2} \quad \text{I} \\ a + b = \sqrt{2} + 1 \quad \text{II} \end{cases}$$

Substituindo I em II, temos:

$a + b = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow b\sqrt{2} + b = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow b\left(\sqrt{2} + 1\right) = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 1$

Substituindo $b = 1$ em I, temos:

$a = b\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$

16. a) $$\frac{x}{\text{sen } 76°} = \frac{5}{\text{sen } 32°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}970} \simeq \frac{5}{0{,}530} \Rightarrow x \simeq \frac{5 \cdot 0{,}970}{0{,}530} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \simeq 9{,}151$

b) $$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{10}{\text{sen } 123°} = \frac{10}{\text{sen } 57°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}500} \simeq \frac{10}{0{,}839} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \simeq \frac{10 \cdot 0{,}500}{0{,}839} \Rightarrow x \simeq 5{,}959$$

c) $$\frac{3}{\text{sen } x} = \frac{4}{\text{sen } 70°} \Rightarrow \frac{3}{\text{sen } x} \simeq \frac{4}{0{,}940} \Rightarrow \text{sen} x \simeq \frac{3 \cdot 0{,}940}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0{,}705 \Rightarrow x \simeq 45°$

Resolvido passo a passo

5. a) Uma vez que ele está a $8\sqrt{3}$ km do centro, e a área de caça individual vai até um raio de 10 km do centro, a fronteira área de caça individual mais perto do indivíduo está a $\left(8\sqrt{3} - 10\right)$ km dele.

Resposta: $\left(8\sqrt{3} - 10\right)$ km (aproximadamente 3,9 km).

17. $$x^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60° = 10 - \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 10 - 3 = 7 \Rightarrow$$

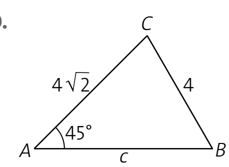
$\Rightarrow x = \sqrt{7}$

18. $x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

19. $a^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot \cancel{2}\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \Rightarrow a^2 = 12 + 9 - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$

20.



$4^2 = c^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 2c \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 45° \Rightarrow$

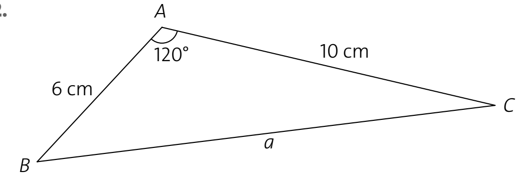
$\Rightarrow 16 = c^2 + 32 - c \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 16 = c^2 + 32 - 8c \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 - 8c + 16 = 0 \Rightarrow c = 4$

21. $16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 18 \cdot \cos\alpha = 18 - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

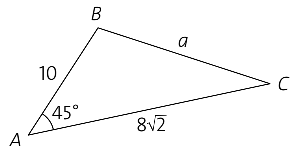
22.



$$a^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120° = 136 - \overset{60}{\cancel{120}}\left(-\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) =$$

$= 136 + 60 = 196 \Rightarrow a = 14$ cm

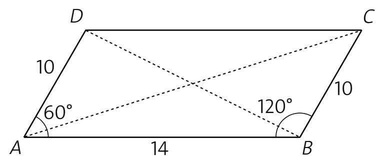
23.



$a^2 = 100 + 128 - 2 \cdot 10 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \cos 45° =$

$= 228 - 160\cancel{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = 68 \Rightarrow a = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

24.



- Cálculo da diagonal BD:
  $BD^2 = 100 + 196 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cos 60° = 296 - \overset{140}{\cancel{280}} \cdot \dfrac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} =$

  $= 156 \Rightarrow BD = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$ cm
- Cálculo da diagonal AC:
  $AC^2 = 100 + 196 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cos 120° =$

  $= 296 - \overset{140}{\cancel{280}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) = 296 + 140 = 436 \Rightarrow$

  $\Rightarrow AC = 2\sqrt{109}$ cm

25. $\left(\dfrac{3r}{2}\right)^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\alpha \Rightarrow \left(\dfrac{9r^2}{4}\right) = -2r^2 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^2 \cdot \cos\alpha = 2r^2 - \dfrac{9r^2}{4} \Rightarrow 2r^2 \cdot \cos\alpha = \dfrac{8r^2 - 9r^2}{4} \Rightarrow$

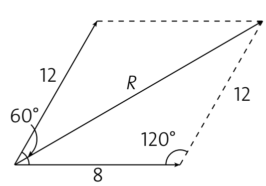
$\Rightarrow 2r^2 \cdot \cos\alpha = -\dfrac{r^2}{4} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\cancel{r^2}}{4} \cdot \dfrac{1}{2\cancel{r^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{8}$

$\text{sen}^2\,\alpha + \dfrac{1}{64} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \dfrac{1}{64} = \dfrac{63}{64} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{63}}{8} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

26.



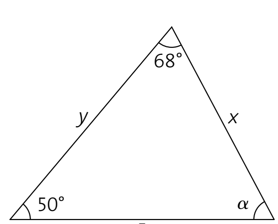
$R^2 = 64 + 144 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120° = 208 - \overset{96}{\cancel{192}}\left(-\dfrac{1}{\cancel{2}_1}\right) =$

$= 208 + 96 = 304 \Rightarrow R = 4\sqrt{19}$ N

27. $\alpha = \dfrac{360°}{10} = 36°$

$\ell^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 36° = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 36° =$
$= 2r^2(1 - \cos 36°) \Rightarrow \ell = r\sqrt{2(1 - \cos 36°)}$

28.



$68° + 50° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 62°$

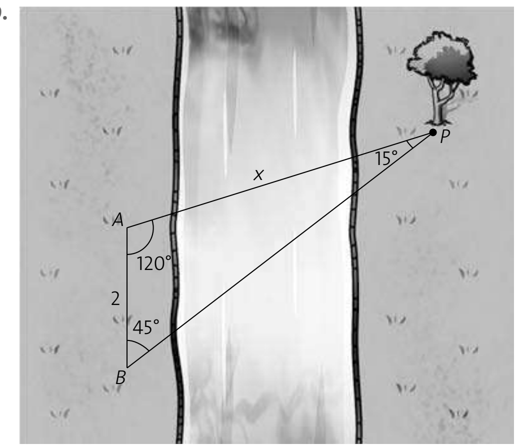
Pela lei dos senos, vem:

$\dfrac{5}{\text{sen } 68°} = \dfrac{x}{\text{sen } 50°} = \dfrac{y}{\text{sen } 62°} \Rightarrow x = \dfrac{5 \cdot \text{sen } 50°}{\text{sen } 68°} \simeq 4{,}13$

$y = \dfrac{5 \cdot \text{sen } 62°}{\text{sen } 68°} \simeq 4{,}76$

Logo, $\alpha = 62°$, $x \simeq 4{,}13$ e $y \simeq 4{,}76$.

29.

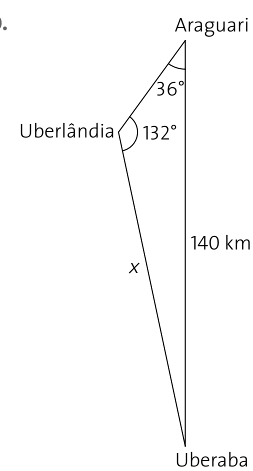


Aplicando a lei dos senos no $\triangle ABP$, temos:

$\dfrac{2}{\text{sen } 15°} = \dfrac{x}{\text{sen } 45°} \Rightarrow x = \dfrac{2 \cdot \text{sen } 15°}{\text{sen } 45°} \simeq \dfrac{2 \cdot 0{,}707}{0{,}259} \simeq 5{,}459$

Logo, a distância de A a P é de aproximadamente 5,459 km ou 5 459 m.

30.



$\dfrac{140}{\text{sen } 132°} = \dfrac{x}{\text{sen } 36°} \Rightarrow \dfrac{140}{0{,}74} = \dfrac{x}{0{,}59} \Rightarrow x = 111{,}6$

A distância aproximada é de 111,6 km.

31. $\left|\vec{V}\right|^2 = 10^2 + 20^2 - \cancel{2} \cdot 10 \cdot 20 \cdot \left(-\dfrac{1}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow \left|\vec{V}\right|^2 = 100 + 400 + 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\vec{V}\right|^2 = 700 \Rightarrow \left|\vec{V}\right| = \sqrt{700} \Rightarrow \left|\vec{V}\right| = 10\sqrt{7} \simeq 26{,}5$ m/s

32. $x^2 = 40^2 + 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 40 \cdot \cos\alpha \Rightarrow x^2 = 3200 - 3200 \cdot 0{,}875 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$ m
Resposta: alternativa **c**.

Outros contextos

1. 40 000 km ———— 100% $\Rightarrow x = 112{,}5\%$
   45 000 km ———— x
   Houve um erro de 12,5%.

Para refletir

Página 15

Demonstração para o triângulo obtusângulo:

O ângulo $\hat{B}$ é o ângulo $C\hat{B}A$, interno do triângulo ABC.

Assim, o ângulo $A\hat{B}H_1$ é o ângulo $(180° - \hat{B})$.

No triângulo retângulo ABH_1, temos:

$$\text{sen}\,(180° - \hat{B}) = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen}\,(180° - \hat{B})$$

Como $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(180° - \alpha)$, então $\text{sen}\,(180° - \hat{B}) = \text{sen}\,\hat{B}$ e, portanto, $h_1 = c \cdot \text{sen}\,\hat{B}$.

No triângulo retângulo ACH_1, temos:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen}\,\hat{C}$$

Comparando, temos:

$$c \cdot \text{sen}\,\hat{B} = b \cdot \text{sen}\,\hat{C} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad 1$$

No triângulo retângulo ABH_2, temos:

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \text{sen}\,\hat{A}$$

No triângulo retângulo BCH_2, temos:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen}\,\hat{C}$$

Comparando, temos:

$$c \cdot \text{sen}\,\hat{A} = a \cdot \text{sen}\,\hat{C} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad 2$$

De 1 e 2 concluímos que:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Demonstração para o triângulo retângulo:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \text{sen}\,\hat{B} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$$

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \text{sen}\,\hat{C} \Rightarrow a = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

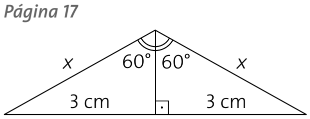
Dessa forma, temos:

$$a = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Como $\hat{A} = 90°$, $\text{sen}\,\hat{A} = 1$. Então, podemos escrever que:

$$a = \frac{a}{1} = \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}}. \text{ Assim, } \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}.$$

Página 17



$$\text{sen } 60° = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Página 19

• No $\triangle ABH$, temos:

$$\begin{cases} \cos \hat{A} = \dfrac{\overline{AH}}{c} \Rightarrow \overline{AH} = c \cdot \cos \hat{A} \\ c^2 = h^2 + \overline{AH}^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - \overline{AH}^2 \end{cases}$$

$$h^2 = c^2 - (c \cdot \cos A)^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}$$

• No $\triangle CBH$, temos:

$$a^2 = h^2 + \overline{CH}^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + \left(\overline{AH} - b\right)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + \left(c \cdot \cos \hat{A} - b\right)^2 \Rightarrow$$

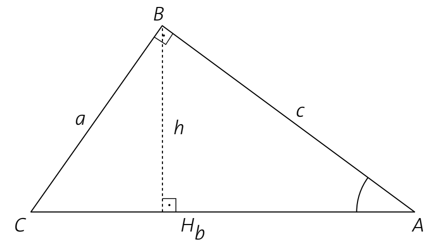
$$\Rightarrow h^2 = a^2 - \left(c \cdot \cos \hat{A} - b\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = a^2 - \left(c^2 \cdot \cos^2 \hat{A} - 2bc \cdot \cos \hat{A} + b^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 - \cancel{c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}} = a^2 - \cancel{c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}} + 2bc \cdot \cos \hat{A} - b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \text{ (lei dos cossenos)}$$

Vamos demonstrar a lei dos cossenos usando o triângulo retângulo:



Observa-se que, para $\hat{A}$ agudo no $\triangle ABC$ retângulo em $\hat{B}$, a demonstração é a mesma já realizada para o triângulo acutângulo. Portanto, vale ainda a relação $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$ (lei dos cossenos).

Capítulo 2

1. a) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ 60° & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{1}{\cancel{60}}\pi}{\underset{3}{\cancel{180}}} = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}$

b) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ 45° & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{1}{\cancel{45}}\pi}{\underset{4}{\cancel{180}}} = \dfrac{\pi}{4} \text{ rad}$

c) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ 210° & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{7}{\cancel{210}}\pi}{\underset{6}{\cancel{180}}} = \dfrac{7\pi}{6} \text{ rad}$

d) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ 300° & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{5}{\cancel{300}}\pi}{\underset{3}{\cancel{180}}} = \dfrac{5\pi}{3} \text{ rad}$

e) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ 120° & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{2}{\cancel{120}}\pi}{\underset{3}{\cancel{180}}} = \dfrac{2\pi}{3} \text{ rad}$

f) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ 150° & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{5}{\cancel{150}}\pi}{\underset{6}{\cancel{180}}} = \dfrac{5\pi}{6} \text{ rad}$

g) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ 270° & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{3}{\cancel{270}}\pi}{\underset{2}{\cancel{180}}} = \dfrac{3\pi}{2} \text{ rad}$

h) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ 135° & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{3}{\cancel{135}}\pi}{\underset{4}{\cancel{180}}} = \dfrac{3\pi}{4} \text{ rad}$

2. a) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ x & \text{———} & \dfrac{\pi}{6} \end{array} \Rightarrow x = \overset{30}{\cancel{180}} \cdot \dfrac{\cancel{\pi}}{\underset{1}{\cancel{6}}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\pi}} = 30°$

b) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ x & \text{———} & \dfrac{\pi}{2} \end{array} \Rightarrow x = \overset{90}{\cancel{180}} \cdot \dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\pi}} = 90°$

c) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ x & \text{———} & \dfrac{\pi}{4} \end{array} \Rightarrow x = \overset{45}{\cancel{180}} \cdot \dfrac{\cancel{\pi}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\pi}} = 45°$

d) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ x & \text{———} & \dfrac{5\pi}{6} \end{array} \Rightarrow x = \overset{30}{\cancel{180}} \cdot \dfrac{5\cancel{\pi}}{\underset{1}{\cancel{6}}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\pi}} = 150°$

e) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ x & \text{———} & \dfrac{5\pi}{4} \end{array} \Rightarrow x = \overset{45}{\cancel{180}} \cdot \dfrac{5\cancel{\pi}}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\pi}} = 225°$

f) $\begin{array}{lcl} 180° & \text{———} & \pi \\ x & \text{———} & \dfrac{4\pi}{3} \end{array} \Rightarrow x = \overset{60}{\cancel{180}} \cdot \dfrac{4\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\pi}} = 240°$

3. $\begin{cases} \ell = 15 \text{ cm} \\ r = 3 \text{ cm} \end{cases}$

$\alpha = \dfrac{\ell}{r} = \dfrac{15}{3} = 5 \text{ rad}$

4. $\begin{matrix} 180° & \text{———} & \pi \\ 45° & \text{———} & x \end{matrix} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{1}{\cancel{45}}\pi}{\underset{4}{\cancel{180}}} = \dfrac{\pi}{4} \text{ rad}$

$\alpha = \dfrac{\ell}{r} \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = \dfrac{\pi}{2} \text{ cm} \simeq 1{,}57 \text{ cm}$

5. a) $\begin{cases} \ell = 12 \text{ cm} \\ r = 10 \text{ cm} \end{cases}$

$\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow 12 = \alpha \cdot 10 \Rightarrow \alpha = \dfrac{5}{6} = 1{,}2 \text{ rad}$

b) $\begin{cases} \ell = 4\pi \text{ cm} \\ r = 6 \text{ cm} \end{cases}$

$\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow 4\pi = \alpha \cdot 6 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \dfrac{2\pi}{3} \text{ rad}$

6. $\begin{cases} r = 15 \text{ cm} \\ \alpha = 60° = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad} \end{cases}$

$\ell = \alpha r = \dfrac{\pi}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \overset{5}{\cancel{15}} = 5\pi \text{ cm} \simeq 15{,}7 \text{ cm}$

9. a) $\begin{array}{r|l} 780 & 360 \\ \hline 60 & 2 \end{array}$

$\alpha = 60°$

b) $\begin{array}{r|l} 1140 & 360 \\ \hline 60 & 3 \end{array}$

$\alpha = 60°$

c) $\begin{array}{r|l} 400 & 360 \\ \hline 40 & 1 \end{array}$

$\alpha = 360 - 40 = 320°$

d) $\dfrac{15\pi}{2} - 2\pi = \dfrac{15\pi - 4\pi}{2} = \dfrac{11\pi}{2}$

$\dfrac{11\pi}{2} - 2\pi = \dfrac{11\pi - 4\pi}{2} = \dfrac{7\pi}{2}$

$\dfrac{7\pi}{2} - 2\pi = \dfrac{7\pi - 4\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$

$\alpha = \dfrac{3\pi}{2} \text{ rad}$

e) $\dfrac{10\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{10\pi - 6\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

$\alpha = \dfrac{4\pi}{3} \text{ rad}$

f) $\dfrac{9\pi}{2} - 2\pi = \dfrac{9\pi - 4\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{2}$

$\dfrac{5\pi}{2} - 2\pi = \dfrac{5\pi - 4\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

$\alpha = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad}$

10. a) $\begin{matrix} 180° & \text{———} & \pi \\ x & \text{———} & \dfrac{7\pi}{4} \end{matrix} \Rightarrow x = \overset{45}{\cancel{180}} \cdot \dfrac{7\cancel{\pi}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\pi}} = 315°$

b) $\begin{matrix} 180° & \text{———} & \pi \\ 60° & \text{———} & x \end{matrix} \Rightarrow x = \dfrac{60\pi}{180} = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}$

$\alpha = \dfrac{\ell}{r} \Rightarrow \ell = \dfrac{\pi}{3} \cdot 1{,}5 = \dfrac{\pi}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \dfrac{\overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \dfrac{\pi}{2} \text{ cm}$

c) $\begin{array}{r|l} 2\,650 & 360 \\ \hline 130 & 7 \end{array}$

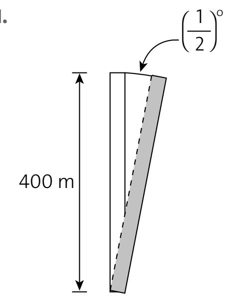
$2\,650° = 7 \cdot 360° + 130°$

Mede 130°.

d) $\dfrac{14\pi}{3} - 4\pi = \dfrac{2\pi}{3} \text{ rad}$

$\alpha = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}$

11.



$\begin{matrix} 360° & \text{———} & 2\pi \cdot 400 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)° & \text{———} & x \end{matrix} \Rightarrow$

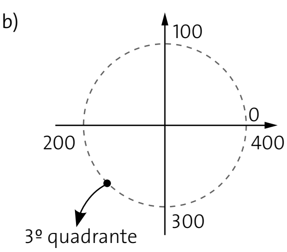
$\Rightarrow x = \dfrac{400\pi}{360} = \dfrac{10\pi}{9}$

Resposta: alternativa **d**.

12. a) $\begin{matrix} \dfrac{1}{4} \text{ volta} & \text{———} & 100 \text{ gr} \\ \dfrac{1}{2} \text{ volta} & \text{———} & x \end{matrix} \Rightarrow x = 200 \text{ gr}$

$\begin{matrix} \dfrac{1}{4} \text{ volta} & \text{———} & 100 \text{ gr} \\ 1 \text{ volta} & \text{———} & x \end{matrix} \Rightarrow x = 400 \text{ gr}$

b)



c) $\begin{matrix} 200 \text{ volta} & \text{———} & \pi \text{ real} \\ x \text{ volta} & \text{———} & 1 \text{ real} \end{matrix} \Rightarrow \pi \cdot x = 200 \Rightarrow x = \dfrac{200}{\pi}$

d) $\begin{matrix} 200 \text{ volta} & \text{———} & 180° \\ 1 \text{ gr} & \text{———} & x \end{matrix} \Rightarrow 200x = 180 \Rightarrow x = 0{,}9°$

Para refletir

Página 32

- Do exemplo **b**, podemos afirmar que são côngruos 45° e 765° ou $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{17\pi}{4}$.

Capítulo 3

3. $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \dfrac{4}{5}$

Como $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, temos $\cos x = -\dfrac{4}{5}$.

4. a) $\text{sen}\, \dfrac{5\pi}{6} = \text{sen}\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\, \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

b) $\text{sen}\, \dfrac{4\pi}{3} = \text{sen}\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\, \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen}\, 330° = \text{sen}(360° - 30°) = -\text{sen}\, 30° = -\dfrac{1}{2}$

5. a) $\cos \dfrac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 315° = \cos(360° - 45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

d) $\cos 330° = \cos (360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos 240° = \cos (180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

6. a) $\frac{37\pi}{6} = \frac{36\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6}$

$\text{sen}\ \frac{37\pi}{6} = \text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

b) $360° - 225° = 135°$

$\text{sen}\ (-225°) = \text{sen}\ 135° = \text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $6\pi = 3 \cdot 2\pi$

$\text{sen}\ 6\pi = \text{sen}\ 2\pi = 0$

d) $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4}$

$\text{sen}\ \frac{19\pi}{4} = \text{sen}\ \frac{3\pi}{4} = \text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

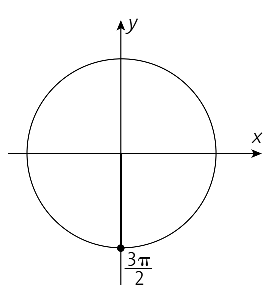
e) $630° = 360° + 270°$

$\text{sen}\ 630° = \text{sen}\ 270° = -1$

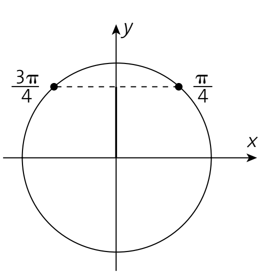
f) $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\frac{5\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. a) $\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

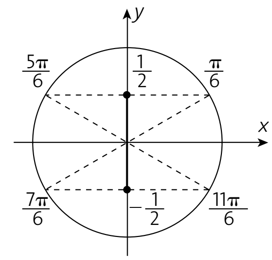


b) $\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



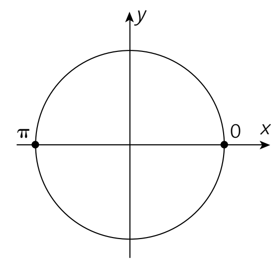
$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) $\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$



$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) $\text{sen}\ 0 = 0$



$x = 0 + k\pi = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

8. a) $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$

$\cos \frac{9\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $-330° = -360° + 30° = -1 \cdot 360° + 30°$

$\cos (-330°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{9\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cos \frac{9\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

d) $1140° = 3 \cdot 360° + 60°$

$\cos 1140° = \cos 60° = \frac{1}{2}$

e) $\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$

$\cos \frac{25\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $-\frac{15\pi}{4} = -\frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -4\pi + \frac{\pi}{4} = -2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}$

$\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $11\pi = 10\pi + \pi = 5 \cdot 2\pi + \pi$

$\cos 11\pi = \cos \pi = -1$

h) $570° = 360° + 210°$

$\cos 570° = \cos 210° = \cos (180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\right\}$

12. $1935° = 5 \cdot 360° + 135°$

$\tan 1935° = \tan 135° = -\tan(180° - 135°) = -\tan 45° = -1$

13. a) $-1 \leq 2m - 7 \leq 1 \Rightarrow 6 \leq 2m \leq 8 \Rightarrow 3 \leq m \leq 4$

Portanto, os valores de m são dados por:

$\{m \in \mathbb{R} \mid 3 \leq m \leq 4\}$.

b) $-1 \leqslant 3m - 2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 3m \leqslant 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$

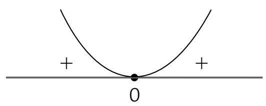
Portanto, os valores de m são dados por:

$\left\{m \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1\right\}$.

c) $\overbrace{-1 \leqslant m^2 - 1}^{\text{I}}\underbrace{\ \leqslant 1}_{\text{II}}$

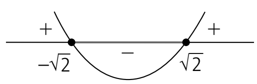
I $m^2 \cap 0$

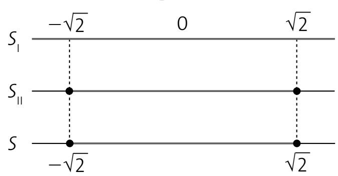
raiz: $m = 0$



II $m^2 - 2 \leqslant 0$

raízes: $m^2 = 2 \Rightarrow m' = \sqrt{2}$ e $m'' = -\sqrt{2}$





Logo, os valores de m são dados por:

$\{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leqslant m \leqslant \sqrt{2}\}$.

d) $\operatorname{sen} x = 1 - 4m \Rightarrow -1 \leqslant 1 - 4m \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant -4m \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leqslant 4m \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{2}$

Portanto, os valores de m são dados por:

$\left\{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$.

14. a) $-1 \leqslant 2m + 5 \leqslant 1 \Rightarrow -6 \leqslant 2m \leqslant -4 \Rightarrow -3 \leqslant m \leqslant -2$

Logo, os valores de m são dados por:

$\{m \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant m \leqslant -2\}$.

b) $-1 \leqslant 3m + 4 \leqslant 1 \Rightarrow -5 \leqslant 3m \leqslant -3 \Rightarrow -\dfrac{5}{3} \leqslant m \leqslant -1$

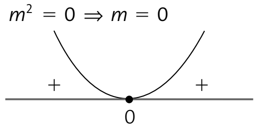
Portanto, os valores de m são dados por:

$\left\{m \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{3} \leqslant m \leqslant -1\right\}$.

c) $-1 \leqslant 1 - m^2 \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant -m^2 \leqslant 0 \Rightarrow \overbrace{0 \leqslant m^2}^{\text{I}}\underbrace{\ \leqslant 2}_{\text{II}}$

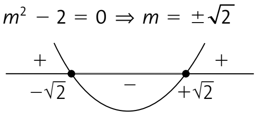
I $m^2 \geqslant 0$

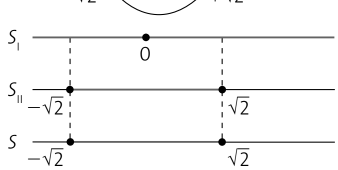
$m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$



II $m^2 \leqslant 2 \Rightarrow m^2 - 2 \leqslant 0$

$m^2 - 2 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$





Logo, os valores de m são dados por:

$\{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leqslant m \leqslant \sqrt{2}\}$.

d) $\cos x = 6 - 5m \Rightarrow -1 \leqslant 6 - 5m \leqslant 1 \Rightarrow -7 \leqslant -5m \leqslant -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \leqslant 5m \leqslant 7 \Rightarrow 1 \leqslant m \leqslant \dfrac{7}{5}$

Portanto, os valores de m são dados por:

$\left\{m \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant m \leqslant \dfrac{7}{5}\right\}$.

15. a) $f(\pi) = \operatorname{sen} \pi = 0$

$g(\pi) = \cos\pi = -1$

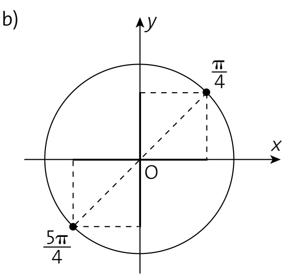
$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} : \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$f\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$g\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b)



Como $x \in [0, 2\pi]$, $\operatorname{sen} x = \cos x$. Então, $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

c) Não existe, porque nesse intervalo $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos x < 0$.

16. a) $y_{máx} \rightarrow \operatorname{sen} x = 1$

$y_{máx} = 1 - 10 \Rightarrow y_{máx} = -9$

$y_{mín} \rightarrow \operatorname{sen} x = -1$

$y_{mín} = -1 - 10 \Rightarrow y_{mín} = -11$

b) $y_{máx} \rightarrow \cos x = -1$

$y_{máx} = 6 - 10 \cdot (-1) \Rightarrow y_{máx} = 16$

$y_{mín} \rightarrow \cos x = 1$

$y_{mín} = 6 - 10 \cdot 1 \Rightarrow y_{mín} = -4$

c) $y_{máx} \rightarrow \cos^2 x = 1$

$y_{máx} = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow y_{máx} = 4$

$y_{mín} \rightarrow \cos^2 x = 0$

$y_{mín} = 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y_{mín} = 1$

d) $y = \operatorname{sen} x + \cos x \Rightarrow (y)^2 = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \Rightarrow y^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{1 + \operatorname{sen} 2x} \Rightarrow y_{máx} = \sqrt{2}$ e $y_{mín} = -\sqrt{2}$

17. $\sqrt{6} \cdot f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12}\right)$ I

Como $\operatorname{sen} x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, então:

$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{12}$

Substituindo em I, temos;

$$\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt{6}\left[2\cdot\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)\right]=$$

$$=\sqrt{6}\left(2\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\right)=\sqrt{6}\left(2\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\sqrt{6}\left(\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3$$

Resolvido passo a passo

5. a) Para que $\text{sen}\left(\frac{x\cdot\pi}{12}\right)=-1$, devemos ter:

$$\frac{x\cdot\pi}{12}=\frac{3\cdot\pi}{2}\Rightarrow x=18$$

Resposta: às 18 horas (6 horas da tarde).

b) Para que $\left(\frac{x\cdot\pi}{12}\right)=1$, devemos ter:

$$\frac{x\cdot\pi}{12}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=6$$

Resposta: às 6 horas da manhã.

c) $900-800\cdot\text{sen}\left(\frac{x\cdot\pi}{12}\right)=1300\Rightarrow$

$$\Rightarrow -800\cdot\text{sen}\left(\frac{x\cdot\pi}{12}\right)=400\Rightarrow\text{sen}\left(\frac{x\cdot\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}$$

Assim:

$$\frac{x\cdot\pi}{12}=\frac{7\cdot\pi}{6}\Rightarrow x=14 \text{ ou } \frac{x\cdot\pi}{12}=\frac{11\cdot\pi}{6}\Rightarrow x=22$$

Resposta: às 14 horas (2 horas da tarde) e às 22 horas (10 horas da noite).

18. a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\text{sen}\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\text{sen}\,2\pi=0$

b) $g(\pi)=1-\cos\pi=1-(-1)=2$

c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\text{sen}\left(4\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}=\text{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\text{sen}\,\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $D(g)=\mathbb{R}$

e) $Im(g)=[0,2]$

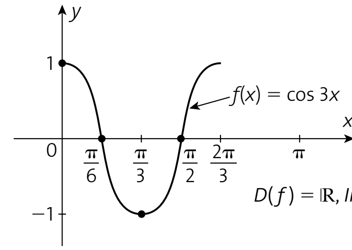
f) $\text{sen}\,4x=1\Rightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}$ ou $\frac{5\pi}{8}$ ou $\frac{9\pi}{8}$ ou $\frac{13\pi}{8}$

19. a) Fazemos:

$3x=t\Rightarrow x=\frac{t}{3}$

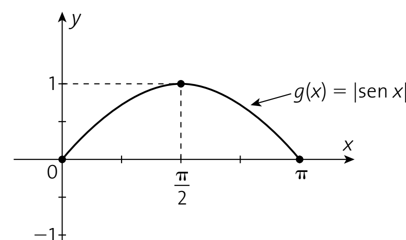
t	x	$\cos t$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	0
π	$\frac{\pi}{3}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0
2π	$\frac{2\pi}{3}$	1



$D(f)=\mathbb{R}$, $Im(f)=[-1,1]$, $p=\frac{2\pi}{3}$

b)

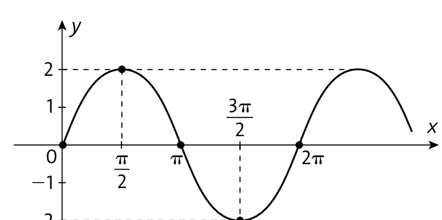
x	$\text{sen}\,x$	$\lvert\text{sen}\,x\rvert$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	1
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1
2π	0	0



$D(f)=\mathbb{R}$, $Im(f)=[0,1]$, $p=\pi$

c)

x	$\text{sen}\,x$	$2\,\text{sen}\,x$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0



$D(f)=\mathbb{R}$, $Im(f)=[-2,2]$, $p=2\pi$

20. a) $p=\frac{2\pi}{|7|}\Rightarrow p=\frac{2\pi}{7}$

b) $p=\frac{2\pi}{|2|}\Rightarrow p=\pi$

c) $p=\frac{2\pi}{|2|}\Rightarrow p=\pi$

d) A tangente tem período π. Como $f(x)$ tem $c=\pi$, vem:

$p=\frac{\pi}{|\pi|}\Rightarrow p=1$

e) $p=\frac{2\pi}{|\pi|}\Rightarrow p=2$

21. $f(0) = 1 \Rightarrow a + b \cdot \text{sen } 0 = 1 \Rightarrow a = 1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow 1 + b \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} = -1 \Rightarrow 1 + b \cdot 1 = -1 \Rightarrow b = -2$

Resposta: alternativa **d**.

22. $y = a + b \text{ sen } (ct)$

$Im(g) = [a - |b|; a + b]$

$p = \frac{2\pi}{|c|}$

$$\begin{cases} a - \cancel{|b|} = 2 \\ a + \cancel{|b|} = 4 \end{cases}$$

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$b = 1$

$3 = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{2\pi}{3}$

$y = 3 + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

Resposta: alternativa **d**.

23. $C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x\pi}{3}\right)$

$v(x) = 3\sqrt{2} \text{ sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right)$

$L(x) = v(x) - c(x)$

$L(3) = 3\sqrt{2} \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4} - \left[2 - \cos\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow L(3) = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - [2 - 0] \Rightarrow L(3) = 3 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(3) = 1$

Resposta: alternativa **c**.

24. Vamos optar por uma função do tipo $v(x) = a + b \cdot \text{sen } (cx + d)$ por causa da aparência do gráfico. Optaremos também por b e c positivos, que é o mais comum.

Então, temos:

- $Im = [-2, 2]$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 2$$

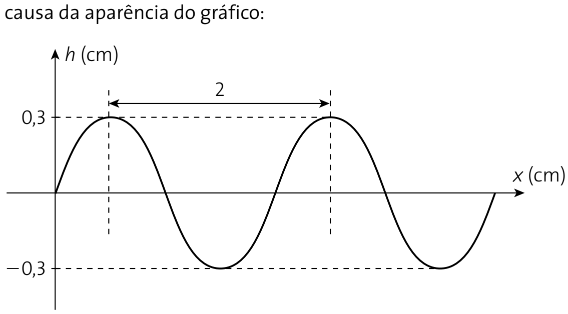
- Como o período da senoide é 8 m, então:

$\frac{2\pi}{c} = 8 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$

- Não há deslocamento horizontal: $d = 0$.

Logo, a função pode ser $v(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

25. Queremos uma função do tipo $h(x) = a + b \cdot \text{sen } (cx + d)$ por causa da aparência do gráfico:



Optaremos por b e c positivos, que é o mais comum. Então:

- $Im = [-0{,}3; 0{,}3]$

$$\begin{cases} a + b = 0{,}3 \\ a - b = -0{,}3 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 0{,}3$$

- O período da senoide é de 2 cm, então:

$\frac{2\pi}{c} = 2 \Rightarrow c = \pi$

- Não há deslocamento horizontal da senoide: $d = 0$.

Logo, a função pode ser $h(x) = 0{,}3 \cdot \text{sen } (\pi x)$.

26. Como a função pedida é derivada de uma função cosseno, temos de considerar uma translação de 3 e para a direita $\left(\text{portanto, } -\frac{d}{c} = 3\right)$. Além disso, o gráfico nos mostra que o período é $4\left(\text{portanto, } c = \frac{\pi}{2}\right)$, e assim:

$-\frac{d}{c} = 3 \Rightarrow -\frac{d}{\frac{\pi}{2}} = 3 \Rightarrow d = -\frac{3\pi}{2}$

A imagem é $Im = [-2, 2]$, portanto $a = 0$ e $b = 2$.

Dessa forma, a função é $x = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{3\pi}{2}\right)$ e as constantes são $A = 2$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = -\frac{3\pi}{2}$.

Observação: Podemos considerar também que seja uma translação de 1 s para a esquerda, e então $-\frac{d}{c} = -1$, que resultaria em $d = \frac{\pi}{2}$. Note que $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{3\pi}{2}$ são arcos côngruos, portanto ambas as respostas estariam corretas do ponto de vista matemático.

Capítulo 4

1. a) • $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\cos x > 0$, então $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{\sqrt{3}} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

- $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

- $\csc x = \frac{1}{\text{sen } x} = -2$

b) • $\text{sen}^2 x + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $0 \ell x < \frac{\pi}{2}$, $\text{sen } x > 0$, então $\text{sen } x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

- $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{1} = 2\sqrt{2}$

- $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

- $\sec x = \frac{1}{\cos x} = 3$

- $\csc x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) • $\csc x = -\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen } x} = -\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{4} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, $\cos x < 0$, então $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• $\tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$

• $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 1$

• $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

d) • $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{sen } x = \sqrt{3} \cdot \cos x$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = (\sqrt{3} \cdot \cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 4 \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{1}{2}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos x > 0$, então $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

• $\text{sen } x = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

• $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = 2$

• $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen } x} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

2. $\text{sen}^2 x + \dfrac{16}{25} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\dfrac{3}{5}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\text{sen } x > 0$, então $\text{sen } x = \dfrac{3}{5}$.

$\text{sen}^2 x - 3 \cdot \text{sen } x = \dfrac{9}{25} - 3 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{25} - \dfrac{9}{5} = \dfrac{9-45}{25} = -\dfrac{36}{25}$

3. a) $y = \dfrac{\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\text{sen } x}}{1 - \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}} = \dfrac{\dfrac{\text{sen } x - \cos x}{\cos x \cdot \text{sen } x}}{\dfrac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x}} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

b) $y = \left(\dfrac{1}{\cos x} - \cos x\right)\left(\dfrac{1}{\text{sen } x} - \text{sen } x\right) \cdot \left(\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}\right) =$

$= \left(\dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\right) \cdot \left(\dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen } x}\right) \cdot \left(\dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen } x}\right) =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen } x} \cdot \dfrac{1}{\cos x \cdot \text{sen } x} = \dfrac{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = 1$

4. $A = \dfrac{\dfrac{\cos x}{\text{sen } x} - 1}{\dfrac{1}{\text{sen } x} - \dfrac{1}{\cos x}} = \dfrac{\dfrac{\cos x - \text{sen } x}{\text{sen } x}}{\dfrac{\cos x - \text{sen } x}{\text{sen } x \cdot \cos x}} =$

$= \dfrac{\cancel{\cos x - \text{sen } x}}{\cancel{\text{sen } x}} \cdot \dfrac{\cancel{\text{sen } x} \cdot \cos x}{\cancel{\cos x - \text{sen } x}} = \cos x = \dfrac{1}{2}$

5. a) $\cos x \cdot \tan x \cdot \csc x = \cancel{\cos x} \cdot \dfrac{\cancel{\text{sen } x}}{\cancel{\cos x}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\text{sen } x}} = 1$

b) • $f(x) = \dfrac{\cancel{\text{sen}^2 x}}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\text{sen}^2 x}} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

• $g(x) = 1 + \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

Como $f(x) = g(x)$, está demonstrada a identidade.

c) • $f(x) = (1 + \tan x)(1 - \tan x) = 1 - \tan^2 x = 1 - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$

• $g(x) = 2 - \sec^2 x = 2 - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2 \cdot \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{2(1 - \text{sen}^2 x) - 1}{\cos^2 x} = \dfrac{2 - 2 \cdot \text{sen}^2 x - 1}{\cos^2 x} = \dfrac{1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$

Como $f(x) = g(x)$, está demonstrada a identidade.

d) $(\tan x - \text{sen } x)^2 + (1 - \cos x)^2 =$

$= \tan^2 x - 2 \cdot \tan x \cdot \text{sen } x + \text{sen}^2 x + 1 - 2 \cdot \cos x + \cos^2 x =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{2 \cdot \text{sen}^2 x}{\cos x} + 2 - 2 \cdot \cos x =$

$= \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{2(1 - \cos^2 x)}{\cos x} + 2 - 2 \cdot \cos x =$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} - \dfrac{2}{\cos x} + \dfrac{2 \cdot \cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{\cos x}} + 2 - 2 \cdot \cos x =$

$= \sec^2 x - 1 - 2 \cdot \sec x + \cancel{2 \cdot \cos x} + 2 - \cancel{2 \cdot \cos x} =$

$= \sec^2 x - 2 \cdot \sec x + 1 = (\sec x - 1)^2$

e) • $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}^{\cancel{2}} x} \cdot \dfrac{\cancel{\text{sen } x}}{\cos x} = \dfrac{1}{\text{sen } x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

• $g(x) = \dfrac{\cancel{\cos x}}{\text{sen } x} \cdot \dfrac{1}{\cos^{\cancel{2}} x} = \dfrac{1}{\text{sen } x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

Como $f(x) = g(x)$, está demonstrada a identidade.

f) • $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$

• $g(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \dfrac{1}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$

Como $f(x) = g(x)$, está demonstrada a identidade.

6. • $f(x) = \left(\text{sen } x + \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}\right) : \left(\dfrac{\cos x}{\text{sen } x} + \dfrac{1}{\text{sen } x}\right) =$

$= \dfrac{\text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x}{\cos x} \cdot \dfrac{\text{sen } x}{\cos x + 1} =$

$= \dfrac{\text{sen } x \cdot (\cancel{\cos x + 1})}{\cos x} \cdot \dfrac{\text{sen } x}{\cancel{\cos x + 1}} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x}$

• $g(x) = \text{sen } x \cdot \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x}$

Logo, $f(x) = g(x)$.

7. $A = \cos^2 a - \cos^2 b + \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b =$

$= (\cos^2 a + \text{sen}^2 a) - (\cos^2 b + \text{sen}^2 b) = 1 - 1 = 0$

8. $P = \dfrac{1}{1 + \text{sen}^2 x} + \dfrac{1}{1 + \cos^2 x} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\text{sen}^2 x}} =$

$= \dfrac{1}{1 + \text{sen}^2 x} + \dfrac{1}{1 + \cos^2 x} + \dfrac{1}{\dfrac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}} + \dfrac{1}{\dfrac{\text{sen}^2 x + 1}{\text{sen}^2 x}} =$

$= \dfrac{1}{1 + \text{sen}^2 x} + \dfrac{1}{1 + \cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} + \dfrac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x + 1} =$

$= \dfrac{\cancel{1 + \cos^2 x}}{\cancel{1 + \cos^2 x}} + \dfrac{\cancel{1 + \text{sen}^2 x}}{\cancel{1 + \text{sen}^2 x}} = 1 + 1 = 2$

9. a) $\tan 15° = \tan(60° - 45°) = \dfrac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 45°} =$

$= \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$

b) $\text{sen } 15° = \text{sen } (60° - 45°) =$

$= \text{sen } 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 45° \cdot \cos 60° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) $\cos 75° = \cos (30° + 45°) =$

$= \cos 30° \cdot \cos 45° - \text{sen } 30° \cdot \text{sen } 45° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

d) $\tan 75° = \tan (30° + 45°) = \dfrac{\tan 30° + \tan 45°}{1 - \tan 30° \cdot \tan 45°} =$

$= \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

e) $\text{sen } 105° = \text{sen } (60° + 45°) =$

$= \text{sen } 60° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 60° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

f) $\cos 195° = \cos (105° + 90°) =$

$= \cos 105° \cdot \cos 90° - \text{sen } 105° \cdot \text{sen } 90° =$

$= \cos 105° \cdot 0 - \left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)1 = -\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

10. • $\dfrac{16}{25} + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \cos a = \dfrac{3}{5}$

• $\dfrac{144}{169} + \cos^2 b = 1 \Rightarrow \cos^2 b = 1 - \dfrac{144}{169} = \dfrac{25}{169} \Rightarrow \cos b = \dfrac{5}{13}$

• $\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a =$

$= \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{20}{65} + \dfrac{36}{65} = \dfrac{56}{65}$

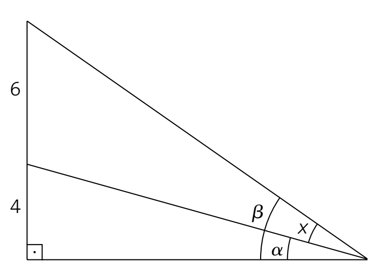
• $\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b =$

$= \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{13} + \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{12}{13} = \dfrac{15}{65} + \dfrac{48}{65} = \dfrac{63}{65}$

• $\tan (a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \dfrac{\dfrac{4}{5} : \dfrac{3}{5} + \dfrac{12}{13} : \dfrac{5}{13}}{1 - \left(\dfrac{4}{5} : \dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{12}{13} : \dfrac{5}{13}\right)} =$

$= \dfrac{\dfrac{4}{3} + \dfrac{12}{5}}{1 - \dfrac{16}{5}} = \dfrac{\dfrac{20 + 36}{15}}{-\dfrac{11}{5}} = \dfrac{56}{\cancel{15}_3}\left(-\dfrac{\cancel{5}^1}{11}\right) = -\dfrac{56}{33}$

11.



$\tan \alpha = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

$\tan \beta = \dfrac{6 + 4}{10} = 1$

Mas:

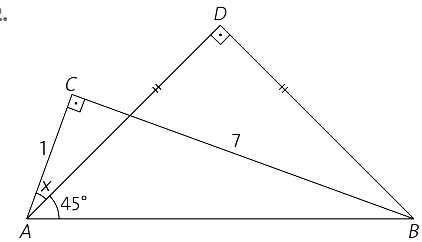
$\beta = \alpha + x \Rightarrow x = \beta - \alpha$

Portanto:

$\tan x = \tan (\beta - \alpha) = \dfrac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = \dfrac{1 - 0{,}4}{1 + 1 \cdot 0{,}4} = \dfrac{0{,}6}{1{,}4} =$

$= \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$

12.



O $\triangle ADB$ é isósceles e retângulo, então $D\hat{A}B = 45°$.

$C\hat{A}B = x + 45° \Rightarrow \tan (x + 45°) = \dfrac{7}{1} = 7$

Usando a fórmula da soma dos ângulos da tangente, temos:

$\tan (x + 45°) = \dfrac{\tan x + \tan 45°}{1 - \tan x \cdot \tan 45°} = \dfrac{\tan x + 1}{1 - \tan x \cdot 1} = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan x + 1 = 7(1 - \tan x) \Rightarrow \tan x + 1 = 7 - 7 \tan x \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \tan x = 6 \Rightarrow \tan x = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$\tan x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{9}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 \text{ sen}^2 x = 9 \cos^2 x$

Lembrando que $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$:

$16 \text{ sen}^2 x = 9(1 - \text{sen}^2 x) \Rightarrow 16 \text{ sen}^2 x = 9 - 9 \text{ sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 \text{ sen}^2 x = 9 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \text{sen } x = \pm \dfrac{3}{5}$

Como x é ângulo agudo, $\text{sen } x = \dfrac{3}{5}$.

Resposta: alternativa **c**.

Resolvido passo a passo

5. a) Como $d = v \cdot \cos \alpha$, o intervalo de variação de d é:

$60(2k^2 - 1) \leqslant d \leqslant 70k$

13. • $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2mn$

• $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = n^2 - m^2$

• $\tan 2x = \dfrac{\text{sen } 2x}{\cos 2x} = \dfrac{2mn}{n^2 - m^2}$

14. $\tan 2x = \dfrac{\cancel{2}^1 \cdot \dfrac{1}{\cancel{4}_2}}{1 - \dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \dfrac{\cancel{16}^8}{15} = \dfrac{8}{15}$

15. • $\dfrac{4}{9} + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9} \Rightarrow \cos a = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

• $\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a = 2 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

• $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \dfrac{5}{9} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{9}$

• $\tan a = \dfrac{2}{3} : \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

• $\tan 2a = \dfrac{\dfrac{2 \cdot 2\sqrt{5}}{5}}{1 - \dfrac{20}{25}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} : \dfrac{1}{5} = 4\sqrt{5}$

16. $A = \dfrac{2 \cdot \cancel{\text{sen } x} \cdot \cos x}{\cancel{\text{sen } x}} - \dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x} =$

$= 2 \cdot \cos x - \dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{2 \cdot \cos^2 x - \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos x} =$

$= \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

17. $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 3 \Rightarrow \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \text{sen } x \cdot \cos x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \text{sen } 2x = \dfrac{2}{3}$

18. a) $\text{sen } 3a = \text{sen } (2a + a) = \text{sen } 2a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos 2a =$

$= 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot (\cos^2 a - \text{sen}^2 a) =$

$= 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos^2 a + \text{sen } a \cdot \cos^2 a - \text{sen}^3 a =$

$= 3 \cdot \text{sen } a \cdot \cos^2 a - \text{sen}^3 a =$

$= 3 \cdot \text{sen } a \cdot (1 - \text{sen}^2 a) - \text{sen}^3 a =$

$= 3 \cdot \text{sen } a - 3 \cdot \text{sen}^3 a - \text{sen}^3 a = 3 \cdot \text{sen } a - 4 \cdot \text{sen}^3 a$

b) $\cos 3a = \cos (2a + a) = \cos 2a \cdot \cos a - \text{sen } 2a \cdot \text{sen } a =$

$= (\cos^2 a - \text{sen}^2 a) \cdot \cos a - 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a \cdot \text{sen } a =$

$= \cos^3 a - \text{sen}^2 a \cdot \cos a - 2 \cdot \text{sen}^2 a \cdot \cos a =$

$= \cos^3 a - 3 \cdot \text{sen}^2 a \cdot \cos a = \cos^3 a - 3(1 - \cos^2 a) \cdot \cos a =$

$= \cos^3 a - 3 \cdot \cos a + 3 \cdot \cos^3 a = 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$

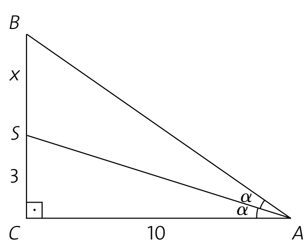
19. $(\text{sen } x + \cos x)^2 = m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = m^2 \Rightarrow 1 + \text{sen } 2x = m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } 2x = m^2 - 1$

20.



$\tan \alpha = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$

$\tan 2\alpha = \dfrac{3 + x}{10}$

Mas:

$\tan 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \dfrac{2 \cdot 0{,}3}{1 - (0{,}3)^2} = \dfrac{0{,}6}{0{,}91}$

Então:

$\dfrac{3 + x}{10} = \dfrac{0{,}6}{0{,}91} = \dfrac{60}{91} \Rightarrow 600 = 273 + 91x \Rightarrow x = \dfrac{327}{91} \simeq 3{,}6$

Resolvido passo a passo

5. a) $1500 = \left(-64 + \dfrac{7\,980}{100 + 5 \cos \alpha}\right) \cdot 10^2$

Dividindo ambos os membros por 10^2 (ou seja, 100), temos:

$15 = -64 + \dfrac{7\,980}{100 + 5 \cos \alpha}$

Vamos agora isolar $\cos \alpha$:

$15 + 64 = \dfrac{7\,980}{100 + 5 \cos \alpha} \Rightarrow 79 = \dfrac{7\,980}{100 + 5 \cos \alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow 79(100 + 5 \cos \alpha) = 7\,980 \Rightarrow 100 + 5 \cdot \cos \alpha = \dfrac{7\,980}{79} \Rightarrow$

$\Rightarrow 100 + 5 \cdot \cos \alpha = 101{,}01 \Rightarrow 5 \cdot \cos \alpha = 1{,}01 \Rightarrow$

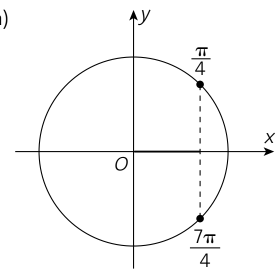
$\Rightarrow \cos \alpha = 0{,}2$

Com uma calculadora científica ou a tabela trigonométrica da página 27, podemos descobrir o valor de α no primeiro quadrante: $\alpha = 78{,}5°$.

Sabemos que o ângulo $(360° - \alpha)$ no 4º quadrante tem o mesmo cosseno que α no 1º quadrante. Assim, fazendo $360° - 78{,}5°$ concluímos que $281{,}5°$ também é uma resposta válida.

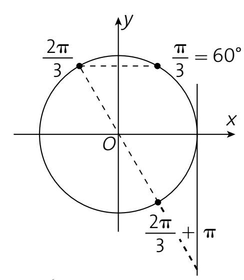
Resposta: $\alpha = 78{,}5°$ ou $\alpha = 281{,}5°$

21. a)



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

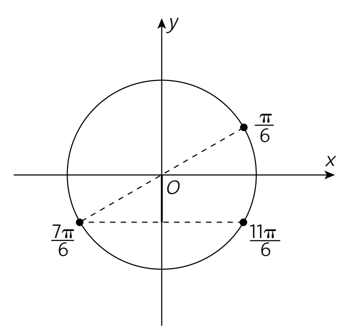
b) $\tan \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

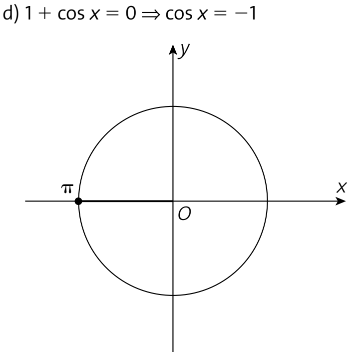
c) $2 \cdot \text{sen } x = -1 \Rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$

$\text{sen } \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$



$S = \left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

d) $1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1$

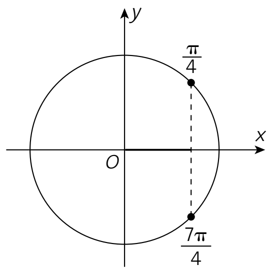


$S = \varnothing$

e) Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, sen $x \in [-1, 1]$.

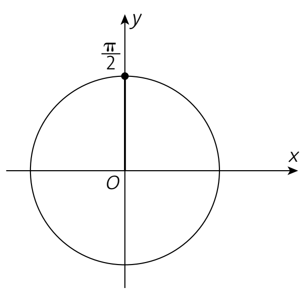
Logo, $S = \varnothing$, pois $\sqrt{2} > 1$.

f) $\sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

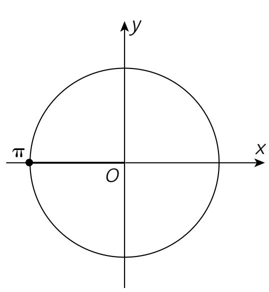
22. a)



$\text{sen } 3x = 1 \Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b)

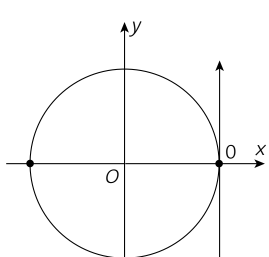


$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

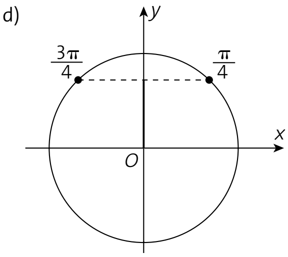
c)



$\tan 5x = 0 \Rightarrow 5x = k\pi \Rightarrow x = k \cdot \dfrac{\pi}{5}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{5}, \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{3\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \pi, \dfrac{6\pi}{5}, \dfrac{7\pi}{5}, \dfrac{8\pi}{5}, \dfrac{9\pi}{5}\right\}$

d)



$\text{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

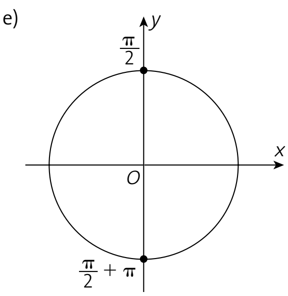
$\Rightarrow 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } 3x = \pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

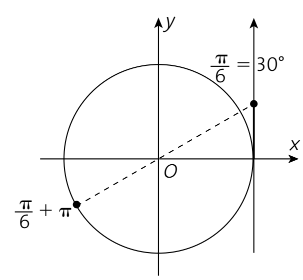
e)



$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $3 \cdot \tan 2x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 3 \cdot \tan 2x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



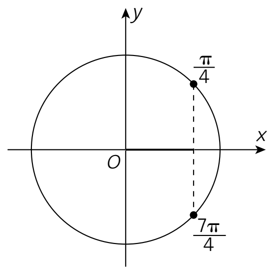
$2x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}$

Para:

- $k = 0$: $x = \dfrac{\pi}{12}$
- $k = 1$: $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{6\pi}{12} = \dfrac{7\pi}{12}$
- $k = 2$: $x = \dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{13\pi}{12}$
- $k = 3$: $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{18\pi}{12} = \dfrac{19\pi}{12}$
- $k = 4$: $x = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi = \dfrac{25\pi}{12}$
- $k = 5$: $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{30\pi}{12} = \dfrac{31\pi}{12}$
- $k = 6$: $x = \dfrac{\pi}{12} + 3\pi$ (não serve)

$S = \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{19\pi}{12}, \dfrac{25\pi}{12}, \dfrac{31\pi}{12}\right\}$

g) $\sec 2x = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos 2x} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \dfrac{7\pi}{8} + k\pi$

$S = \left\{\dfrac{-15\pi}{8}, \dfrac{-9\pi}{8}, \dfrac{-7\pi}{8}, \dfrac{-\pi}{8}, \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{15\pi}{8}\right\}$

h) $\csc\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 3$

Como sen $\alpha \in [-1, 1]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $S = \varnothing$.

23. a) $\cos x \cdot (2 \cdot \operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

b) $\operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \pi\right\}$

c) $\tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$ ou $\tan x = -\sqrt{3}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

d) Fazendo sen $x = t$, temos:

$2t^2 + t - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(2)(-1) = 9$

$t = \dfrac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$ ou $t = -1$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ ou $\operatorname{sen} x = -1$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

e) $2 \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \cos x \cdot \left(2 \cdot \cos x - \sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = 0$ ou $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

f) $4 \cdot \cos x + 3 \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 8 \Rightarrow 4 \cdot \cos^2 x + 3 = 8 \cdot \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot \cos^2 x - 8 \cdot \cos x - 3 = 0$

Fazendo $\cos x = t$, temos $4t^2 - 8t + 3 = 0$.

$\Delta = 64 - 4(4)(3) = 64 - 48 = 16$

$t = \dfrac{8 \pm 4}{8} \Rightarrow t = \dfrac{3}{2}$ ou $t = \dfrac{1}{2}$

• $\cos x = \dfrac{3}{2}$ (impossível)

ou

• $\cos x = \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

24. a) $\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou

$x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x$

$\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = -2 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\cot x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

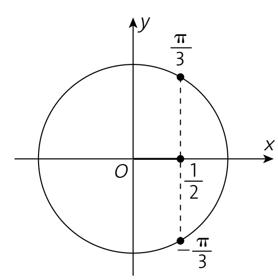
25. Fazendo sen $x = t$, vem:

$t = 1 + t^2 \Rightarrow t^2 - t + 1 = 0$

$\Delta = -3\ (\Delta < 0)$

Logo, a equação não tem solução nos números reais, $S = \varnothing$.

26. $2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \geq \dfrac{1}{2}$



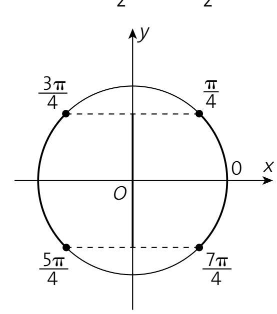
Então:

$-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x + \dfrac{\pi}{3} \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant 2k\pi \Rightarrow -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

27. $|\operatorname{sen} x| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi\right\}$

28. $\dfrac{\text{sen } x}{\text{csc } x - \cot x} = \dfrac{\text{sen } x}{\dfrac{1}{\text{sen } x} - \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x} =$

$= \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$

29. • $x = 1$

$1 = 4 + 3\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{3}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

$2t + \dfrac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi \Rightarrow 2t = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

• $x = 7$

$7 = 4 + 3\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{3}{3} \Rightarrow \cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

$2t + \dfrac{\pi}{2} = 2k\pi \Rightarrow 2t = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow t = \dfrac{3\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = \pi$

Resposta: alternativa **b**.

Pensando no Enem

1. Pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 50^2 + 100^2 - 2 \cdot 50 \cdot 100 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 2500 + 10\,000 - 2 \cdot 5000 \cdot \dfrac{1}{2} = 7500 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{7500} = 50\sqrt{3}$ m

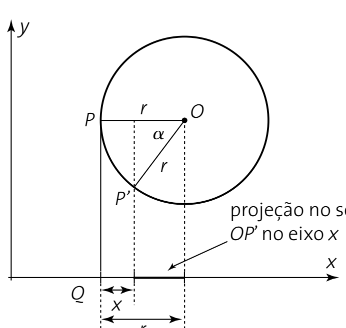
Logo:

perímetro $= 50 + 100 + 50\sqrt{3} \simeq 236{,}6$ m

Resposta: alternativa **b**.

2. Se o ponto P percorre uma distância menor d que o raio, ela gira menos de 1 radiano, sendo o valor em radianos dado por $\alpha = \dfrac{d}{r}$.

O valor percorrido por Q no eixo x é a diferença entre o valor do raio e o valor da projeção do segmento OP' no eixo x.



Observe no desenho que essa projeção é dada por $r \cdot \cos \alpha$.

Assim:

$x = r - r \cdot \cos \alpha = r \cdot (1 - \cos \alpha) = r\left(1 - \cos \dfrac{d}{r}\right)$

Resposta: alternativa **b**.

3. A função $r(t) = \dfrac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot \cos(0{,}06t)}$ depende da variação de $\cos(0{,}06t)$, cujo máximo valor é 1 e mínimo valor é -1. Assim, temos que esses extremos são:

$r(t) = \dfrac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot 1} = \dfrac{5\,865}{1{,}15} = 5\,100$ km

$r(t) = \dfrac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot (-1)} = \dfrac{5\,865}{0{,}85} = 6\,900$ km

Somando os dois valores, temos:

$5\,100 + 6\,900 = 12\,000$ km

Resposta: alternativa **b**.

4. Brasília: 3º quadrante.

Nova Iorque: 2º quadrante.

Sydney: 4º quadrante.

Tóquio: 1º quadrante.

Resposta: alternativa **d**.

5. O correto seria "tangente de Brasília" é um número positivo.

Resposta: alternativa **c**.

6. $x' = r(\cos(\alpha + \beta)) \Rightarrow$

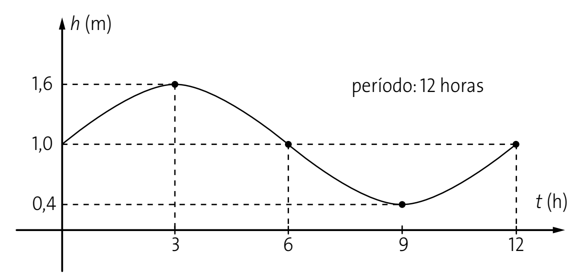
$\Rightarrow x' = r(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - r \cdot \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = x \cdot \cos \beta - y \cdot \text{sen } \beta$

Resposta: alternativa **b**.

7. Um gráfico aproximado para a maré é:



Uma função para o gráfico é $h(t) = a + b \cdot \text{sen}(ct)$, com $a = 1{,}0$ (valor médio), $b = 0{,}6$ (amplitude) e $\dfrac{2\pi}{|c|} = 12 \Rightarrow |c| = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$.

Como $b > 0$, devemos ter $c > 0$ para que a função comece crescente, então $c = \dfrac{\pi}{6}$.

Assim, $h(t) = 1 + 0{,}6\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$.

Às 9h, a altura da maré é de 0,4 m e, após esse horário, ela aumentará. Procuramos, então, a primeira raiz da equação

$1 + 0{,}6\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = 0{,}7$ após às 9h:

$0{,}6\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = -0{,}3 \Rightarrow \text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi$

Da segunda expressão, multiplicando os dois membros por $\dfrac{6}{\pi}$, vem $t = 11 + 12k$. Com $k = 0$, temos $t = 11$ horas.

Resposta: alternativa **d**.

Vestibulares de Norte a Sul

1. $\dfrac{1000}{\text{sen } 70°} = \dfrac{BC}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \dfrac{1\,000}{0{,}94} = \dfrac{BC}{0{,}5} \Rightarrow BC = \dfrac{500}{0{,}94} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 531$ m

$\dfrac{DC}{\text{sen } 80°} = \dfrac{BC}{\text{sen } 90°} \Rightarrow \dfrac{DC}{0{,}985} = \dfrac{531}{1} \Rightarrow DC = 531 \cdot 0{,}985 \Rightarrow$

$\Rightarrow DC \simeq 524$ m

Resposta: alternativa **a**.

2. Do gráfico, temos $f(0) = 5$. Do enunciado, $f(\pi) = 5$.
Novamente observando o gráfico, temos que em $x + \pi$ completa-se um período. Então, o período deste gráfico é π, e assim:
$f(3\pi) = f(\pi) = f(0) = 5$.
Resposta: alternativa **b**.

3. $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} + \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x + 1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \operatorname{sen} x)\cos x} =$

$= \dfrac{2 + 2\operatorname{sen} x}{(1 + \operatorname{sen} x)\cos x} = \dfrac{2\cancel{(1 + \operatorname{sen} x)}}{\cancel{(1 + \operatorname{sen} x)}\cos x} = \dfrac{2\cancel{(1 + \operatorname{sen} x)}}{\cancel{(1 + \operatorname{sen} x)}\cos x} =$

$= \dfrac{2}{\cos x} = 2 \sec x$

Resposta: alternativa **a**.

4. $\dfrac{200}{\operatorname{sen} 45°} = \dfrac{AB}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \dfrac{200}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \dfrac{AB}{\frac{1}{\cancel{2}}} \Rightarrow AB = \dfrac{200 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 100\sqrt{2}$

Resposta: alternativa **d**.

5. $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{12}$, ou seja, no ponto médio ente L e A.
Resposta: alternativa **a**.

6. $P(t) = 96 + 19\cos(2\pi t)$, $t \geqslant 0$
a) valor máximo: $96 + 18 = 114$ (verdadeiro)
b) valor mínimo: $a - b = 96 - 18 = 78$ (verdadeiro)
c) $p = \dfrac{2\pi}{|c|} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1\text{s}$ (verdadeiro)
d) $p\left(\dfrac{1}{3}\right) = 96 + 18 \cdot \cos \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow p\left(\dfrac{1}{3}\right) = 96 + 18 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 87$ (falso)
e) falso

7. $\tan \alpha = \dfrac{6}{PQ}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{24}{PQ}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$\dfrac{24}{PQ} = \dfrac{2 \cdot \frac{6}{PQ}}{1 - \frac{36}{PQ^2}} \Rightarrow \dfrac{24}{PQ} = \dfrac{\frac{12}{PQ}}{\frac{PQ^2 - 36}{PQ^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{24}{PQ} = \dfrac{12PQ}{PQ^2 - 36} \Rightarrow 12PQ^2 - 24PQ^2 + 24 \cdot 36 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -12PQ^2 + 24 \cdot 36 = 0 \Rightarrow PQ^2 - 72 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \simeq 8{,}5$

Resposta: alternativa **a**.

8. $BA^2 = 70^2 + 100^2 - 2 \cdot 70 \cdot 100 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow BA^2 = 4900 + 10000 - 14000\cos \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow BA = \sqrt{14\,900 - 14\,000\cos \alpha}$ cm

9. $360° - 320° = 40°$
Resposta: alternativa **d**.

10. $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$ $(150° \in 2^{\text{o}}\text{ Q})$

$\cos 135° = \cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(135° \in 2^{\text{o}}\text{ Q})$

$\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\dfrac{1}{2}$ $(210° \in 3^{\text{o}}\text{ Q})$

1) Correto

$\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-2) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$

2) Correto, pois $\cos x$ é função par.
3) Correto, pois se $\operatorname{sen} y \leqslant 1$ e $\cos x \leqslant 1$, e x e y são independentes, então $\operatorname{sen} y + \cos x \leqslant 2$.

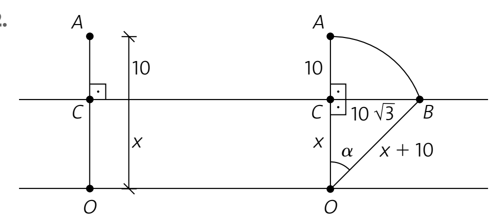
11. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$= \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} =$

$= \dfrac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

Resposta: alternativa **d**.

12.



a) Seja x a profundidade do lago. No $\triangle OBC$ da figura, temos:
$(x + 10)^2 = x^2 + (10\sqrt{3})^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + 20x + 100 = \cancel{x^2} + 300 \Rightarrow$
$\Rightarrow 20x = 200 \Rightarrow x = 10$ cm

b) No $\triangle OBC$ temos:

$\tan \alpha = \dfrac{10\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \tan \alpha = \dfrac{10\sqrt{3}}{10} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$ rad

Então:

$m(\widehat{AB}) = \dfrac{\pi}{3} \cdot 10 = \dfrac{10\pi}{3}$ cm

13. Pelo gráfico $V(t) = a + b\operatorname{sen}(ct)$
$a = 0$, $b = 0{,}6$
Dados: $p = 5$

$\dfrac{2\pi}{|c|} = 5 \Rightarrow c = \dfrac{2\pi}{5}$

$V(t) = 0{,}6 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right)$

Resposta: alternativa **d**.

15. $\cos \theta = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \dfrac{9}{16} - \dfrac{7}{16} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$

Resposta: alternativa **e**.

16. $\tan 15° = \tan(60° - 45°) = \dfrac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 45°} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

$\dfrac{11{,}7}{x} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}3 \Rightarrow x = \dfrac{11{,}7}{0{,}3} = 39$

Resposta: alternativa **e**.

17. $x + y + 8 = 20 \Rightarrow y = 12 - x$ (I)
$y^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60° \Rightarrow y^2 = x^2 + 64 - \cancel{2} \cdot 8 \cdot x \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 = x^2 + 64 - 8x$ (II)

Substituindo I em II:

$(12 - x)^2 = x^2 + 64 - 8x \Rightarrow 144 - 24x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 64 - 8x \Rightarrow$

$\Rightarrow 80 = 16x \Rightarrow x = \dfrac{80}{16} = 5$ m

$y = 7$ m

Resposta: alternativa **b**.

18. Adotando $\pi = 3{,}14$ temos:

$\dfrac{360°}{\alpha} = \dfrac{2\pi}{1} \Rightarrow \alpha = \dfrac{360°}{2 \cdot 3{,}14} \simeq 57{,}32°$

Resposta: alternativa **b**.

19. $f(t) = 18{,}8 - 1{,}3 \text{ sen}\left(\dfrac{2\pi}{365}t\right)$

1) $p = \dfrac{2\pi}{|c|} = 2\pi : \dfrac{2\pi}{365} \Rightarrow p = 365$ dias (falso)

2) $\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{365}t\right) = 1$

$\dfrac{2\pi}{365}t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{365}{4} = 91{,}25$ dias (3,04 meses)

Mês atual (verdadeiro)

3) $f(91{,}25) = 18{,}8 - 1{,}3 = 17{,}5$ horas

17h 30 min (verdadeiro)

Resposta: alternativa **d**.

20. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{4}{9} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{4}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ($x \in$ 2º quadrante)

Logo:

$$\frac{\tan x + \cot x}{\sec x + \csc x} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}}{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\text{sen}\,x}} = \frac{\dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x\,\text{sen}\,x}}{\dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{\cos x\,\text{sen}\,x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos x\,\text{sen}\,x} \cdot \frac{\cos x\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x + \cos x} = \frac{1}{\text{sen}\,x + \cos x} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{3}{(2 - \sqrt{5})} \cdot \frac{(2 + \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})} = \frac{3(2 + \sqrt{5})}{4 - 5} =$$

$$= -3(2 + \sqrt{5})$$

Resposta: alternativa **d**.

Para refletir

Página 57

$x = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow \text{sen}\,x + \cos x = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} + \cos\dfrac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$

$x = \dfrac{\pi}{4} \rightarrow \text{sen}\,x + \cos x = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} =$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Página 58

- a) $\cos(60° + 30°) = \cos 90° = 0$

$\cos 60° + \cos 30° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$

b) $\tan(60° - 30°) = \tan 30° = \dfrac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan 60° - \tan 30° = \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{sen}(90° + 0°) = 1$

$\text{sen}\,90° + \text{sen}\,0° = 1 + 0 = 1$

$\tan 15° \simeq 0{,}325$

$\tan 20° \simeq 0{,}364$

$\tan 25° \simeq 0{,}466$

$x \simeq 18°$

Unidade 2

Capítulo 5

4. a) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$a_{11} = 1^2 + 1^2 = 2$

$a_{12} = 1^2 + 2^2 = 5$

$a_{13} = 1^2 + 3^2 = 10$

$a_{21} = 2^2 + 1^2 = 5$

$a_{22} = 2^2 + 2^2 = 8$

$a_{23} = 2^2 + 3^2 = 13$

A matriz pedida é $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}$.

b) $X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$

$a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ $\quad a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

$a_{21} = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ $\quad a_{22} = 2 \cdot 4 - 2 = 6$

$a_{31} = 2 \cdot 9 - 1 = 17$ $\quad a_{32} = 2 \cdot 9 - 2 = 16$

$a_{41} = 2 \cdot 16 - 1 = 31$ $\quad a_{42} = 2 \cdot 16 - 2 = 30$

A matriz pedida é $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \\ 17 & 16 \\ 31 & 30 \end{bmatrix}$.

5. a) $a_{11} = 4(1) - 2(1) + 3 = 4 - 2 + 3 = 5$

$a_{12} = 4(1) - 2(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$

$a_{21} = 4(2) - 2(1) + 3 = 8 - 2 + 3 = 9$

$a_{22} = 4(2) - 2(2) + 3 = 8 - 4 + 3 = 7$

A matriz pedida é $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$.

b) $a_{11} = 1^3 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$a_{12} = 1^3 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$

$a_{13} = 1^3 - 2 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$

$a_{21} = 2^3 - 2 \cdot 1 = 8 - 2 = 6$

$a_{22} = 2^3 - 2 \cdot 2 = 8 - 4 = 4$

$a_{23} = 2^3 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2$

$a_{31} = 3^3 - 2 \cdot 1 = 27 - 2 = 25$

$a_{32} = 3^3 - 2 \cdot 2 = 27 - 4 = 23$

$a_{33} = 3^3 - 2 \cdot 3 = 27 - 6 = 21$

A matriz pedida é $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 25 & 23 & 21 \end{bmatrix}$.

6. $3 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = 30 - 12 = 18$

7.
- $2b = 6 \Rightarrow b = 3$
- $a + b = 9 \Rightarrow a + 3 = 9 \Rightarrow a = 6$
- $b + c = -1 \Rightarrow 3 + c = -1 \Rightarrow c = -4$
- $2a - 3d = 18 \Rightarrow 12 - 3d = 18 \Rightarrow -3d = 6 \Rightarrow d = -2$

9. $\begin{bmatrix} m + n & m \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow m = 0$ e $n = 1$

10. $\begin{bmatrix} a + b - 1 & 0 \\ a - 3c & b \\ 2b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = 0$

- $a + b - 1 = a + 0 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$
- $a - 3c = 1 - 3c = 0 \Rightarrow -3c = -1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{3}$

Portanto, $a = 1$, $b = 0$ e $c = \dfrac{1}{3}$.

11. $\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\\7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$

12. $a_{11} = 1 + 2 = 3$ $\quad a_{12} = 0$
$a_{21} = 2 + 2 = 4$ $\quad a_{22} = 2 + 4 = 6$

Portanto, $A = \begin{bmatrix}3 & 0\\4 & 6\end{bmatrix}$.

$b_{11} = 1^3 = 1$ $\quad b_{12} = 0$
$b_{21} = 2^3 = 8$ $\quad b_{22} = 2^3 = 8$

Portanto, $B = \begin{bmatrix}1 & 0\\8 & 8\end{bmatrix}$.

$A + B = \begin{bmatrix}3 & 0\\4 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\8 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\12 & 14\end{bmatrix}$

$B + A = \begin{bmatrix}1 & 0\\8 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\12 & 14\end{bmatrix}$

13. $a_{11} = 3 - 2 = 1$
$a_{21} = 6 - 2 = 4$
$a_{12} = 3 - 4 = -1$
$a_{22} = 6 - 4 = 2$

Portanto, $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\4 & 2\end{bmatrix}$.

$b_{11} = 1^2 = 1$
$b_{21} = 4^2 = 16$
$b_{12} = (-1)^2 = 1$
$b_{22} = 2^2 = 4$

Portanto $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\16 & 4\end{bmatrix}$.

a) $A - B = \begin{bmatrix}1 & -1\\4 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\16 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\-12 & -2\end{bmatrix}$

b) $A + B = \begin{bmatrix}1 & -1\\4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\16 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\20 & 6\end{bmatrix}$

14. $a_{11} = 2(1) + 3(1) - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$
$a_{12} = 2(1) + 3(2) - 5 = 2 + 6 - 5 = 3$
$a_{21} = 2(2) + 3(1) - 5 = 4 + 3 - 5 = 2$
$a_{22} = 2(2) + 3(2) - 5 = 4 + 6 - 5 = 5$

$A = \begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix}0 & -3\\-2 & -5\end{bmatrix}$

17. a) $A + B = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\5 & 0\end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -5\\-2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\1 & 4\end{pmatrix}$

c) $5A = 5\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 5\\15 & 10\end{pmatrix}$

d) $A^t = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$

e) $B^t = \begin{pmatrix}1 & 2\\5 & -2\end{pmatrix}$

f) $A^t + B = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 8\\3 & 0\end{pmatrix}$

g) $A + B^t = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\8 & 0\end{pmatrix}$

h) $3A^t = 3\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9\\3 & 6\end{pmatrix}$

i) $(5A - B)^t = \left(\begin{pmatrix}10 & 5\\15 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 5\\2 & -2\end{pmatrix}\right)^t =$

$= \left(\begin{pmatrix}9 & 0\\13 & 12\end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix}9 & 13\\0 & 12\end{pmatrix}$

j) $(3A)^t - 3A^t = \left(\begin{pmatrix}6 & 3\\9 & 6\end{pmatrix}\right)^t - 3\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}6 & 9\\3 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 9\\3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

k) $-\left(A^t + B^t\right) = -\left(\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix}3 & 5\\6 & 0\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}-3 & -5\\-6 & 0\end{pmatrix}$

18. a) $a_{11} = 1 + 1 = 2$
$a_{12} = 0$
$a_{13} = 0$
$a_{21} = 0$
$a_{22} = 2 + 2 = 4$
$a_{23} = 0$
$a_{31} = 0$
$a_{32} = 0$
$a_{33} = 3 + 3 = 6$

$A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

b) $A + I_3 = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 7\end{bmatrix}$

c) $A + 0_3 = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

d) $3A = 3\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 12 & 0\\0 & 0 & 18\end{bmatrix}$

e) $A^t = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

f) $A + A^t = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & 0 & 12\end{bmatrix}$

g) $A - A^t = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

h) $2A + 3A^t - I_3 =$

$= 2\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$

$= \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & 0 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 12 & 0\\0 & 0 & 18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$

$= \begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 20 & 0\\0 & 0 & 30\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 19 & 0\\0 & 0 & 29\end{bmatrix}$

19. a) $A^t = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^t\right)^t = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = A$

b) • $A + B = \begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow (A + B)^t = \begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}$

• $A^t + B^t = \begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&4\\2&6\end{pmatrix}$

Logo, $(A+B)^t = A^t + B^t$.

c) • $2A = \begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix} \Rightarrow (2A)^t = \begin{pmatrix}2&6\\4&8\end{pmatrix}$

• $A^t = \begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} \Rightarrow 2A^t = \begin{pmatrix}2&6\\4&8\end{pmatrix}$

Portanto, $(2A)^t = 2A^t$.

d) • $(A-B)^t = \begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}$

• $A^t - B^t = \begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}$

Logo, $(A-B)^t = A^t - B^t$.

20. a) $A^t + B = \begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&5\\2&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&8\\3&0\end{pmatrix}$

b) $(5A-B)^t = \left(\begin{pmatrix}10&5\\15&10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&5\\2&-2\end{pmatrix}\right)^t =$

$= \left(\begin{pmatrix}9&0\\13&12\end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix}9&13\\0&12\end{pmatrix}$

21. c) $A + B = \begin{pmatrix}23&21\\28&36\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}67&89\\122&104\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}90&110\\150&140\end{pmatrix}$

Total de *downloads* dos dois jogos nos dois dias.

d) $B - A = \begin{pmatrix}67&89\\122&104\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}23&21\\28&36\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}44&68\\94&68\end{pmatrix}$

Quantidade de *downloads* que foi feita a mais no dia 24 de outubro.

e) $10\% \rightarrow 0{,}10 = 0{,}1$

$C = 0{,}1 \cdot (A + B)$

23. a) $AB = \begin{bmatrix}1&3\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-1\\1&2\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}1\cdot 4 + 3\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 2\\ 0\cdot 4 + (-2)\cdot 1 & 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7&5\\-2&-4\end{bmatrix}$

b) $BA = \begin{bmatrix}4&-1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&-2\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}4\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 4\cdot 3 + (-1)\cdot(-2)\\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&14\\1&-1\end{bmatrix}$

24. $\begin{pmatrix}4&1\\8&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&5\\12&-20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

25. a) $AB = AB$. Falso, pois temos $AB \neq BA$ no exercício 23.

b) Falso, pois no exercício 24 temos $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0$.

26. a) $\begin{pmatrix}2&3\\5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\5&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19&9\\15&16\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11&4\\8&3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}5&4\\7&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&10\\-1&14\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}19&9\\15&16\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11&4\\8&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8&5\\7&13\end{pmatrix}$

28. a) $A \cdot I_2 = \begin{bmatrix}4&1\\6&-2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&1\\6&-2\end{bmatrix} = A$

b) $I_2 \cdot A = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4&1\\6&-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&1\\6&-2\end{bmatrix} = A$

30. $\begin{pmatrix}2&3&4\\4&6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30&20\\25&18\\20&15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}215&154\\430&308\end{pmatrix}$

Portanto, são necessários 215 eixos para janeiro e 154 para fevereiro, 430 rodas para janeiro e 308 para fevereiro.

31. a) $18 - 8 = 10$

b) $-6 - (-8) = -6 + 8 = 2$

c) $30 - 30 = 0$

d) $a(a + b) - b(a + b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$

e) $\text{sen}\, x \cdot \cos y + \text{sen}\, y \cdot \cos x = \text{sen}\,(x + y)$

f) $\cos^2 a - \text{sen}^2\, b$

32. a) $\left|\begin{array}{ccc|cc}3&2&-1&3&2\\5&0&4&5&0\\2&-3&1&2&-3\end{array}\right| = 16 + 15 + 36 - 10 = 57$

b) $\left|\begin{array}{ccc|cc}2&1&-2&2&1\\3&-1&0&3&-1\\4&1&-3&4&1\end{array}\right| = \cancel{6} - \cancel{6} - 8 + 9 = 1$

c) $\left|\begin{array}{ccc|cc}a&0&0&a&0\\0&b&a&0&b\\0&1&1&0&1\end{array}\right| = ab - a^2$

d) $\left|\begin{array}{ccc|cc}3&5&-1&3&5\\0&4&2&0&4\\0&0&-2&0&0\end{array}\right| = -24$

e) $\left|\begin{array}{ccc|cc}3&0&8&3&0\\0&7&7&0&7\\4&9&0&4&9\end{array}\right| = -224 - 189 = -413$

f) $\left|\begin{array}{ccc|cc}0&0&5&0&0\\8&10&3&8&10\\0&7&4&0&7\end{array}\right| = 280$

33. $\left|\begin{array}{ccc|cc}1&\sec^2 x&\csc^2 x&1&\sec^2 x\\ \text{sen}^2\, x&1&1&\text{sen}^2\, x&1\\ \cos^2 x&\tan^2 x&\cot^2 x&\cos^2 x&\tan^2 x\end{array}\right| = \cot^2 x + \sec^2 x \cdot \cos^2 x +$

$+ \csc^2 x \cdot \text{sen}^2\, x \cdot \tan^2 x - \cos^2 x \cdot \csc^2 x - \tan^2 x - \cot^2 x \cdot \text{sen}^2\, x \cdot \sec^2 x =$

$= \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2\, x} + \cancel{\dfrac{1}{\cos^2 x}} \cdot \cancel{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\cancel{\text{sen}^2\, x}} \cdot \cancel{\text{sen}^2\, x} \cdot \dfrac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x} +$

$- \cos^2 x \cdot \dfrac{1}{\text{sen}^2\, x} - \dfrac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2\, x} \cdot \text{sen}^2\, x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} =$

$= \cancel{\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2\, x}} + \cancel{1} + \cancel{\dfrac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x}} - \cancel{\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2\, x}} - \cancel{\dfrac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x}} - \cancel{1} = 0$

34. a) $A + B = \begin{bmatrix}-1&3\\2&-8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2&-1\\3&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\5&-8\end{bmatrix}$

b) $A^t = \begin{bmatrix}-1&3\\2&-8\end{bmatrix}$

c) $A \cdot B = \begin{bmatrix}-1&3\\2&-8\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2&-1\\3&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2+9&1+0\\4-24&-2+0\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}7&1\\-20&-2\end{bmatrix}$

d) $\det A = \begin{vmatrix}-1&3\\2&-8\end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$

e) $\det A^t = \begin{vmatrix}-1&2\\3&-8\end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$

f) $\det B = \begin{bmatrix}2&-1\\3&0\end{bmatrix} = 0 + 3 = 3$

g) $\det (A + B) = \begin{vmatrix}1&2\\5&8\end{vmatrix} = -8 - 10 = -18$

h) $\det A + \det B = 2 + 3 = 5$

i) $\det (AB) = \det\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -20 & -2 \end{vmatrix} = -14 + 20 = 6$

j) $\det A \cdot \det B = 2 \cdot 3 = 6$

35. $AB = \begin{bmatrix} -5 & -20 \\ 12 & 56 \end{bmatrix} \Rightarrow \det (AB) = -280 + 240 = -40$

36. a) $5(x - 2) - 18 = 2 \Rightarrow 5x - 10 = 20 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & x \end{matrix} = -6 + 6x + 4 - 2x^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x^2 + 6x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(1)(2) = 1$

$x = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = 1$

$S = \{1, 2\}$

37. a) $\det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

b) $\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 1$

38. a) $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 8 & 5 \end{matrix} = -24 + 16 + 30 + 24 - 30 - 16 = 0$

c) $\det D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} = 0$

d) $\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{matrix} = 24 - 12 - 16 + 16 + 12 - 24 = 0$

39. a) $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 5 \cdot 2 = 10$

b) $\det (A^2) = \det A \cdot \det A = 5 \cdot 5 = 25$

c) $\det (B)^3 = \det B \cdot \det B \cdot \det B = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

40. $A \cdot I = A \Rightarrow \det (AI) = \det A \Rightarrow \det A \cdot \det I = \det A \Rightarrow \det I = 1$

41. a) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 4 = 14$

Sim, pois $\det A \neq 0$.

b) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

Não, pois $\det A = 0$.

c) $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{matrix} = 6 + 0 - 8 + 10 - 2 + 0 = 6$

Sim, pois $\det A \neq 0$.

42. A e B são matrizes de ordem 3.

Se $B = A^{-1}$, então: $AB = A \cdot A^{-1} = I_3$.

43. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2b & c + 2d \\ a + 3b & c + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ \underline{a + 3b = 0} \end{cases} -$

$-b = 1 \Rightarrow b = -1$

$a = 3$

$\begin{cases} c + 2d = 1 \\ \underline{c + 3d = 0} \end{cases} -$

$-d = -1 \Rightarrow d = 1$

$c = -1$

$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A \cdot A^{-1} = I_2$, então $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

44. a) $\det A = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$

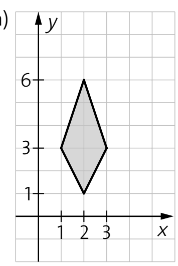
b) $\det A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$

c) $\det (A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

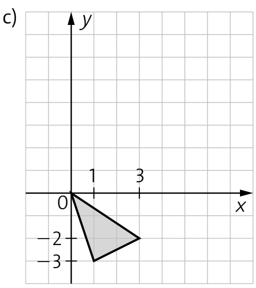
45. $\det (A \cdot A^{-1}) = \det I \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = \det I \Rightarrow 3 \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{3}$

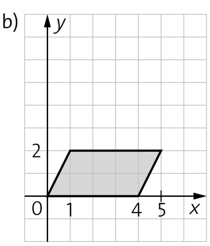
48. a)



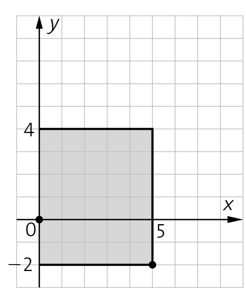
c)



b)



d)



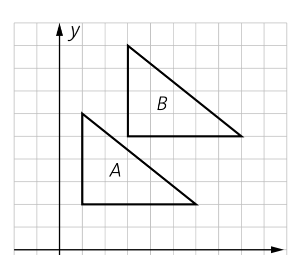
49. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ → movemos 2 unidades à direita ao longo do eixo x, e depois → movemos 3 unidades para cima ao longo do eixo y.

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ → movemos 3 unidades à direita ao longo do eixo x, e depois → movemos 1 unidades para baixo ao longo do eixo y.

c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ → movemos 8 unidades à esquerda ao longo do eixo x, e depois → movemos 1 unidades para baixo ao longo do eixo y.

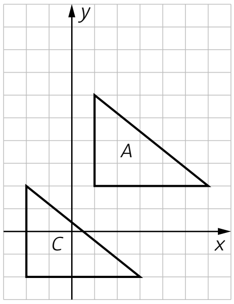
d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ → movemos 2 unidades à esquerda ao longo do eixo x, e depois → movemos 2 unidades para cima ao longo do eixo y.

50. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$



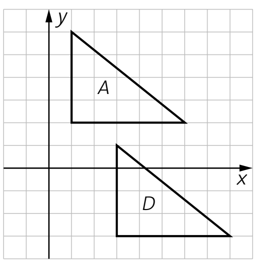
b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$



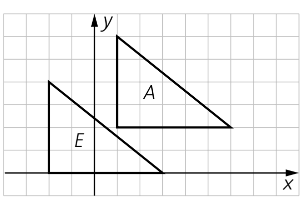
c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

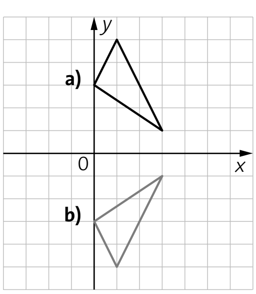


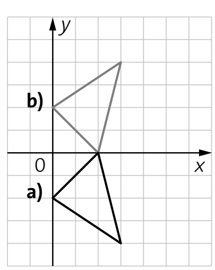
d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix};$

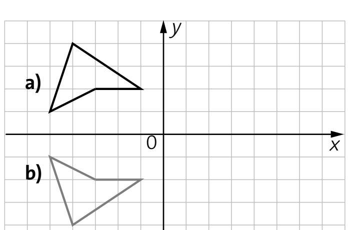
$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$



51.







c) Matrizes associadas às figuras refletidas:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

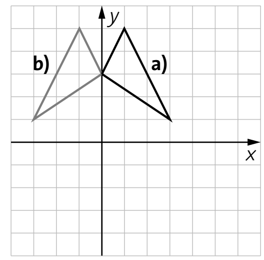
Multiplicando pela matriz dada:

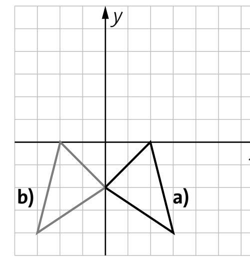
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

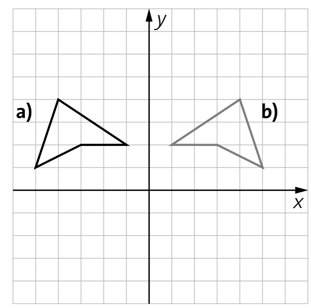
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

52.







c) Matrizes associadas às figuras refletidas:

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

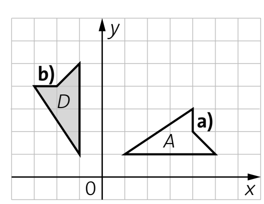
Multiplicando pela matriz dada:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

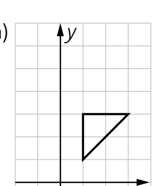
53.

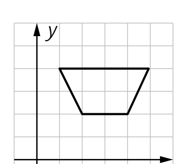


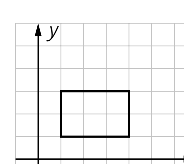
c) $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen}\, 90° \\ \text{sen}\, 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

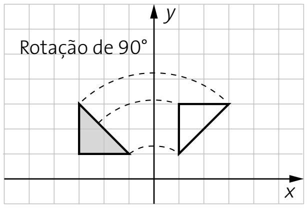
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

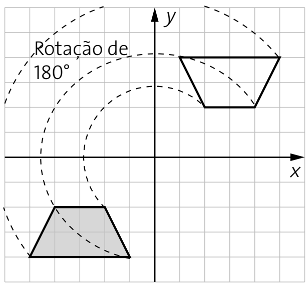
54. a)

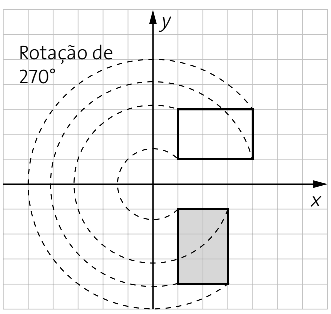






b) 

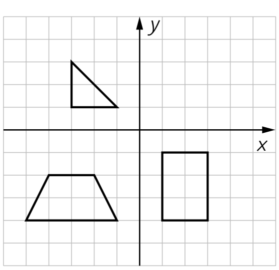




c) Matriz associada de A': $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz associada de B': $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Matriz associada de C': $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$



d) $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$

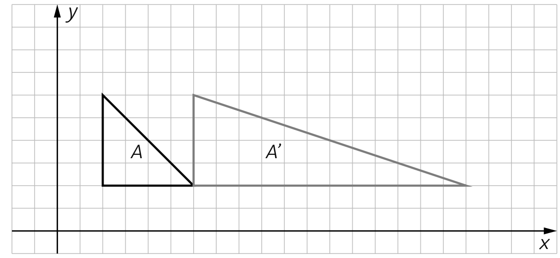
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

55. 

Neste caso, a matriz de transformação escala é dada por:

$\begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

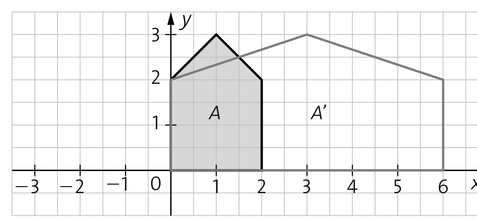
$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 18 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

56. a) Área de A: 4 unidades de área

b) Matriz associada à figura A: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Para A:

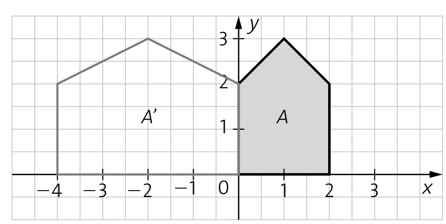
$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$



Área de A': 12 unidades de área

Para B:

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$



Área de B': 8 unidades de área

c) A transformação A "espichou" a figura A na direção positiva do eixo O_x, segundo um fator 3. A transformação B "espichou" a figura A na direção negativa do eixo O_x, segundo um fator -2.

58. Depois de explorarem vários exemplos, os alunos poderão concluir que:

a) Ela fica "espichada" ("esticada") na direção positiva do eixo O_x se k é positivo e na direção negativa do eixo O_x se k é negativo.

b) A área de uma figura transformada é k vezes a área da figura inicial.

Outros contextos

3. Século XXI – de 2001 a 2100

O 1º ano bissexto desse século foi 2004 e o último será 2096. Observe que 2100, embora múltiplo de 4, não é bissexto. Como um século possui 25 múltiplos de 4 e o ano de 2100 não será bissexto, teremos nesse século 24 anos bissextos.

4. Calendário mulçumano calendário cristão

33 anos ———— 32 anos

2 013 anos ———— x $\Rightarrow x = 1952$

Como o calendário mulçumano começou no ano 622 da era cristã, o ano de 2013 da era mulçumana será no ano $(1952 + 622) = 2574$ da era cristã.

Resposta: alternativa **c**.

6. A data da Páscoa é calculada de acordo com o calendário lunar. Nesse calendário, o tempo é marcado de acordo com cada ciclo de fases da Lua (crescente, cheia, minguante, nova). Entre os judeus, que adotam um calendário lunissolar (no qual um ano normal pode ter 353, 354 ou 355 dias; há os anos embolísmicos, mais longos, com 383, 384 ou 385 dias), a Páscoa (*Pessach*) é a festa que comemora a fuga dos judeus do cativeiro no Egito; entre os cristãos, representa a ressurreição de Cristo. A Páscoa sempre acontece no primeiro domingo de Lua cheia depois do equinócio da primavera (hemisfério norte) ou do equinócio do outono (hemisfério sul). Acredita-se que suas origens sejam na verdade mais remotas (cultos relacionados à fertilidade e às colheitas), pois a Páscoa coincide com o equinócio da primavera no hemisfério norte, época em que a terra começa a ser preparada para o plantio depois do inverno. A partir dessa data, os dias são cada vez mais longos e iluminados no hemisfério norte, até culminar com o solstício de verão (o dia mais longo do ano, 21 de junho no hemisfério norte; no hemisfério sul, é o solstício de inverno, a noite mais longa do ano). Como a duração do ano nos calendários lunares e nos calendários solares não é igual, as datas calculadas em um calendário lunar podem não corresponder às datas de um calendário solar.

Capítulo 6

1. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} +$

$2x = 6 \Rightarrow x = 3$

$y = 2$

b) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 4y = 14 \quad \cdot \ (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -2x - 8y = -28 \end{cases}$

$-7y = -28 \Rightarrow y = 4$

$x = -2$

c) $\begin{cases} 20x + 10y = 10 \\ x + y = 2 \quad \cdot \ (-10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +20x + 10y = 10 \\ -10x - 10y = -20 \end{cases}$

$10x = -10 \Rightarrow x = -1$

$-1 + y = 2 \Rightarrow y = 3$

d) $\begin{cases} -x - y = -6 \quad \cdot \ (-2) \\ 2x - 3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -12 \\ +2x - 3y = -3 \end{cases}$

$-5y = -15 \Rightarrow y = 3$

$-x - 3 = -6 \Rightarrow x = 3$

3. a) $4(6) - 3(2) = 24 - 6 = 18$

$(6, 2)$ é uma solução da equação dada.

b) $2(3) + 3(-5) = 6 - 15 = -9 \neq 21$

$(3, -5)$ não é solução da equação dada.

4. a) $2(1) + 3 + 5(2) = 2 + 3 + 10 = 15$

É solução.

b) $2(0) + 7(0) - 3(0) = 0$

É solução.

5. $3(3) - 2(k) = 5 \Rightarrow 9 - 2k = 5 \Rightarrow -2k = -4 \Rightarrow k = 2$

6. $(k, 2, k + 1) \in 4x + 5y - 3z = 10$, então:

$4k + 10 - 3(k + 1) = 10 \Rightarrow 4k + \cancel{10} - 3k - 3 = \cancel{10} \Rightarrow k = 3$

7. a) $\begin{cases} 2 \cdot 3 - 5(-1) = 11 \\ 3 \cdot 3 + 6(-1) = 3 \end{cases}$

$(3, -1)$ é uma solução do sistema.

b) $\begin{cases} 0 + 0 + 0 = 0 \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \\ 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \end{cases}$

$(0, 0, 0)$ é uma solução do sistema.

c) $\begin{cases} 0 + 1 = 1 \\ 0 - 1 = -1 \\ 3 \cdot 0 + (-1) = 1 \end{cases}$

$(0, -1)$ não é solução do sistema.

8. a) $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ -4x - 2y = -10 \end{cases}$

$0 = -6$

O sistema é impossível, ou seja, $S = \varnothing$.

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \cdot (3) \\ 5x + 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 6y = -36 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$

$14x = -28 \Rightarrow x = -2$

$5(-2) + 6y = 8 \Rightarrow -10 + 6y = 8 \Rightarrow 6y = 18 \Rightarrow y = 3$

Logo, o sistema é possível e determinado e $S = \{(-2, 3)\}$.

c) $\begin{cases} 5x - 10y = 15 \cdot (2) \\ 2x - 4y = 6 \cdot (-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 20y = 30 \\ -10x + 20y = -30 \end{cases}$

$0 = 0$

Logo, o sistema é possível e indeterminado (possui infinitas soluções).

Fazendo $x = \alpha$, temos:

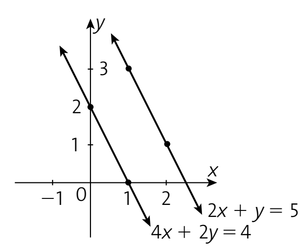
$2\alpha - 4y = 6 \Rightarrow -4y = -2\alpha + 6 \Rightarrow 4y = 2\alpha - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{2\alpha - 6}{4} = \dfrac{2(\alpha - 3)}{4} = \dfrac{\alpha - 3}{2}$

O par $\left(\alpha, \dfrac{\alpha - 3}{2}\right)$ é a solução geral do sistema.

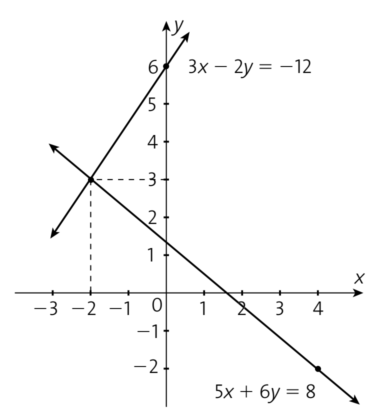
9. a) Representação gráfica:

$\begin{cases} 4x + 2y = 4 \rightarrow (1, 0), (0, 2), \ldots \\ 2x + y = 5 \rightarrow (1, 3), (2, 1), \ldots \end{cases}$



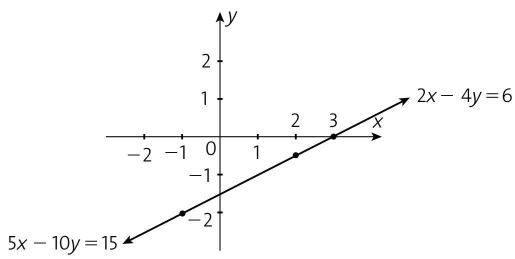
b) Representação gráfica:

$\begin{cases} 3x - 2y = -12 \rightarrow (0, 6), (-2, 3), \ldots \\ 5x + 6y = 8 \rightarrow (-2, 3), (4, -2), \ldots \end{cases}$



c) Representação gráfica:

$$\begin{cases} 5x - 10y = 15 \rightarrow \left(2, -\dfrac{1}{2}\right), (3, 0), ... \\ 2x - 4y = 6 \rightarrow (3,0), (-1,-2), ... \end{cases}$$



10. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 2 - 5 = -3$

det $\neq 0$ (Sistema determinado)

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 +$

$+ 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

det $= 0$ (Sistema não determinado)

11. $D = \begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 16 - m^2 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 16 \Rightarrow m \neq 4$ e $m \neq -4$

12. a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2$ e $x = 4 \rightarrow S = \{2, 4\}$

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4$ e $y = 2 \rightarrow S = \{2, 4\}$

Os sistemas são equivalentes.

b) $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y + 2z = 5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0, y = 5$ e $x = 5 \rightarrow S = \{0, 5, 5\}$

$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ x + y = 8 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 3$ e $z = 1 \rightarrow S = \{1, 3, 5\}$

Os sistemas não são equivalentes.

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0, y = 0$ e $x = 0 \rightarrow S = \{0, 0, 0\}$

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1$ e $z = -1 \rightarrow S = \{-1, 0, 1\}$

Os sistemas não são equivalentes.

13. a) Da 3ª equação, $z = -3$.

Na 2ª equação, temos:

$2y - (-3) = 1 \Rightarrow 2y = 1 - 3 \Rightarrow y = -1$

Na 1ª equação, temos:

$2x - (-1) + 3(-3) = 0 \Rightarrow 2x + 1 - 9 = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4$

Portanto, o sistema é possível e determinado e $S = \{(4, -1, -3)\}$.

b) Da 3ª equação já deduzimos que o sistema é impossível. Então, $S = \emptyset$.

c) O número de equações é menor do que o número de incógnitas. A incógnita livre é x_3. Fazemos $x_3 = k$, com $k \in \mathbb{R}$.

Da 2ª equação, temos:

$x_2 - k = 0 \Rightarrow x_2 = k$

Da 1ª equação, temos:

$3x_1 - 2k + k = 2 \Rightarrow 3x_1 = k + 2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{k+2}{3}$

O sistema é possível e indeterminado e a solução geral é $\left(\dfrac{k+2}{3}, k, k\right)$.

d) Da 4ª equação, $w = -2$.

Na 3ª equação, temos:

$-z - 2(-2) = 1 \Rightarrow -z + 4 = 1 \Rightarrow -z = -3 \Rightarrow z = 3$

Na 2ª equação, temos:

$y + 3 - 2 = 5 \Rightarrow y + 1 = 5 \Rightarrow y = 4$

Na 1ª equação, temos:

$x - 4 + 3 + 2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Portanto, o sistema é possível e determinado e $S = \{(-1, 4, 3, -2)\}$.

e) O número de equações é menor do que o número de incógnitas e as incógnitas livres são b e d. Fazemos $b = \alpha$ e $d = \beta$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Da 2ª equação, temos:

$c - \beta = 0 \Rightarrow c = \beta$

Da 1ª equação, temos:

$a + 2\alpha - \cancel{\beta} + \cancel{\beta} = 2 \Rightarrow a = 2 - 2\alpha$

O sistema é possível e indeterminado e a solução geral é $(2 - 2\alpha, \alpha, \beta, \beta)$.

f) Da 2ª equação, $y = \dfrac{1}{2}$. Substituindo na 1ª equação, temos:

$3x - 5 \cdot \dfrac{1}{2} = 6 \Rightarrow 3x = \dfrac{5}{2} + 6 \Rightarrow 3x = \dfrac{17}{2} \Rightarrow x = \dfrac{17}{6}$

Portanto, o sistema é possível e determinado e $S = \left\{\left(\dfrac{17}{6}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

14. $\begin{cases} x + \cancel{y} = 20 \\ x - \cancel{y} = 4 \end{cases}$

$2x = 24 \Rightarrow x = 12$

$12 + y = 20 \Rightarrow y = 8$

$\begin{cases} ax + 2y = 32 \\ 3x - by = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a + 2 \cdot 8 = 32 \\ 3 \cdot 12 - 8b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a = 32 - 16 \\ -8b = 20 - 36 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{4}{3}$ e $b = 2$

15. Sim, representam sistemas equivalentes, pois 2 retas concorrentes são a representação gráfica de sistemas determinados e o ponto em comum das retas concorrentes representa a solução do sistema. Observando os dois planos cartesianos, percebe-se que o ponto em comum nas duas situações é o mesmo, portanto representam sistemas com a mesma solução, e assim, são equivalentes.

Resolvido passo a passo

5. b) Uma coleção completa custa: $2 \cdot 60{,}90 + 2 \cdot 63{,}90 = 249{,}60$.

100 coleções completas custariam então

$100 \cdot 249{,}60 = 24\,960{,}00$.

Se a fatura vem no valor de 22 963,20 então o desconto é de $24\,960{,}00 - 22\,963{,}20 = 1\,996{,}8$.

Esse desconto em reais equivale a $\dfrac{1\,996{,}8}{24\,960{,}00} = 0{,}08 = 8\%$ de desconto.

16. a) $\begin{cases} x + 3y + z = 0 & \cdot(-3)\ \text{(I)} \\ 3x - 3y + z = 8 & \text{(II) Inverter (III) com (II)} \\ 2y + z = 0 & \text{(III)} \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2y + z = 0 & \cdot(-6) \\ -12y - 2z = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 4z = 8 \Rightarrow z = 2 \end{cases}$

$2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1$

$x + 3(-1) + 2 = 0$

$x = 1$

Sistema possível e determinado, com solução $(1, -1, 2)$.

b) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 & -2 \quad -1 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - 14z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -y - 9z = 0 \\ -2y - 18z = 0 \end{cases}$

Notamos que a 2ª e a 3ª equações são equivalentes, o que significa que temos duas equações e três incógnitas. Portanto, o sistema é possível e indeterminado. Fazendo $z = k$, temos:

$-y - 9k = 0 \Rightarrow y = -9k$

$x - 18k + 4k = 0 \Rightarrow x - 14k = 0 \Rightarrow x = 14k$

As soluções são do tipo $(14k, -9k, k)$.

c) $\begin{cases} x + y + z = 4 & \cdot(-2) \\ 2x + y - z = 10 \\ 2x - y - 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -y - 3z = 2 & \cdot(-3) \Rightarrow \\ -3y - 9z = -8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -y - 3z = 2 \\ 0z = -14 \end{cases}$

Absurdo $\rightarrow$ Sistema impossível, $S = \varnothing$

17. $\begin{cases} \left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + z &= 6 \end{aligned}\right\} \text{equivalentes} & \cdot(-3) \\ 3x + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow 0y = -1$

Sistema impossível, $S = \varnothing$

18. $\begin{cases} x + 4y + 7z = 2 & \cdot(-2)\ \cdot(-5) \\ 2x + 3y + 6z = 2 & + \quad + \\ 5x + y - z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y + 7z = 2 \\ -5y - 8z = -2 \Rightarrow \\ -19y - 36z = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 4y + 7z = 2 \\ 5y + 8z = 2 & (\cdot 19) \\ -19y - 36z = -2 & (\cdot 5)\ + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y + 7z = 2 \\ 5y + 8z = 2 \\ -28z = 28 \end{cases}$

$-28z = 28 \Rightarrow z = -1$

$5y + 8z = 2 \Rightarrow 5y - 8 = 2 \Rightarrow y = 2$

$x + 4y + 7z = 2 \Rightarrow x + 8 - 7 = 2 \Rightarrow x = 1$

A matriz procurada é $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + w = 2 \cdot (-1) & + \\ x + y + 2z + w = 3 \cdot (-1) & + \\ x + y + z + 2w = 4 \cdot (-1) & + \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ x - y = -1 \Rightarrow y = x + 1 \\ x - z = -2 \Rightarrow z = x + 2 \\ x - w = -3 \Rightarrow w = x + 3 \end{cases}$

$2x + y + z + w = 1 \Rightarrow 2x + x + \cancel{1} + x + 2 + x + 3 = \cancel{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1$

Logo, $y = 0, z = 1$ e $w = 2$.

$S = \{(-1, 0, 1, 2)\}$

20. x = distância de A até B

y = distância de B até C

z = distância de C até A

$\begin{cases} x + y = 1000 \text{ passos} \\ y + z = 800 \text{ passos} \\ z + x = 700 \text{ passos} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1000 - x \\ 1\,000 - x + z = 800 + \\ x + z = 700 \end{cases}$

$\overline{1000 + 2z = 1500 \Rightarrow z = 250}$

Substituindo o valor de z no sistema, temos $x = 450$ e $y = 550$.

Logo, a medida da pista será:

$x + y + z = 450 + 550 + 250 = 1250$ passos

Considerando que cada passo de Roberto mede 80 cm, temos:

1250 passos $\cdot$ 80 cm $= 100\,000$ cm $= 1000$ m

21. Sendo x as moedas de 1 real, y as moedas de 50 centavos e z as moedas de 10 centavos, temos:

$\begin{cases} x + y + z = 156 \\ 10x + 8y + 2z = 500 \\ x + 0{,}5y + 0{,}1z = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 156 & \cdot(-5) \\ 5x + 4y + z = 250 & \cdot(-2) \Rightarrow \\ 10x + 5y + z = 340 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 156 \\ -y - 4z = -530 & \cdot(-3) \Rightarrow \\ -3y - z = -160 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 156 \\ +y + 4z = 530 & \Rightarrow z = 130 \\ 11z = 1430 \end{cases}$

$y = 10$ e $x = 16$

Assim, são 16 moedas de 1 real, 10 moedas de 50 centavos e 130 moedas de 10 centavos.

22. Em $A \rightarrow x + 360 = 488 + y$

Em $B \rightarrow y + 416 = z + 384$

Em $C \rightarrow z + 312 = T + 480$

Em $D \rightarrow T + 512 = x + 248$

$x - y = 128$

$y - z = -32$

$z = 160 + 480 - 312 = 328$

$x = 160 + 512 - 248 = 424$

$y = x - 128 = 424 - 128 = 296$

$x = 424$

$y = 296$

$z = 328$

Resposta: alternativa **d**.

23. a) $\begin{cases} x = 3z \\ 3y = 2w \\ y = 2z \\ 4y = 8z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ 3y - 2w = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 4y - 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 6z - 2w = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ SPI

Se $z = \alpha$, temos $y = 2\alpha$, $w = 3\alpha$ e $x = 3\alpha$. Portanto, $S = \{(3\alpha, 2\alpha, \alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

b) Para $\alpha = 1$, temos $x = 3, y = 2, z = 1$ e $w = 3$. Logo, o menor número inteiro de átomos é: cálcio: 3; hidrogênio: 6; fósforo: 2; e oxigênio: 8.

24. Notando que o muro externo tem perímetro igual ao muro interno (m) mais 8L (2L por lado), podemos resolver o sistema deste modo:

$\begin{cases} m + 8L + m + L = 5320 \\ 2(m + 8L) + m + L = 8120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 9L = 5\,320 \\ 3m + 17L = 8\,120 \end{cases}$

Logo, $m = 2\,480$ e $L = 40$.

Resposta: alternativa **b**.

25. Temos o sistema:

$\begin{cases} 10x + 8y + 5z = 51 & \text{(I)} \\ 6x + 6y + 4z = 34 & \text{(II)} \\ 8x + 7y + 5z = 43 & \text{(III)} \end{cases}$

Fazendo I + II, vem:

$16x + 14y + 9z = 85$ IV

Fazendo IV $- 2 \cdot$ III, temos:

$$\begin{array}{r} 16x + 14y + 9z = 85 \\ -16x - 14y - 10z = -86 \\ \hline -z = -1 \Rightarrow z = 1 \end{array}$$

Substituindo $z = 1$ nas duas primeiras equações do sistema inicial, temos:

$$\begin{cases} 10x + 8y = 46 \\ 6x + 6y = 30 \div (6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 8y = 46 \\ x + y = 5 \quad \cdot(-10) \end{cases} + \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2y = -4 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$

O número de clientes idosos atendidos por dia é:

$8y + 6y + 7y = 21y = 21 \cdot 2 = 42$

Resposta: 42 idosos.

27. Sendo x, y e z as quantidades dos alimentos 1, 2 e 3, respectivamente, temos o sistema:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 30z = 100 & \cdot(-4) \quad \cdot(-2) \\ 40x + 40y + 10z = 210 & + \\ 20x + 10y + 30z = 110 & + \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x + 20y + 30z = 100 \\ -40y - 110z = -190 \div(-10) \\ -30y - 30z = -90 \div(-30) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x + 20y + 30z = 100 \\ 4y + 11z = 19 \\ y + z = 3 \quad \cdot(-4) + \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x + 20y + 30z = 100 \\ 7z = z \quad \Rightarrow z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

$y + z = 3 \Rightarrow y + 1 = 3 \Rightarrow y = 2$

$10x + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 100 \Rightarrow 10x = 30 \Rightarrow x = 3$

Como $y = 2$ e $z = 1$, a quantidade do ingrediente 2 é o dobro da quantidade do ingrediente 3.

Resposta: alternativa **c**.

28. a) $$\begin{cases} x - y + z = 0 \quad \cdot(-2) \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 5z = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y - z = 0 \\ y + 6z = 0 \end{cases}$$

$y + 6z = 0 \Rightarrow y = -6z$

$3(-6z) - z = 0 \Rightarrow -18z - z = 0 \Rightarrow -19z = 0 \Rightarrow z = 0$

$x = 0$

$y = 0$

SPD, $S = \{(0, 0, 0)\}$

b) $$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \quad (-1) \\ y + 5z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 5z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$5z = 0 \Rightarrow z = 0$

$x = 0$

$y = 0$

SPD, $S = \{(0, 0, 0)\}$

29. Significa que o sistema homogêneo nunca será impossível; ou ele será sistema possível e determinado ou sistema possível e indeterminado. Note que $x_i = 0\ \forall\ i$ é sempre solução do sitema homogêneo. A isso chamamos "solução trivial".

30. a) $$\begin{cases} x + y + z = 3 \quad -1 \\ x + 2y + 3z = 6 \quad 2 \\ 2x + 3y + 4z = a \quad -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \quad -1 \\ y + 2z = 12 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0 = 9 - a \end{cases}$$

$9 - a = 0 \Rightarrow a = 9 \rightarrow$ SPI

$9 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq 9 \rightarrow$ SI

b) $$\begin{cases} 2x + my = 3 \quad m \\ mx - 8y = 6 \quad -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + my = 3 \\ (16 + m^2)y = 3m - 12 \end{cases}$$

Como $16 + m^2 \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e determinado.

c) $$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \quad -2 \quad -3 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y + (\ - 2)z = 0 \quad -1 \\ -3y + (\ - 3)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y + (\ -2)z = 0 \\ -z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$

$-3y + (\ - 2)0 = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 0$

Portanto, o sistema é possível e determinado para qualquer valor de λ, admitindo apenas a solução trivial.

31. $$\begin{vmatrix} 2 & -a & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \cancel{2a} - \cancel{2a} - \cancel{4} - 1 + \cancel{4} + 4a^2 \neq 0$$

$4a^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq \frac{1}{4} \Rightarrow a \neq \frac{1}{2}$ ou $a \neq -\frac{1}{2}$

32. $$\begin{cases} -3x + 2y = 3 - k \\ 4x - 2z = 2 \\ -4y + 3z = 1 \end{cases} + \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 - k \quad \cdot(-4) \\ 4x - 2z = 2 \quad + \\ -4y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 - k \\ -8y + 6z = -18 + 4k \\ -4y + 3z = 1 \quad \cdot(-2) + \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 - k \\ -8y + 6z = -18 + 4k \\ 0 = -20 + 4k \end{cases}$$

$4k - 20 = 0 \Rightarrow 4k = 20 \Rightarrow k = 5$

33. $$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \quad \cdot(-3) \\ 3x + 4y + 3z = b \quad \cdot(2) \\ 5x + 7y + az = 8 \end{cases} + \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \quad \cdot(-5) \\ -y + 18z = 2b - 3 \\ 5x + 7y + az = 8 \quad \cdot(2) \end{cases} + \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ -y + 18z = 2b - 3 \quad \cdot(-1) \\ -y + (20 + 2a)z = 11 \end{cases} + \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ -y + 18z = 2b - 3 \\ (2a + 2)z = 14 - 2b \end{cases}$$

$2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$

$14 - 2b \neq 0 \Rightarrow 2b \neq 14 \Rightarrow b \neq 7$

34. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ porque a 1ª e a 2ª colunas são iguais. Logo, o sistema é indeterminado.

35. $\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ x + 2y - z = 3 \cdot (-2) \\ 7x + 4y + 3z = 13 \end{cases}$ $+$ $\cdot(-7) \Rightarrow$ $+$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ \quad -5y + \ 5z = a - 6 \cdot (-2) \\ -10y + 10z = -8 \end{cases}$ $+$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x - \ y + 3z = a \\ \quad -5y + 5z = a - 6 \\ \qquad\qquad 0 = 4 - 2a \end{cases}$

Como temos duas equações e três incógnitas, o sistema é possível e indeterminado ou impossível.

Para que seja indeterminado, devemos ter:

$4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$

Temos, então: $\begin{cases} 2x - \ y + 3z = 2 \\ \quad -5y + 5z = -4 \end{cases}$

Fazendo $z = k$, temos:

$-5y + 5k = -4 \Rightarrow -5y = -5k - 4 \Rightarrow y = \dfrac{5k + 4}{5}$

$2x - \dfrac{5k + 4}{5} + 3k = 2 \Rightarrow 10x - 5k - 4 + 15k = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x = -10k + 14 \Rightarrow x = \dfrac{14 - 10k}{10} \Rightarrow x = \dfrac{7 - 5k}{5}$

Portanto, as soluções são do tipo $\left(\dfrac{7 - 5k}{5}, \dfrac{5k + 4}{5}, k\right)$.

Duas das soluções possíveis:

$k = 0 \rightarrow \left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{4}{5}, 0\right)$ ou $k = 1 \rightarrow \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{9}{5}, 1\right)$

Pensando no Enem

1. $b_{11} = 28$ unidades de x, 02 portas, em janeiro.

$c_{11} = 25$ mil reais, o preço de x, versão 02 portas.

$28 \cdot 25 = 700$ mil reais arrecadados com x, versão 02 portas, em janeiro.

Resposta: alternativa **e**.

2. $A = \begin{pmatrix} 1200 & 3000 \\ 900 & 5200 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 66\,000 \\ 108\,500 \end{pmatrix}$

$AB = C$

$\begin{cases} 12\cancel{00}\,x + 30\cancel{00}\,y = 660\cancel{00} : (3) \\ 9\cancel{00}\,x + 52\cancel{00}\,y = 1085\cancel{00} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 10y = 220 & \cdot(-9) \\ 9x + 52y = 1085 & \cdot(4) \end{cases} + \Rightarrow \begin{cases} -36x - 90y = -1980 \\ 36x + 208y = 4340 \end{cases} +$

$118y = 2360$

$y = 20$

$4x = 220 - 200 \Rightarrow x = 5$

3. De acordo com os dados do problema, temos:

$\dfrac{TC + TA}{2} = 0{,}6 \Rightarrow TC + TA = 1{,}2$

Dobrando NF, teremos a metade de TC, pois $TC = \dfrac{NV}{NF}$. Assim:

$\dfrac{0{,}5TC + TA}{2} = 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5TC + TA = 1$

Devemos, assim, resolver o sistema $\begin{cases} TC + TA = 1{,}2 \\ 0{,}5TC + TA = 1 \end{cases}$.

Obtemos, então, $TC = 0{,}4$ e $TA = 0{,}8$.

Com $TA = \dfrac{NA}{NV} = 0{,}8$, então $NA = 0{,}8NV$. Do enunciado, temos $NA + NV = 3\,600$. Portanto, temos mais um sistema:

$\begin{cases} NA = 0{,}8NV \\ NA + NV = 3\,600 \end{cases}$. De onde tiramos que $NA = 1600$ e $NV = 2000$.

Finalmente, como $TC = \dfrac{NV}{NF} = 0{,}4$ e $NV = 2000$, obtemos NF:

$\dfrac{2\,000}{NF} = 0{,}4 \Rightarrow NF = 5\,000$

Resposta: alternativa **c**.

Vestibulares de Norte a Sul

1. $A - kI = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -4 - k & 0 \\ 7 & 2 - k \end{bmatrix}$

Então:

$\det(A - kI) = (-4 - k)(2 - k) = 0 \Rightarrow k = -4$ e $k = 2$

Resposta: alternativa **d**.

2. De acordo com o enunciado, temos o sistema:

$\begin{cases} 7x + 5y + 4z = 65 \\ 8x + 7y + 6z = 88 \\ 5x + 4y + 3z = 49 \end{cases}$ -1 $\Rightarrow \begin{cases} 7x + 5y + 4z = 65 \\ x + 2y + 2z = 23 \\ 5x + 4y + 3z = 49 \end{cases}$ -7 -5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 23 \\ -9y - 10z = -96 \\ -6y - 7z = -66 \end{cases}$ -1 $\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 23 \\ -9y - 10z = -96 \\ -3y - 3z = -30 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 23 \\ -9y - 10z = -96 \\ y + z = 10 \end{cases}$ 9 $\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 23 \\ y + z = 10 \\ -z = -6 \end{cases}$

Com o sistema escalonado, basta resolver de baixo para cima.

$-z = -6 \Rightarrow z = 6$

$y + 6 = 10 \Rightarrow y = 4$

$x + 2(4) + 2(6) = 23 \Rightarrow x = 3$

Assim, o peixe x custa R\$ 3,00; o peixe y custa R\$ 4,00 e o peixe z custa R\$ 6,00.

3. Sendo $a = \dfrac{1}{x}$, $b = \dfrac{1}{y}$ e $c = \dfrac{1}{z}$, temos o sistema:

$\begin{cases} 2a - b - c = -1 & \cdot(1) \\ a + b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 4 \end{cases}$ $+$ $+$ $\Rightarrow \begin{cases} 2a - \ b - c = -1 & \text{I} \\ 3a \qquad\quad = -1 & \text{II} \\ 5a - 3b \quad = 3 & \text{III} \end{cases}$

De II, temos $a = -\dfrac{1}{3}$.

De III, temos:

$5 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) - 3b = 3 \Rightarrow -3b = 3 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{14}{3} \Rightarrow b = -\dfrac{14}{9}$

De I, temos:

$2 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) - \left(-\dfrac{14}{9}\right) - c = -1 \Rightarrow -c = -1 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{14}{9} =$

$= \dfrac{-9 + 6 - 14}{9} = -\dfrac{17}{9} \Rightarrow c = \dfrac{17}{9}$

Então, $x = \dfrac{1}{a} = -3$, $y = \dfrac{1}{b} = -\dfrac{9}{14}$ e $z = \dfrac{1}{c} = \dfrac{9}{17}$.

Resposta: alternativa **d**.

4. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A + A^2 + \ldots + A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \dfrac{n^2+n}{2} \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

Resposta: alternativa **d**.

5. $\begin{cases} -x + y = -1 \\ x + y = 1 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{x} + y = \cancel{-1} \\ \cancel{x} + y = \cancel{1} \end{cases}$

$2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Então:

$\begin{cases} -x + 0 = -1 \Rightarrow x = 1 \\ x + 0 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ -2x + 0 = 1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Logo, $S = \varnothing$.

Resposta: alternativa **a**.

6. $C = A \cdot B \Rightarrow \det C = \det A \cdot \det B$

Mas:

$\det A = 0 + 12 + 12 - 0 - 4 - 4 = 16$

$\det B = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Então:

$\det C = 16 \cdot 1 \Rightarrow \det C = 16$

Resposta: alternativa **b**.

7. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Teorema de Binet, 9ª propriedade)

$\det A = 1(-1) \cdot 3 = -3$ (A é matriz triangular, 8ª propriedade)

$\det B = c(2)(1) = 2c$ (B é matriz triangular, 8ª propriedade)

Portanto:

$-60 = -3 \cdot 2c \Rightarrow c = 10$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & k & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 6k + \cancel{16} - 20 - 5k + 24 - \cancel{16} \neq 0 \Rightarrow k \neq -4$

Resposta: alternativa **e**.

9. $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = 2 + 4 + \; + \ldots + 2n = \dfrac{(2 - 2n)n}{2} =$

$= \dfrac{2(1 + n)n}{2} = n + n^2$

Resposta: alternativa **d**.

10. $A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 & 3 \cdot 1 + 3 \\ 3 \cdot 2 + 1 & 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

Resposta: alternativa **d**.

11. x = preço do sanduíche

y = preço da xícara de café

z = preço de um pedaço de torta

Então:

$\begin{cases} 3x + 7y + z = 31{,}50 \\ 4x + 10y + z = 42 \\ x + y + z = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + x + 6y + y + z = 31{,}50 \\ 3x + x + 9y + y + z = 42 \\ x + y + z = P \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y + P = 31{,}50 \\ 3x + 9y + P = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + \dfrac{P}{2} = 15{,}75 \\ x + 3y + \dfrac{P}{3} = 14 \end{cases} -$

$\dfrac{P}{2} - \dfrac{P}{3} = 1{,}75 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3P - 2P = 10{,}5 \Rightarrow P = \text{R\$ } 10{,}50$

Resposta: alternativa **d**.

12. $A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 & 3 \cdot 1 + 3 \\ 3 \cdot 2 + 1 & 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

Resposta: alternativa **d**.

13. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 + x^2 - 2 & 2x - 2x \\ 2x - 2x & x^2 + 1 - 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 4 & 0 \\ 0 & x^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \pm 2$

$2 - 2 = 0$

Resposta: alternativa **a**.

14. x = quantidade de calças tamanho pequeno

y = quantidade de calças tamanho médio

$\begin{cases} x + y = 80 \\ 50x + 60y = 4300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{50x} - 50y = -4\,000 \\ \cancel{50x} + 60y = 4\,300 \end{cases}$

$10y = 300 \Rightarrow y = 30$

$x + y = 80 \Rightarrow x = 80 - 30 \Rightarrow x = 50$

Resposta: alternativa **e**.

15. $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_{11} & m_{11} - m_{12} + 2m_{13} & m_{13} \\ m_{21} & m_{21} - m_{22} + 2m_{23} & m_{23} \\ m_{31} & m_{31} - m_{32} + 2m_{33} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}$

Então:

$m_{11} = 2$

$m_{21} = 18$

$m_{31} = 19$

$m_{13} = 1$

$m_{23} = 17$

$m_{33} = 0$

$m_{11} - m_{12} + 2m_{13} = -10 \Rightarrow m_{12} = 14$

$m_{21} - m_{22} + 2m_{23} = 38 \Rightarrow m_{22} = 14$

$m_{31} - m_{32} + 2m_{33} = 14 \Rightarrow m_{32} = 5$

Logo:

$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 18 & 14 & 17 \\ 19 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Boa sorte!

Resposta: alternativa **a**.

Para refletir

Página 111

c) $\left.\begin{array}{r} 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 1 \\ 4 \cdot 1 - 3 - (-2) = 3 \\ 1 + 3 - (-2) = 6 \end{array}\right\}$ $(1, 3, -2)$ é solução

Página 112

$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot (3) - (-1) = 9 + 1 = 10 \\ 2 \cdot (3) + 5 \cdot (-1) = 6 - 5 = 1 \end{array}\right\}$ $(3, -1)$ é solução

Unidade 3

Capítulo 7

1. a) $\ell_3 = r\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \simeq 17{,}32$ cm

$a_3 = \dfrac{r}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ cm

b) $\ell_4 = r\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ cm $\simeq 14{,}14$ cm

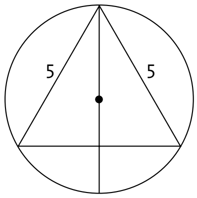
$a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2}$ cm $\simeq 7{,}07$ cm

c) $\ell_6 = r = 10$ cm

$a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = \dfrac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm $\simeq 8{,}66$ cm

2. $\ell_6 = r = 5$
$p = 6\ell_6 = 6 \cdot 5 = 30$ cm

3.



$\ell_3 = 5 \Rightarrow r\sqrt{3} = 5 \Rightarrow r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

$d = 2r = 2 \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{3} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} \simeq$

$\simeq 5{,}77$ cm

4. $a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$\ell_3 = r\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$\dfrac{a_4}{\ell_3} = \dfrac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

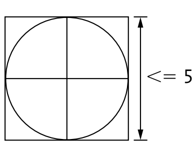
5. $d = 14 \text{ cm} \Rightarrow r = 7$ cm
$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 7 = 14\pi$

6. $C = 14\pi \Rightarrow 2\pi r = 14\pi \Rightarrow r = 7$ cm

7. $d = 60 \text{ cm} \Rightarrow r = 30$ cm
$n = 500$
$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 30 = 60\pi$
$S = 60\pi \cdot 500 = 30\,000\pi \text{ cm} = 300\pi$ m

8. a) raio $r \rightarrow C = 2\pi r$
raio $2r \rightarrow C_1 = 2\pi \cdot 2r = 4\pi r$
Aumento: $C_1 - C = 4\pi r - 2\pi r = 2\pi r$
Logo, o comprimento dobra quando o raio dobra.
b) raio $r \rightarrow C = 2\pi r$
raio $3r \rightarrow C_1 = 2\pi \cdot 3r = 6\pi r$
Logo, o comprimento triplica quando o raio triplica.

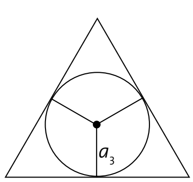
9.



$2r = \ell = 5 \Rightarrow r = \dfrac{5}{2}$

$C = 2\pi r = 2\pi \cdot \dfrac{5}{2} = 5\pi$ cm

10.



$a_3 = r = 6$
$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$

11. a) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\ell}{\cancel{2}\pi \cdot 10} = \dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}\cancel{\pi} \cdot 2} \Rightarrow \ell = 5\pi$ cm

b) $\alpha = \pi$

$\dfrac{\ell}{\cancel{2}\pi \cdot 10} = \dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}\cancel{\pi}} \Rightarrow \ell = 10\pi$ cm

c) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{\ell}{\cancel{2}\pi \cdot 10} = \dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}\cancel{\pi} \cdot 3} \Rightarrow \ell = \dfrac{10\pi}{3}$ cm

12. a) $r = 24$ cm
$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$
$\ell = r\alpha$ cm
$\ell = 12\pi$ cm

b) $r = 24$ cm
$\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$
$\ell = r\alpha$ cm
$\ell = 16\pi$ cm

c) $r = 24$ cm
$\ell = \dfrac{3\pi}{4}$
$\ell = r\alpha$ cm
$\ell = 18\pi$ cm

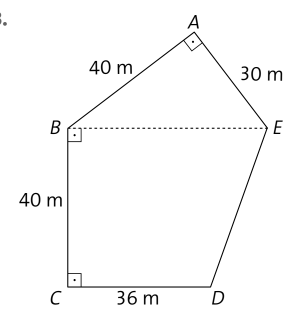
Resolvido passo a passo

5. a) Não, pois se o lado *AB* do hexágono mede 2 cm, então o cateto do triângulo pequeno mede 1 cm (pois equivale à metade do lado *AB*). O lado do hexágono que está na vertical equivale à hipotenusa do triângulo pequeno, portanto vale $\sqrt{2}$ cm. Assim, o hexágono não é regular, pois não tem todos os lados congruentes.

b) Observe a figura ao lado. Podemos dividir as demais peças em triângulos equivalentes ao triângulo pequeno e, a partir daí, obter a área dessas figuras.
Quadrado: 2*A*
Paralelogramo: 2*A*
Triângulo médio: 2*A*
Triângulos maiores: 4*A* cada um

Figura 1

13.



Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:
$BE^2 = 40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500 \Rightarrow BE = 50$ m

Área do $\triangle ABE = \dfrac{\overset{20}{\cancel{40}} \cdot 30}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 600 \text{ m}^2$

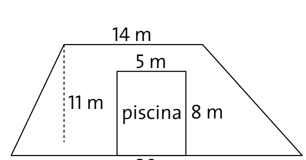
Área do trapézio $BCDE = \dfrac{(50 + 36)\overset{20}{\cancel{40}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 1720 \text{ m}^2$

Área do terreno $= 600 + 1720 = 2320 \text{ m}^2$

14. $DM = MN = NC = 4$ cm

Área do trapézio $= \dfrac{(12 + 4)5}{2} = 40 \text{ cm}^2$

15.



$S_{\text{trapézio}} = \dfrac{(20 + 14)11}{2} = 187 \text{ m}^2$

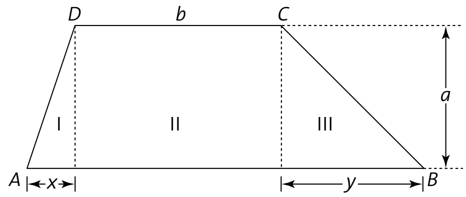
$S_{\text{piscina}} = 5 \cdot 8 = 40 \text{ m}^2$

$S_{\text{pedras}} = 187 - 40 = 147 \text{ m}^2$

16. $\ell = 20$ cm

$S = \dfrac{20^2\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$

17.



- Cálculo da área da região I: $S_I = \dfrac{ax}{2}$
- Cálculo da área da região II: $S_{II} = ab$
- Cálculo da área da região III: $S_{III} = \dfrac{ya}{2}$
- Soma das áreas $= S_I + S_{II} + S_{III} = \dfrac{xa}{2} + ab + \dfrac{ay}{2} =$

$$= a\left(\frac{x}{2} + b + \frac{y}{2}\right) = a\left(\frac{x}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{y}{2}\right) =$$

$$= \frac{a}{2}(x + b + b + y)$$

Fazendo $x + b + y = B$, temos:

$$\frac{a}{2}(B + b) = \frac{(B + b)a}{2}$$

18. $\ell = 2$ cm

$$S = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$S_{\text{total}} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

19. $\ell = 6$ cm

$$S = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$S_{\text{total}} = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

20. $A = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot \text{sen } 60°}{2} = \dfrac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

21. $A = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

22. $A = 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 16 \cdot \text{sen } 30°}{2} = 160 \cdot \dfrac{1}{2} = 80\ \text{cm}^2$

23. $A = 2 \cdot \left(\dfrac{4 \cdot 5 \cdot \text{sen } 60°}{2} + \dfrac{4 \cdot 5\ \text{sen } 120°}{2}\right) =$

$$= 2\left(\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2}\right) = 20\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

24. $A = 6 \cdot \left(\dfrac{8^2 \cdot \text{sen } 60°}{2}\right) = 96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

25. $A_t = 6 \cdot 10^2 = 600\ \text{cm}^2$

26. $A = 2 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 94\ \text{cm}^2$

27. • $S_\triangle = \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2\ \text{cm}^2$

$S_{\text{colorida}} = 4 \cdot 2 = 8\ \text{cm}^2$

$S = S_\square - S_{\text{col.}} = 4^2 - 8 = 16 - 8 = 8\ \text{cm}^2$

28. $p = \dfrac{17 + 15 + 8}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$ m

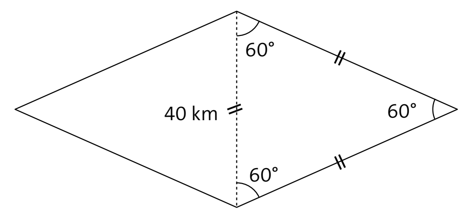
$S = \sqrt{20(20 - 17)(20 - 15)(20 - 8)} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60\ \text{m}^2$

29. $1\ \text{m}^2 \rightarrow 4$ pessoas

$4\,000\ \text{m}^2 \rightarrow 16\,000$ pessoas

30. $1\ \text{cm} \rightarrow 200$ km

$0{,}2\ \text{cm} \rightarrow 40$ km



$$S = 2 \cdot \frac{40^2\sqrt{3}}{4} = 800\sqrt{3}\ \text{km}^2$$

31. a) $11^2 - 8^2 = 121 - 64 = 57$

A área aumentará em 57 cm².

b) $(1{,}2\ell)^2 = 1{,}44\ell^2$

A área aumentará em 44%.

32. • Laterais: $4S_{⏢} = \dfrac{\cancel{4}^{2}(27 + 19)30}{\cancel{2}_{1}} = 2760\ \text{m}^2$

- Fundo: $S = 19^2 = 361\ \text{cm}^2$
- Área total: $2760 + 361 = 3\,121\ \text{cm}^2 = 0{,}3121\ \text{m}^2$

33. $A = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \dfrac{100\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

34. $r = 20\ \text{cm} \rightarrow \ell = 20\sqrt{3}$ cm

$$S_\triangle = \frac{(20\sqrt{3})^2\ \sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{400}^{100} \cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{4}_{1}} = 300\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

35. $P = 2\pi r = 20\pi$ cm

$A = \pi r^2 = 100\pi\ \text{cm}^2$

36. a) $A = \dfrac{\pi r^2}{2} = 18\pi\ \text{cm}^2$

b) $A = \dfrac{\pi \cdot 6^2}{2 \cdot 2} = 9\pi\ \text{cm}^2$

c) $A = \dfrac{2\pi \cdot 6^2}{3 \cdot 2} = 12\pi\ \text{cm}^2$

37. $S = S_{\text{quad.}} - S_{\text{setor}} = 16 - \dfrac{1}{\cancel{4}} \cdot \pi \cdot 4^{\cancel{2}} = (16 - 4\pi)\ \text{m}^2$

38. • Cálculo da hipotenusa do triângulo:

$x^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow x = 10$ m

- Cálculo da área do semicírculo de raio 5:

$$S = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} = \frac{25\pi}{2}\ \text{m}^2$$

- Cálculo da área do triângulo:

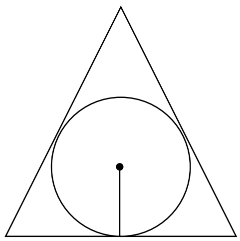
$$S = \frac{8 \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}} = 24\ \text{m}^2$$

- Área do terreno $= \dfrac{25\pi}{2} + 24 = \left(\dfrac{25\pi + 48}{2}\right)\text{m}^2$

39. $d = 20\ \text{cm} \Rightarrow r = 10$ cm

$S = \pi \cdot 10^2 = 100\pi\ \text{cm}^2$

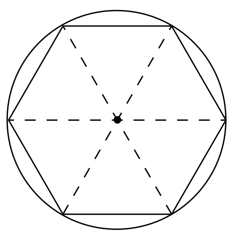
40.



Apótema $= 2\sqrt{3}$ cm

$A = \pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12\pi \text{ cm}^2$

41.



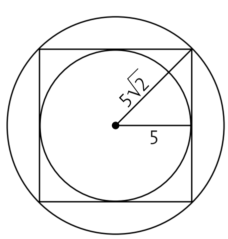
$r = \ell = 8$

$A = \pi \cdot 8^2 = 64\pi \text{ cm}^2$

42. $S = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right) = \pi(3^2 - 1^2) = 8\pi \text{ cm}^2$

43. $S = \dfrac{r\ell}{2} = \dfrac{4 \cdot 10}{2} = 20 \text{ cm}^2$

44.



$A = \pi \cdot \left(\left[5\sqrt{2}\right]^2 - 5^2\right) = 25\pi \text{ cm}^2$

45.
- Lado do quadrado: 8 cm $\rightarrow r = 4$ cm
- Área colorida = área do quadrado *ABCD* − área de um círculo de 4 cm de raio $= 8^2 - \pi \cdot 4^2 = 64 - 16\pi = 16(4 - \pi)$ cm²

46. $A = \dfrac{C^2}{12} = \dfrac{(2\pi r)^2}{12} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{4}}\pi^2 r^2}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \dfrac{\pi^2 r^2}{3} = \pi r^2 \cdot \dfrac{\pi}{3} = S_{circulo} \cdot \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{3} = 1 \Rightarrow \pi = 3$

47. $S = \dfrac{\ell r}{2} = \dfrac{g \cdot \cancel{2}\pi r}{\cancel{2}} = \pi r g$

48. *Lago 1*

Por falta: 64

Por excesso: 39

$A = \dfrac{64 + 39}{2} = 51{,}2$

Lago 2

Por falta: 60

Por excesso: 33

$A = \dfrac{60 + 33}{2} = 46{,}5$

Portanto, lago 1 é maior.

49. a) Por falta: 31 ■; por excesso: 61 ■.

média $= \dfrac{31 + 61}{2} = 46$ ■

Considerando que ■ tem 0,5 cm de lado:

$S \simeq 46 \cdot 0{,}5^2 = 11{,}5 \text{ cm}^2$

b) Por falta: 34 ■; por excesso: 62 ■.

média $= \dfrac{34 + 62}{2} = 48$ ■

Considerando que ■ tem 0,5 cm de lado:

$S \simeq 48 \cdot 0{,}5^2 = 12 \text{ cm}^2$

50.
- Se as áreas têm razão de semelhança $k^2 = 4$, os perímetros têm razão de semelhança $k = 2$. Assim:
  $x + 2x = 48 \Rightarrow x = 16$ cm e $2x = 32$ cm

a) Então, um dos quadrados tem lado $\dfrac{16}{4} = 4$ cm e o outro tem lado $\dfrac{32}{4} = 8$ cm.

b) As áreas são, respectivamente, $4^2 = 16$ cm² e $8^2 = 64$ cm².

51. Se o raio da *pizza* média é 80% do raio da *pizza* grande, então a razão entre os raios da *pizza* média e da grande é 0,8. Assim:

$k = 0{,}8 \Rightarrow k^2 = 0{,}64$

Logo, a razão entre as áreas das *pizzas* média e grande é:

$k^2 = 0{,}64 = 64\%$

Resposta: alternativa **b.**

52. A razão entre os lados é:

$k = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{x}{8}$

A razão entre as áreas é:

$k^2 = \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo:

$\dfrac{x}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$

Resposta: alternativa **a**.

53. Se o raio aumentou 1%, então o fator de aumento é 1,01 ($k = 1{,}01$). Portanto, a área aumentará $k^2 = 1{,}01^2 = 1{,}0201$.

Logo:

$\dfrac{x}{\pi \cdot 1^2} = 1{,}0201 \Rightarrow x = 3{,}14 \cdot 1 \cdot 1{,}0201 \simeq 3{,}20$

Resposta: alternativa **d**.

54. O triângulo menor é semelhante ao maior, pois o corte foi paralelo ao lado do triângulo maior. Assim:
- a razão entre os catetos é:

  $k = \dfrac{x}{60} = \dfrac{y}{40}$

- a razão entre as áreas é:

  $k^2 = \dfrac{A_{menor}}{A_{maior}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo:

$\dfrac{x}{60} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 30\sqrt{2}$

$\dfrac{y}{40} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 20\sqrt{2}$

Resposta: alternativa **c**.

55. $A = \pi(1{,}1r)^2 = \pi r \cdot 1{,}21$

21%

$P = 2\pi(1{,}1r) = 2\pi r \cdot 1{,}1$

10%

Resposta: alternativa **b.**

56. Se a escala é 1 : 50, então $k = 50$ e $k^2 = 2500$. Se a área na planta é $12 \cdot 14 = 168$ cm^2, a área real é

$168 \cdot 2500 = 420\,000$ cm^2 $= 42$ m^2.

Resposta: alternativa **d**.

57. O tempo gasto para limpar o terreno é proporcional à área dele. Assim, se o raio dobra ($k = 2$), a área quadruplica ($k^2 = 4$). Então, ele gastará 4 vezes mais tempo: $3 \cdot 4 = 12$ h.

Resposta: alternativa **e**.

58. a) A razão de semelhança linear é

$$k = \frac{1\,250\,000}{5} = 250\,000.$$

Portanto, 1 cm na foto equivale a

250 000 cm = 2 500 m = 2,5 km.

b) $k^2 = 250\,000^2 = \frac{A}{9} \Rightarrow A = 562\,500\,000\,000$ cm^2 $=$

$= 56\,250\,000$ m^2 $= 56{,}25$ km^2

Outros contextos

1. a) $\frac{1\,700\,000}{19\,000} \simeq 89{,}47$ hectares/índio

b) Como a reserva possui 12 vezes o tamanho de São Paulo, temos:

$\frac{19\,000}{12} \simeq 1583$ indígenas

2. $1\,700\,000 \cdot 10\,000$ m^2 $= 17\,000\,000\,000$ m^2

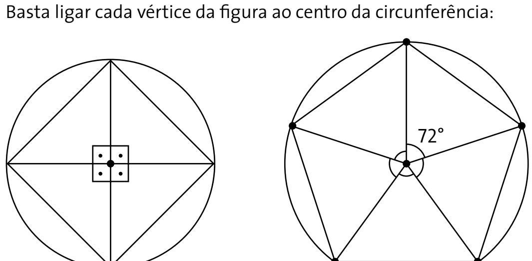
Como 1 km^2 = 1 000 000 m^2, então:

$17\,000\,000\,000$ m^2 $= 17\,000$ km^2

Para refletir

Página 135

Basta ligar cada vértice da figura ao centro da circunferência:



A circunferência é divida igualmente em arcos de 90° e 72°, respectivamente.

Página 146

$A = \frac{10}{2}\ell a = 5\ell a$

Capítulo 8

5. a) $p(ABCD)\ //\ p(EFGH)$; $p(ADGH)\ //\ p(BCFE)$; $p(ABEH)\ //\ p(CDGF)$.

b) Algumas soluções possíveis: $p(ABCD)$ e $p(ADGH)$; $p(CDGF)$ e $p(ACFH)$; $p(CBEF)$ e $p(ABEH)$.

c) Sim; $\overleftrightarrow{FG}$.

d) *ADGH* e *ABCD*.

Resolvido passo a passo

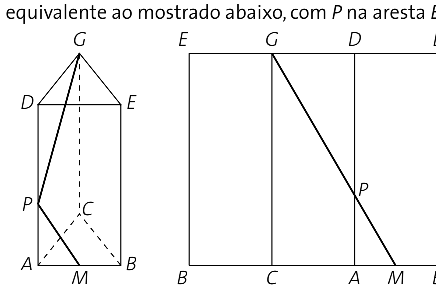
5. a) *GC*: 8 cm

CD: 10 cm ($6^2 + x^2 = 8^2 \Rightarrow x = 10$ cm)

DE: 6 cm; ($8 + 10 + 6 = 24$ cm)

Ela terá percorrido 24 cm.

b) Chamando de *M* o ponto médio de *AB*, o caminho mais curto passa por um ponto *P* na aresta *AD*, de forma que o ângulo $D\hat{G}P$ é congruente ao ângulo $A\hat{M}P$. Em outras palavras, se planificarmos o prisma, os pontos *G*, *P* e *M* serão colineares no caminho mais curto. Existe um segundo caminho, equivalente ao mostrado abaixo, com *P* na aresta *EB*.



16. a) algumas soluções: $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$

b) $p(ADHE)$

c) Sim. A figura é um paralelepípedo, então *AFGD* é um retângulo. Logo, $A\hat{F}G$ é reto e, portanto, $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{FG}$.

17. a) $p(ABFE) \perp p(ABCD)$; $p(ABFE) \perp p(EFGH)$; $p(ABFE) \perp p(ADHE)$; $p(ABFE) \perp p(BCGF)$.

b) $p(ADHE)$ e $p(CDHG)$

c) Sim. $\overleftrightarrow{AE}$ é perpendicular ao $p(EFGH)$.

Como $\overleftrightarrow{AE} < p(ACGE)$, então $p(ACGE)$ é perpendicular ao $p(EFGH)$.

d) Os três são perpendiculares ao $p(EFGH)$.

23. a) 3

b) $\overline{HF}^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow \overline{HF} = 5$

c) $\overline{CE}^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{CE} = \sqrt{13}$

d) $\overline{DH}^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{DH} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

e) 4

f) $\sqrt{13}$

g) 4

h) 2

i) 4

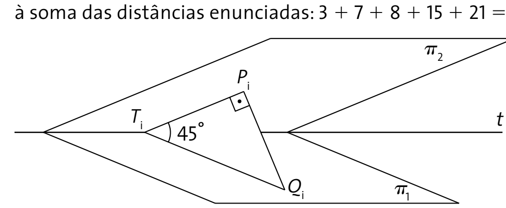
j) 2

k) 3

l) 2

m) $\overline{BE}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{BG}^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{BE} = \sqrt{29}$

24. Considere $T_1, T_2, ..., T_5$ os pontos da reta *t* projeções de $P_1, P_2, ..., P_5$ respectivamente. Assim, $T_iP_iQ_i$ formam triângulos isósceles de base T_iQ_i, ou seja, em todos os 5 triângulos temos $T_iP_i = P_iQ_i$. Portanto, a soma pedida $P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 + P_4Q_4 + P_5Q_5$ equivale à soma das distâncias enunciadas: $3 + 7 + 8 + 15 + 21 = 54$ cm.



Exercício adicional

1ª parte: existência do plano α

Sejam r e s as retas dadas. Sendo paralelas distintas, são coplanares por definição; portanto, existe um plano α que as contém.

2ª parte: unicidade do plano α

Se existisse qualquer outro plano $\beta \neq \alpha$ que contivesse as retas r e s, e tomando-se um ponto A em r, com α passando por A e por s, teríamos β também passando por A e por s e, portanto, o plano β coincidiria com α, conforme o teorema 2. Então, o plano α é único.

Para refletir

Página 178

No item **b** a distância entre F e H é a diagonal de um quadrado de lado 3. Logo, mede $3\sqrt{2}$.

No item **c** a distância entre E e B é a hipotenusa do triângulo EBG, cujos catetos medem $3\sqrt{2}$ e 3. Logo, mede $3\sqrt{3}$.

Capítulo 9

3. $V - A + F = 2 \Rightarrow 5 - 10 + F = 2 \Rightarrow F = 2 + 5 \Rightarrow F = 7$

4. $F = V \Rightarrow F - 20 + F = 2 \Rightarrow 2F = 22 \Rightarrow F = 11$

5. 1 face hexagonal: 6 arestas

6 faces triangulares: $6 \cdot 3 = 18$ arestas

$A = \dfrac{6 + 18}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$

$V - 12 + 7 = 2 \Rightarrow V = 2 + 5 = 7$

6. 12 – faces pentagonais

20 – faces hexagonais

Como a bola tem 12 faces pentagonais, temos: $12 \cdot 5 = 60$ arestas

A bola também tem 20 faces hexagonais; assim, temos: $20 \cdot 6 = 120$.

Como cada aresta foi contada duas vezes, o número total de arestas é:

$A = \dfrac{60 + 120}{2} = 90$

Assim, para determinar o comprimento total de linha, temos:

$20 \cdot 90 = 1800 \text{ cm} = 18 \text{ m}$

7. $V = 20$

$A = \dfrac{20 \cdot 5}{2} = 50$

$20 - 50 + F = 2 \Rightarrow F = 2 + 30 = 32$

8. 3 faces triangulares: $3 \cdot 3 = 9$ arestas

1 face quadrangular: $1 \cdot 4 = 4$ arestas

1 face pentagonal: $1 \cdot 5 = 5$ arestas

2 faces hexagonais: $2 \cdot 6 = 12$ arestas

$F = 7$

$A = \dfrac{9 + 4 + 5 + 12}{2} = 15$

$V - 15 + 7 = 2 \Rightarrow V = 2 + 8 = 10$

10. $d = \sqrt{10^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{100 + 36 + 64} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ cm

11. $d = a\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 30$ cm

12. O cubo tem 12 arestas. Logo, cada uma mede $\dfrac{48}{12} = 4$ cm.

$d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm

13. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 20\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 800$

$a = 5k \Rightarrow a^2 = 25k^2$

$b = 4k \Rightarrow b^2 = 16k^2$

$c = 3k \Rightarrow c^2 = 9k^2$

$25k^2 + 16k^2 + 9k^2 = 800 \Rightarrow 50k^2 = 800 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$

$a = 20$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm

14. $A = 6\ell^2 = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216 \text{ cm}^2$

15. $A = 2 \cdot (4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8 + 4 \cdot 8) = 2 \cdot 92 = 184 \text{ cm}^2$

16. $A_t = 2(ab + ac + bc)$

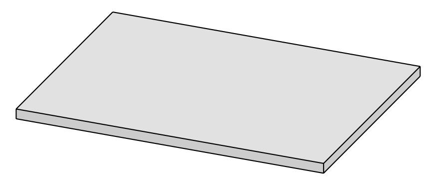
Nesse caso, $a = 32$ cm, $b = 17$ cm e $c = 10$ cm.

Assim:

$A_t = 2(32 \cdot 17 + 32 \cdot 10 + 17 \cdot 10) = 2(544 + 320 + 170) = 2(1034) =$
$= 2068 \text{ cm}^2$

Logo, $A_t = 2068 \text{ cm}^2$.

A aba da tampa é formada por quatro regiões retangulares: duas cujas medidas são 2 cm por 17 cm e duas cujas medidas são 2 cm por 32 cm.



Assim:

$A = 2 \cdot 2 \cdot 17 + 2 \cdot 2 \cdot 32 = 68 + 128 = 196 \text{ cm}^2$

quantidade total $= 2068 \text{ cm}^2 + 196 \text{ cm}^2 = 2264 \text{ cm}^2$ de papelão

Portanto, são gastos 2264 cm^2 de papelão para fazer essa caixa de sapatos.

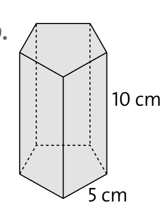
17. $A_t = 6a^2 = 96 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ m

18. $A_\ell = 3(4 \cdot 9) = 3 \cdot 36 = 108 \text{ cm}^2$

$A_b = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$A_t = A_\ell + 2A_b = 108 + 8\sqrt{3} = 4(27 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

19.



$A_\ell = 5(5 \cdot 10) = 5 \cdot 50 = 250 \text{ cm}^2$

20. Área lateral: $2(3 \cdot 2{,}7 + 4 \cdot 2{,}7) = 2(8{,}1 + 10{,}8) = 37{,}8$

Descontando a janela e as duas portas, temos:

$37{,}8 - (2 + 2 \cdot 1{,}6) = 37{,}8 - 5{,}2 = 32{,}6 \text{ m}^2$

21. $A_t = A_\ell + 2A_b = 4(0{,}90 \cdot 1{,}80) + 2(0{,}90 \cdot 0{,}90) =$
$= 6{,}48 + 1{,}62 = 8{,}1 \text{ m}^2$

Para fabricar 100 caixas são gastos:

$100 \cdot 8{,}1 = 810 \text{ m}^2$

22. $d = a\sqrt{3} \Rightarrow 10\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = 10$

Logo:

$A_t = 6a^2 = 6 \cdot 10^2 = 6 \cdot 100 = 600 \text{ m}^2$

23. $A_t = 6(18 \cdot 0,4) + \cancel{6}^{3} \cdot \dfrac{(0,4)^2\sqrt{3}}{\cancel{4}_{2}} = 43,2 + 0,24\sqrt{3} =$

$= 0,24\left(180 + \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$

24. $A_t = 6 \cdot 20^2 + 3(5 \cdot 20) - \cancel{2}^{1} \cdot \dfrac{5^2\sqrt{3}}{\cancel{4}_{2}} = 2\,400 + 300 - \dfrac{25\sqrt{3}}{2} =$

$= 2\,700 - \dfrac{25\sqrt{3}}{2} = \left(\dfrac{5\,400 - 25\sqrt{3}}{2}\right) \text{cm}^2$

25. $A_\ell = 6(30 \cdot 10) = 1\,800 \text{ cm}^2$

$A_b = 6 \cdot \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$A_t = 1\,800 + 2 \cdot 150\sqrt{3} = 1\,800 + 300\sqrt{3} =$

$= 1800 + 300 \cdot 1,7 = 2\,310 \text{ cm}^2$

Com $41\,000 \text{ cm}^2$ podem ser feitas $\dfrac{41\,000}{2\,310} \simeq 17$ caixas.

26. $A_t = A_\ell + 2A_b = 3(8 \cdot 15) + 2 \cdot \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} = 360 + 32\sqrt{3} =$

$= 360 + 32 \cdot 1,7 = 414,4 \text{ cm}^2$

Resolvido passo a passo

5. a) $\dfrac{68\,000}{x} = 10 \Rightarrow x = 6\,800$

$6\,800 \text{ m}^3$

27. $V = \left(5\sqrt{3}\right)^3 = 125 \cdot 3\sqrt{3} = 375\sqrt{3} \text{ cm}^3$

28. $V = a^3 = 1000 \Rightarrow a = 10 \text{ dm}$

29. $V = 4 \cdot 7 \cdot 5 = 140 \text{ cm}^3$

30. $V = 1,20 \cdot 0,90 \cdot 1 = 1,08 \text{ m}^3 = 1080 \text{ dm}^3 = 1080\ \ell$

31. Volume da caixa: $V = (20)^3 = 8\,000 \text{ cm}^3$

Volume do dado: $V = 2^3 = 8 \text{ cm}^3$

Portanto, podem ser colocados na caixa $\dfrac{8\,000}{8} = 1\,000$ dados.

32. $V = 6^3 + 8^3 + 10^3 \Rightarrow 216 + 512 + 1000 = 1728 \text{ cm}^3$

33. Vamos imaginar o sólido sem o corte:

$V = 8 \cdot 10 \cdot 3 = 240 \text{ cm}^3$

Determinamos o volume do pedaço que falta:

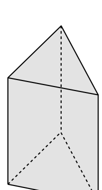
$V = 1,5 \cdot 6 \cdot 10 = 90 \text{ cm}^3$

Portanto, o volume do sólido da figura é:

$240 - 90 = 150 \text{ cm}^3$

34. $V = 12 \cdot 7 \cdot 2,70 = 226,8 \text{ m}^3 = 226\,800 \text{ dm}^3 = 226\,800\ \ell$

35.



$V = A_b h = \dfrac{4^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cdot 10\sqrt{3} = 120 \text{ cm}^3$

36. $V = A_b h = \dfrac{(8 + 12)5}{\cancel{2}_{1}} \cdot \cancel{30}^{15} = 1\,500 \text{ cm}^3$

37. • Volume da peça sem descontar o “furo”:

$V = A_b h = 6 \cdot \dfrac{20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 25 = 15\,000\sqrt{3} \text{ cm}^3$

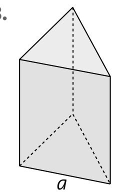
• Volume do “furo”:

$V = A_b h = 6 \cdot \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 25 = 2\,400\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Volume da peça:

$V = 15\,000\sqrt{3} - 2\,400\sqrt{3} = 12\,600\sqrt{3} \text{ cm}^3$

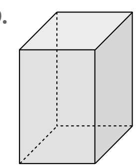
38.



$A_\ell = 3 \cdot 3a^2 = 9a^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ cm}$

$V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3a = \dfrac{\cancel{4}^{1}\sqrt{3}}{\cancel{4}_{1}} \cdot 6 = 6\sqrt{3} \text{ cm}^3$

39.



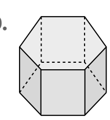
Perímetro da base = 40 cm

Cada lado do quadrado mede 10 cm.

$V = A_b h = 10^2 h = 700 \Rightarrow h = \dfrac{700}{100} = 7 \text{ cm}$

$A_t = A_\ell + 2A_b = 4 \cdot 70 + 2 \cdot 10^2 = 280 + 200 = 480 \text{ cm}^2$

40.



$V = A_b h = 6 \cdot \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 8 = 768\sqrt{3} \text{ cm}^3$

$A_t = 2A_b + A_\ell = \cancel{2}^{1} \cdot \cancel{6}^{3} \cdot \dfrac{8^2\sqrt{3}}{\cancel{4}_{\cancel{2}_{1}}} + 6 \cdot 8^2 = 192\sqrt{3} + 384 =$

$= 192\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$

41. Volume de 1 cubo: $V = a^3 = 1^3 = 1 \text{ m}^3$

$V_{total} = 11 \cdot 1 = 11 \text{ m}^3$

42. a) Igual.

Volume total dos 6 prismas triangulares: $6 \cdot A_b \cdot h = 6\sqrt{3}\,h$

Volume total do prisma hexagonal: $A_b \cdot h = 6\sqrt{3}\,h$

b) Maior.

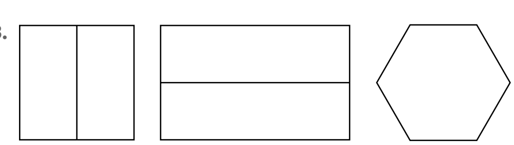
Área total dos 6 prismas triangulares:

$A_t = 6[A_\ell + 2A_b] = 36\ell + 2\sqrt{3}$

Área total do prisma hexagonal: $A_t = [A_\ell + 2A_b] = 12\ell + 12\sqrt{3}$

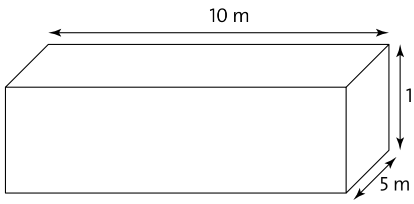
Área total dos 6 prismas triangulares > área total do prisma hexagonal

43.



44. Vamos dividir a figura em dois sólidos, um paralelepípedo e um prisma triangular.

- Paralelepípedo

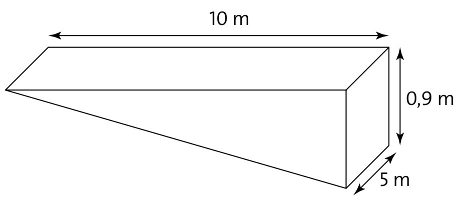


$V = A_b \cdot h = 1 \cdot 10 \cdot 5 = 50 \text{ m}^3$

Descontando 0,4 m, então o volume é:

$V = 0{,}6 \cdot 10 \cdot 5 = 30\text{m}^3$

- Prisma triangular



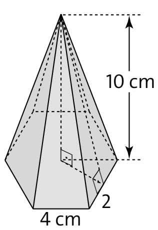
$V = A_b \cdot h = \frac{10 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}9 = 22{,}5 \text{ m}^3$

Assim, o volume total é:

$V = 30 + 22{,}5 = 52{,}5 \text{ m}^3$

Resposta: alternativa **a**.

45.



a) $a_1 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm

b) $a^2 = h^2 + a_2^2 = 10^2 + 12 = 112 \Rightarrow a = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$ cm

c) $a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell_1^2 \Rightarrow \ell_1^2 = 112 + 4 = 116 \Rightarrow$

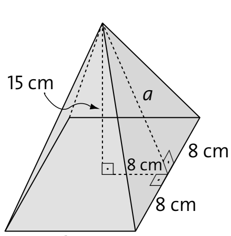
$\Rightarrow \ell_1 = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$ cm

d) $A_b = 6 \cdot \frac{4^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{\cancel{4}} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$

e) $A_\ell = 6 \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 4\sqrt{7}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 48\sqrt{7} \text{ cm}^2$

f) $A_t = A_b + A_\ell = 24\sqrt{3} + 48\sqrt{7} = 24\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{7}\right) \text{ cm}^2$

46.



$a^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 \Rightarrow a = 17$ cm

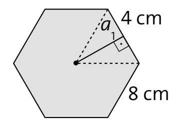
$A_t = A_b + 4A_\triangle = 16^2 + \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{16 \cdot 17}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 256 + 544 = 800 \text{ cm}^2$

47. Base quadrada: $\ell = 4$ cm

$A_t = A_b + 4A_\triangle = 16 + \cancel{4} \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = 16 + 16\sqrt{3} =$

$= 16\left(1 + \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$

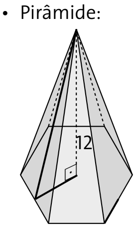
48. • Base da pirâmide:



$a_1 = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm

$A_b = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

- Pirâmide:



$a^2 = a_1^2 + h^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 12^2 = 48 + 144 = 192 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ cm

$A_t = A_b + 6A_\triangle = 16\sqrt{3} + \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 16\sqrt{3} + 192\sqrt{3} =$

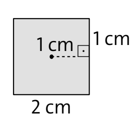
$= 208\sqrt{3} \text{ cm}^2$

49. Tetraedro: 6 arestas e 4 faces

$6a = 72 \Rightarrow a = 12$ cm

$A_t = 4A_\triangle = \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 144\sqrt{3} \text{ cm}^2$

50. • Base da pirâmide:



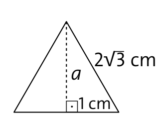
- Diagonal do cubo:

$d = \ell\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm

- Aresta lateral da pirâmide:

$\ell_1 = d \Rightarrow \ell_1 = 2\sqrt{3}$ cm

- Face lateral da pirâmide:



$a^2 + 1^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 4 \cdot 3 - 1 = 11 \Rightarrow a = \sqrt{11}$ cm

- Área do sólido formado:

$A_t = 4A_\triangle + 5A_\square = 4 \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{11}}{\underset{1}{\cancel{2}}} + 5 \cdot 2^2 = 4\sqrt{11} + 20 =$

$= 4\left(5 + \sqrt{11}\right) \text{ cm}^2$

51. a) $a_1 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{3}\cdot\overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 1\text{ cm}$

$a = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3\text{ cm}$

$h^2 + a_1^2 = a^2 \Rightarrow h^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow h^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow$

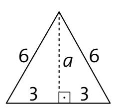
$\Rightarrow h = 2\sqrt{2}\text{ cm}$

b) $A_t = 4A_b = \cancel{4}\cdot\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = 4\cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\text{ cm}^2$

52. $V = \dfrac{A_b h}{3} = \dfrac{15^2\cdot\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 675\text{ cm}^3$

53. $V = \dfrac{A_b h}{3} = \dfrac{10^2\cdot\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 400\text{ cm}^3$

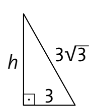
54. • Face lateral da pirâmide:



$a^2 + 9 = 36 \Rightarrow a^2 = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\text{ mm}$

• Altura da pirâmide:



$h^2 + 9 = 27 \Rightarrow h^2 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ h = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\text{ mm}$

• Volume da pirâmide:

$V_p = \dfrac{A_b h}{3} = \dfrac{6^2\cdot 3\sqrt{2}}{3} = 36\sqrt{2}\text{ mm}^3$

• Volume da pedra:

$V = 2V_p = 2\cdot 36\sqrt{2} \simeq 100{,}8\text{ mm}^3$

55. $V = \dfrac{6^2\cdot 4}{3} = 48\text{ m}^3$

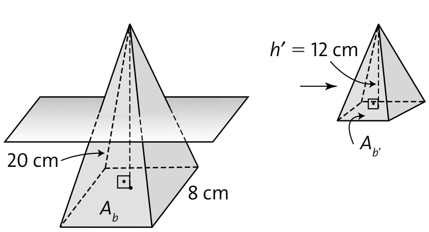
56. $V = \dfrac{230^2\cdot 137}{3} \Rightarrow V \simeq 2\,415\,766{,}7\text{ m}^3$

57. O volume do tetraedro é dado por $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Logo:

$V = \dfrac{10^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{1\,000\sqrt{2}}{12} = \dfrac{250\sqrt{2}}{3}\text{ cm}^3$

58.



$\begin{cases} A_b = 64\text{ cm}^2 \\ h = 20\text{ cm} \\ h' = 12\text{ cm} \end{cases}$

$\dfrac{64}{A_{b'}} = \left(\dfrac{20}{12}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{64}{A_{b'}} = \dfrac{400}{144} \Rightarrow A_{b'} = \dfrac{64\cdot 144}{400} = 23{,}04\text{ cm}^2$

59. $\begin{cases} A_b = 100\text{ cm}^2 \\ A_{b'} = 25\text{ cm}^2 \\ h' = h - 5 \end{cases}$

$\dfrac{100}{25} = \left(\dfrac{h}{h-5}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{100}{25}} = \dfrac{h}{h-5} \Rightarrow 2 = \dfrac{h}{h-5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2h - 10 = h \Rightarrow h = 10\text{ cm}$

60. $\begin{cases} h' = 4\text{ cm} \\ A_{b'} = \dfrac{4}{9}A_b \end{cases}$

$\dfrac{\cancel{A_b}}{\dfrac{4}{9}\cancel{A_b}} = \dfrac{h^2}{16} \Rightarrow h^2 = \dfrac{16}{\dfrac{4}{9}} = \overset{4}{\cancel{16}}\cdot\dfrac{9}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 36 \Rightarrow h = 6\text{ cm}$

61. $\begin{cases} A_b = 6\cdot\dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}\text{ cm}^2 \\ h = 30\text{ cm} \\ h' = 10\text{ cm} \end{cases}$

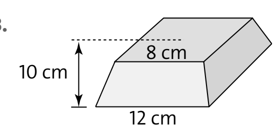
$\dfrac{54\sqrt{3}}{A_{b'}} = \dfrac{30^2}{10^2} \Rightarrow A_{b'} = \dfrac{\overset{6}{\cancel{54}}\sqrt{3}\cdot\cancel{100}}{\underset{\underset{1}{\cancel{9}}}{\cancel{900}}} = 6\sqrt{3}\text{ cm}^2$

62. $\begin{cases} A_B = 40^2 = 1\,600\text{ cm}^2 \\ A_b = 30^2 = 900\text{ cm}^2 \\ h_1 = 15\text{ cm} \end{cases}$

$V = \dfrac{15}{3}\left(1\,600 + \sqrt{1\,600\cdot 900} + 900\right) = 5(2\,500 + 1\,200) =$

$= 5\cdot 3\,700 = 18\,500\text{ cm}^3$

63.



$\begin{cases} A_B = 12^2 = 144\text{ cm}^2 \\ A_b = 8^2 = 64\text{ cm}^2 \\ h_1 = 10\text{ cm} \end{cases}$

$V = \dfrac{10}{3}\left(144 + \sqrt{144\cdot 64} + 64\right) = \dfrac{10}{3}(144 + 96 + 64) = \dfrac{3\,040}{3}\text{ cm}^3$

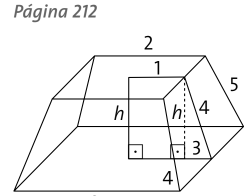
64. $\begin{cases} A_B = 9^2 = 81\text{ m}^2 \\ A_b = 7^2 = 49\text{ m}^2 \\ h_1 = 72\text{ m} \end{cases}$

$V = \dfrac{72}{3}\left(81 + \sqrt{81\cdot 49} + 49\right) \Rightarrow V = 24(130 + 63) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 4\,632\text{ m}^3$

Para refletir

Página 212

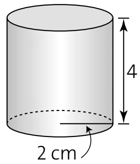


A aresta da base maior mede 8 m. Logo, o apótema da base mede 4 m. A aresta da base menor mede 2 m. Logo, o apótema da base menor mede 1 m. Aplicando o teorema de Pitágoras, encontramos $h = \sqrt{7}$ m. A diferença entre os apótemas das duas bases é $4 - 1 = 3$ m. O apótema do tronco mede 4 m (já calculado).

Capítulo 10

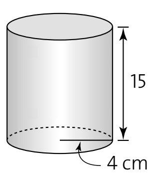
1. a) completamente na horizontal (em relação ao solo)
b) completamente na vertical (em relação ao solo)
d) inclinado
Nunca poderão: *c* e *e*.

2.



a) $2A_b = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ cm^2
b) $A_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi$ cm^2
c) $A_t = 8\pi + 16\,\pi = 24\pi$

3.



$A_t = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 4(15 + 4) = 152\pi$ cm^2

4. $A_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5h = 20\pi \Rightarrow h = \dfrac{20\pi}{10\pi} = 2$ cm
$A_t = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 5(2 + 5) = 10\pi \cdot 7 = 70\pi$ cm^2

5. • Lata mais baixa:
$A_t = 2\pi(2r)(h + 2r) = 4\pi r(h + 2r) = 4\pi rh + 8\pi r^2$
• Lata mais alta:
$A_t = 2\pi r(2h + r) = 4\pi rh + 2\pi r^2$
Logo, utilizou-se menos material na lata mais alta.

Resolvido passo a passo

5. a) Para que ela custe o mesmo que a vela feita com o molde 1 do enunciado, elas devem ter o mesmo volume. Assim:

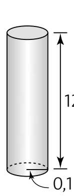
$$\pi r^2 \cdot 20 = \frac{1000}{\pi} \Rightarrow r^2 = \frac{50}{\pi^2} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{\pi}$$

Portanto, o comprimento desse cartão é

$$2\pi r = 2\pi \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\pi} = 10\sqrt{2}.$$

A altura do cartão deve ser 20 cm, como a da vela.
Resposta: 20 cm $\times$ $10\sqrt{2}$ cm

6.



$V = \pi(0,1)^2 \cdot 12 = 0,12\pi$ cm^3

7. $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 70 - \pi \cdot 6^2 \cdot 70 \simeq 4\,480\pi$ cm^3

8. $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 6 - \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 600\pi - 150\pi \simeq 450\pi$ cm^3

9. $V = 8 \cdot 5 \cdot 30 - \dfrac{1}{{}_1\cancel{2}} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} =$
$= 1200 - 64\pi \simeq 1200 - 192 \simeq 1008$ m^3

10. $V = \pi r^2 \cdot h = p \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi$ cm^3

11. $\left.\begin{array}{l}\text{aresta: } 20 \text{ cm} \Rightarrow r = 10 \text{ cm}\\ h = 20 \text{ cm}\end{array}\right\} V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 2000\pi$ cm^3

12. $V_I = \pi x^2 y = x^2 y\pi$

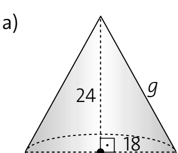
$$V_{II} = \pi \cdot \frac{x^2}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}\,y = \frac{x^2 y\pi}{2}$$

Notamos, então, que o volume da primeira lata é o dobro do volume da segunda, enquanto que seu preço é menor do que o dobro do preço da segunda. Logo, é mais vantajoso comprar a primeira lata.

13. a) $\dfrac{\pi}{15}\ell$ ——— 1 min
x ——— 60 min (1 h) $\Rightarrow x = 4\pi\ell$
$V = 4\pi\,\ell$/h
b) $4\pi\,\ell/\text{h} \Rightarrow 4\pi\ell = 4\pi$ dm^3
$4\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow h = 1$
$h(t) = 1$ dm/h
c) $V_{total} = \pi r^2 \cdot h = 40\pi$
$V_{total} = V \cdot t$
$40\pi = 4\pi \cdot t \Rightarrow t = 10$ horas

14. As distâncias entre as graduações aumentam a partir do centro do círculo. Essas graduações são simétricas em relação ao diâmetro horizontal desse círculo.
Resposta: alternativa **a**.

15. a)



$g^2 = 24^2 + 18^2 = 900 \Rightarrow g = 30$ cm

b) $A_\ell = \pi rg = \pi \cdot 18 \cdot 30 = 540\pi$ cm^2
c) $A_t = \pi r(g + r) = \pi \cdot 18(30 + 18) = 18\pi \cdot 48 = 864\pi$ cm^2

16. Desconsiderando a base, a planificação de um cone é sempre um setor circular.
Resposta: alternativa **a**.

17. $g^2 = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676 \Rightarrow g = 26$ cm
$A_\ell = \pi rg = p \cdot 10 \cdot 26 = 260\pi$ cm^2

18. $\begin{array}{l}360° \text{ ——— } \pi \cdot 6^2\\ 60° \text{ ——— } A_\ell\end{array} \Rightarrow \dfrac{360°}{60°} = \dfrac{36\pi}{A_\ell} \Rightarrow A_\ell = 6\pi$ cm^2

19. a) $r = 2$ cm
$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ cm
b) $A_{Total} = \pi rg + \pi r^2 = 8\pi + 4\pi = 12\pi$ cm^2

20. $g^2 = 36 + 25 = 61$
$g = \sqrt{61}$
$A_{Total} = \pi rg + \pi r^2 = 5\sqrt{61}\pi + 25\pi \simeq 122,6 + 78,5 \simeq 201,1$ cm^2

21. $\begin{cases} h = 4\ m\\ r = 3\ m\end{cases}$
$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi\ m^3 = 12\,000\pi\ \ell$

22. $\begin{cases} h = 7 \text{ cm} \\ r = 1 \text{ cm} \end{cases}$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 7 = \frac{7\pi}{3} \text{ cm}^3 = \frac{7\pi}{3} \text{ m}\ell$

23. $r = 10$

$h = 24 \text{ m}$

$g^2 = r^2 + h^2$

$26^2 = 10^2 + h^2$

$h = 24 \text{ m}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \pi \cdot 24 = 2\,400 \text{ m}^3$

24. $g^2 = r^2 + h^2$

$7^2 = r^2 + 6^2$

$r = \sqrt{13}$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 13 \cdot 6$

$V = 26\pi \simeq 81{,}64 \text{ cm}^3$

25. $9\cancel{\pi}\cancel{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\cancel{\pi}\frac{g^2}{4} \cdot \frac{g\cancel{\sqrt{3}}}{2}$

$g^3 = 27 \cdot 8$

$g = 6$

$g^2 = \frac{(g)^2}{2} + h^2$

$h^2 = \frac{3}{4}g^2$

$h = \frac{\sqrt{3}g}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

26. $V = \pi : 6^2 \cdot 4 - \frac{1}{\cancel{3}}\pi \cdot 4^2 \cdot \cancel{3}$

$V = 144\pi - 16\pi = 128\pi \text{ cm}^3$

27. $R = 40$ cm; $r = 20$ cm; $h_1 = 30$ cm

$V = \frac{h_1\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{30\pi}{3}(40^2 + 40 \cdot 20 + 20^2) =$

$= 10\pi(2\,800) = 28\,000\pi$

Aproximadamente $28\pi\ \ell$.

28. $r = 1{,}5$ m

$V = \frac{5\pi}{3}(3^2 + 3 \cdot 1{,}5 + 1{,}5^2)$

$V = 26{,}25\pi \text{ m}^3$

29. $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm e $h = 9$ cm

$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi \cdot 9}{3}(9 + 3 \cdot 4 + 16) = 3\pi \cdot 37 =$

$= 111\pi \text{ cm}^3 = 111\pi \text{ m}\ell$

30. $V = \frac{4\pi}{3}(2{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 1{,}5 + 1{,}5^2)$

$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 12{,}25 \simeq 49 \text{ cm}^3 \simeq 49 \text{ m}\ell$

31. $A = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 \simeq 144\pi \text{ cm}^2$

32. $A = 4\pi \cdot 4^2 \simeq 64\pi \text{ cm}^2$

33. $A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^2 = 200\pi \text{ m}^2$

34. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 13^3 = \frac{8\,788\pi}{3} \text{ cm}^3 \simeq 8\,788 \text{ cm}^3$

35. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3 \simeq 113{,}04 \text{ cm}^3$

36. $V = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{250\pi}{3} \text{ m}^3 \simeq 250\pi \text{ m}^3 = 250\,000\ \ell$

37. • Volume da laranja:

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$

• Volume de cada gomo:

$V = \frac{1}{\cancel{12}_3} \cdot \frac{\cancel{256}^{64}\pi}{3} = \frac{64\pi}{9} \text{ cm}^3$

38. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 972\pi \text{ m}^3$

$\frac{972\pi \text{ m}^3}{20h} = 48{,}6\pi \text{ m}^3/\text{h} \simeq 152{,}60 \text{ m}^3/\text{h}$

39. $V = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt[3]{\pi}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi^2 \text{ cm}^3 \simeq 13{,}15 \text{ cm}^3$

40. $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{512\pi}{3} \Rightarrow R^3 = \frac{512\cancel{\pi}^1 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{3}_1 \cdot 4\cancel{\pi}_1} = 128 \Rightarrow R = 4\sqrt[3]{2} \text{ cm}$

$A = 4\pi R^2 = 4\pi\left(4\sqrt[3]{2}\right)^2 = 4\pi \cdot 16 \cdot \sqrt[3]{4} = 64\pi\sqrt[3]{4} \text{ cm}^2$

41. $V = \frac{1}{6}\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{\cancel{6}}\frac{4}{3}\pi \cdot 6^{\cancel{3}\,2} = 48\pi \text{ cm}^3$

42. $A = \frac{1}{12}4\pi R^2 = \frac{1}{\cancel{3}}3^{\cancel{2}} = 3\pi \text{ cm}^2$

43. $V_{\text{cunha}} = \frac{\alpha\pi R^3}{270°} \Rightarrow 6{,}4 = \frac{72° \cdot 3 \cdot R^3}{270°} \Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2$

$A_{\text{fuso}} = \frac{\alpha\pi R^2}{90°} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = \frac{72° \cdot 3 \cdot 2^2}{90°} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = 9{,}6 \text{ m}^2$

44. • Volume do hemisfério:

$V = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{2\pi}{3} \text{ m}^3$

• Volume do cone:

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 0{,}80 = \frac{0{,}8\pi}{3} \text{ m}^3$

Volume da boia:

$V = \frac{2\pi}{3} + \frac{0{,}8\pi}{3} = \frac{2{,}8\pi}{3} \text{ m}^3 \simeq 2{,}8 \text{ m}^3$

45. a) A área da casca de cada fatia será $\frac{1}{12}$ da área da superfície esférica. Portanto:

$A = \frac{4\pi R^2}{12} = \frac{\pi R^2}{3} \text{ cm}^2$

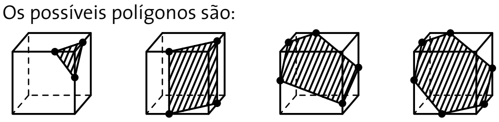
b) Além da área da casca, gastam-se mais dois semicírculos para cobrir as laterais da melancia. Assim:

$A = \frac{\pi R^2}{3} + 2 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4\pi R^2}{3} \text{ cm}^2$

Pensando no Enem

1. A fórmula $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ é válida apenas para triângulos. Medindo uma das diagonais do terreno, pode-se dividi-lo em dois triângulos, e, ao somar suas áreas, chegar à área do quadrilátero.
Resposta: alternativa **d**.

2. Os possíveis polígonos são:



triângulo quadrilátero pentágono hexágono

O heptágono não pode ser formado.
Resposta: alternativa **e**.

3. A estrutura possui 32 faces. Então:

$$A = \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{6 \cdot 20}{2} = 90 \text{ arestas}$$

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$ vértices
Para cada "aresta" da bola são necessários 20 cm, ou seja,
$90 \cdot 20 = 1800$ cm $= 18$ m de linha.
Cada "vértice" da molécula é um átomo de carbono, ou seja, 60 átomos.
Resposta: alternativa **d**.

4. A cada 30 segundos a mangueira enche a lata, ou seja:
$V_{lata} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}02 \text{ m}^3$
Por minuto são $0{,}04 \text{ m}^3$ e por hora:
$0{,}04 \cdot 60 = 2{,}4 \text{ m}^3$
O volume da piscina é:
$V_p = 5 \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 30 \text{ m}^3$
O tempo para encher a piscina é:

$$\frac{30}{2{,}4} = 12{,}5 \text{ horas}$$

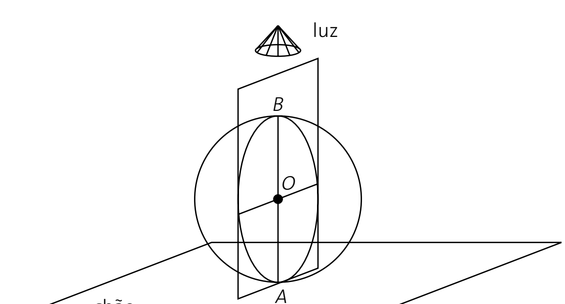
Se começou a encher às 20h, a piscina estará cheia às 8h e 30min do dia seguinte.
Resposta: alternativa **d**.

5. Área lateral do abrigo: $A_\ell = 2 \cdot (2 \cdot x) = 4x$
Área do teto: $A_{teto} = 2 \cdot$ (semiperímetro) $= 2\pi r$.
Como $r = \dfrac{y}{2}$, temos:

$$A_{teto} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{y}{2} = \pi y$$

Com $x = 1$ m, $y = 2$ m e $\pi = 3{,}14$, temos:
$A_\ell = 4 \cdot 1 = 4 \text{ m}^2$
$A_{teto} = \pi \cdot 2 = 3{,}14 \cdot 2 = 6{,}28 \text{ m}^2$
Portanto, o custo é:
$C = 30 \cdot 4 + 6{,}28 \cdot 10 = 182{,}80$ reais
Resposta: alternativa **e**.

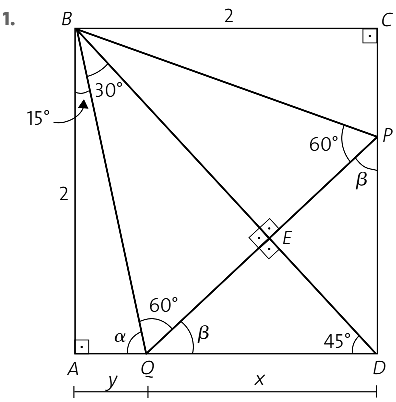
6.



A projeção ortogonal da circunferência no plano (chão) perpendicular ao diâmetro AB é 1 segmento de reta.
Resposta: alternativa **e**.

Vestibulares de Norte a Sul

1.



Pela figura do quadrado acima, temos:
$\alpha + 15° = 90° \Rightarrow \alpha = 75°$
$\alpha + 60° + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 45°$
Portanto, o triângulo QED é isósceles.

Logo, $\overline{ED} = \overline{EQ} = \dfrac{\ell}{2}$ e $h + \dfrac{\ell}{2}$ = diagonal de $ABCD = 2\sqrt{2}$.

Mas:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Portanto:

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} + \frac{\ell}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$$

Pelo $\triangle QED$, temos:

$$x^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

Portanto:

$$x = \frac{\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{4(1-\sqrt{3})}{1-3} =$$

$$= -\frac{4(1-\sqrt{3})}{2}$$

Logo, $x = 2(\sqrt{3}-1)$. Daí:

$y = 2 - x \Rightarrow y = 4 - 2\sqrt{3}$

Portanto:

$$\text{Área}_{ABQ} = \frac{2(4-2\sqrt{3})}{2} = 4 - 2\sqrt{3}$$

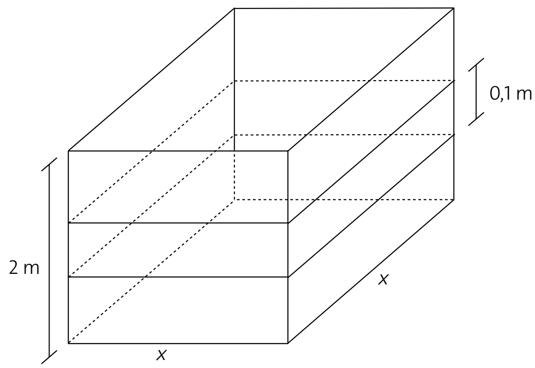
Resposta: alternativa **c**.

2. I) Verdadeira, pois se elas (r e s) são paralelas a uma terceira (t), r e s não podem ser concorrentes, pois uma delas (r ou s) não seria paralela à terceira (t). Tampouco podem ser reversas, pelo mesmo motivo (uma delas não seria paralela à terceira). Assim, elas só podem ser paralelas entre si.

II) Falsa, pois se um plano α é perpendicular a uma reta de um plano β, então o plano α possui pontos em comum com o plano β, não podendo esses planos ser paralelos distintos. Também α e β não podem ser paralelos coincidentes, pois então a reta estaria contida em α, em vez de ser perpendicular.

III) Verdadeira, pois se os dois planos forem secantes, existirão duas retas, uma em cada plano, que serão perpendiculares à mesma reta, porém não serão paralelas entre si, o que seria um absurdo. Assim, se os dois planos não podem ser secantes, eles são paralelos.
Resposta: alternativa **c**.

3.



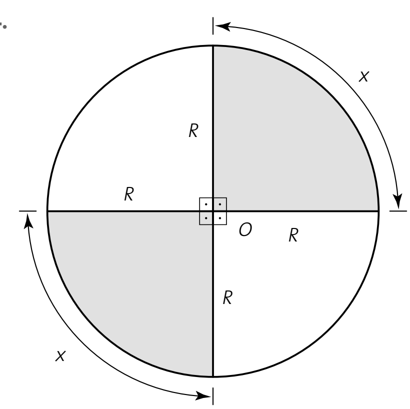
O volume da água adicionada é 500 ℓ ou 0,5 m^3.
Portanto:

$0{,}5 = x \cdot x \cdot 0{,}1 \Rightarrow x^2 = 5\ m^2$

Sendo a altura do depósito 2 m, temos:

$x^2 \cdot 2 = \text{volume} \Rightarrow V = 5 \cdot 2 \Rightarrow V = 10\ m^3$
Resposta: alternativa **c**.

4.



$$\frac{2\pi R}{x} = \frac{360°}{90°} \Rightarrow x = \frac{2\pi R}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi R}{2}$$

Logo:

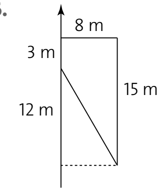
$$\frac{\text{perímetro}_{\text{hachurada}}}{\text{perímetro}_{\text{circunferência}}} = \frac{2(x + 2R)}{2\pi R} = \frac{\frac{\pi R}{2} + 2R}{\pi R} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2}{\pi} =$$

$$= \frac{\frac{\pi + 4}{2}}{\pi} = \frac{\pi + 4}{2\pi}$$

Resposta: alternativa **d**.

5. a) se $r \perp \alpha$, sua projeção ortogonal será um ponto.
b) $\alpha \,//\, \beta$. $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ podem ser reversas.
c) sendo α o citado plano, ele é único pois a projeção da reta perpendicular a este é um ponto. Logo, o plano é determinado pela reta contida e tal ponto.
d) Existem infinitos planos secantes a um plano. A perpendicularidade é um caso específico.
Resposta: alternativa **d**.

6.



$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cone}} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{\text{sólido}} = \pi \cdot 8^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot (15 - 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{\text{sólido}} = 960\pi - 256\pi \Rightarrow V_{\text{sólido}} = 704\pi\ m^3$

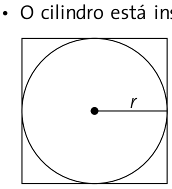
Resposta: alternativa **c**.

7. Numerando os quadrados e círculos, de dentro para fora, em ordem crescente, temos:

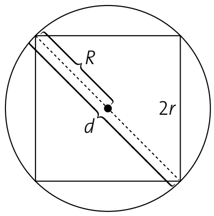
- $A_{\theta_1} = \ell_1^2 = 4 \Rightarrow \ell_1 = 2$
  $A_{c_1} = \pi r_1^2$
  $r_1 = \frac{1}{2} \cdot$ diagonal do quadrado $1 \Rightarrow r_1 = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
  $A_{c_1} = 2\pi$
- $A_{\theta_2} = \ell_2^2$
  $\ell_2 = 2r_1 = 2\sqrt{2}$
  $A_{\theta_2} = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow A_{\theta_2} = 8$
  $A_{c_2} = \pi r_2^2$
  $r_2 = \frac{1}{2} \cdot$ diagonal do quadrado 2
  $\text{diagonal}_{\theta_2} = \ell_2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$
  Então, $r_2 = 2$.
  $A_{c_2} = \pi r_2^2 \Rightarrow A_{c_2} = 4\pi$
- $A_{\theta_3} = \ell_3^2$
  $\ell_3 = 2r_2 = 2 \cdot 2 \Rightarrow \ell_3 = 4$
  $A_{\theta_3} = 4^2 \Rightarrow A_{\theta_3} = 16$
  $A_{c_3} = \pi r_3^2$
  $r_3 = \frac{1}{2} \cdot$ diagonal do quadrado 3
  $\text{diagonal}_{\theta_3} = \ell_3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
  Então, $r_3 = 2\sqrt{2}$.
  $A_{c_3} = \pi r_3^2 \Rightarrow A_{c_3} = (2\sqrt{2})^2 \cdot \pi \Rightarrow A_{c_3} = 8\pi$
  Logo:
  $A_{\text{pedida}} = A_{c_3} - A_{\theta_3} + A_{c_2} - A_{\theta_2} + A_{c_1} - A_{\theta_1} =$
  $= 8\pi - 16 + 4\pi - 8 + 2\pi - 4 =$
  $= 14(\pi - 2)$
  Fazendo $\pi = 3$, temos $A = 14(3 - 2) = 14\ m^2$.
  Resposta: alternativa **b.**

8. I) *V*
II) *F*, as retas podem ser reversas.
III) *F*, os planos podem ser perpendiculares.
IV) *V*
Resposta: alternativa **c**.

9. • Perímetro da base do cilindro de raio *r*:
$16\pi = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{16\pi}{2\pi} = 8\ cm$
• O cilindro está inscrito em um cubo:



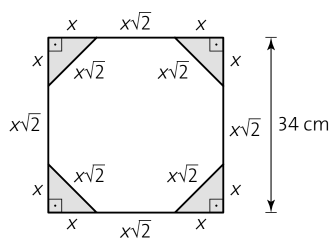
- O cubo está inscrito em uma esfera:



O diâmetro da esfera circunscrita é a diagonal da face do cubo:
$d = 2r\sqrt{2} \Rightarrow R = r\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm

- Área da superfície esférica:
$A = 4\pi\left(8\sqrt{2}\right)^2 = 4\pi \cdot 64 \cdot 2 = 512\pi \text{ cm}^2 \simeq 1607{,}68 \text{ cm}^2$

10.



a) $x + x\sqrt{2} + x = 34 \Rightarrow x\left(2 + \sqrt{2}\right) = 34 \Rightarrow$

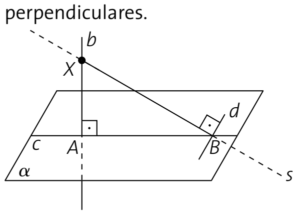
$\Rightarrow x = \dfrac{34}{\left(2+\sqrt{2}\right)} \cdot \dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)} \Rightarrow x = \dfrac{34\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 17\left(2-\sqrt{2}\right) \Rightarrow x = 10{,}2$ cm

b) $A_{\triangle} = \dfrac{x \cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{(10{,}2)^2}{2} \Rightarrow A_{\triangle} = 52{,}02 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{octógono}} = A_{\text{quadrado}} - 4A_{\text{triângulo}} \Rightarrow A_{\text{octógono}} = 34^2 - 4 \cdot 52{,}02 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{\text{octógono}} = 947{,}92 \text{ cm}^2$

11. Desenhando a reta s, s é perpendicular a d, pelo teorema das três perpendiculares.



Resposta: alternativa **d**.

12. $V_1 = V_2 \Rightarrow \overset{2}{\cancel{40}} \cdot \cancel{10}(20 - 6) = \cancel{20} \cdot \cancel{10}(40 - x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot 14 = 40 - x \Rightarrow x = 40 - 28 \Rightarrow x = 12$ cm
Resposta: alternativa **a**.

13. $A_{\text{passeio}} = A_{\text{ret.}} - 2 \cdot A_{\text{triâng.}} = 6 \cdot 8 - 2 \cdot \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 48 - 36 = 12 \text{ m}^2$
Resposta: alternativa **d**.

14. As retas r e s não estão no mesmo plano. Portanto, não podem ser paralelas.
Resposta: alternativa **a**.

15. $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi R^3 \Rightarrow V(x) = \dfrac{4}{3}\pi x^3$

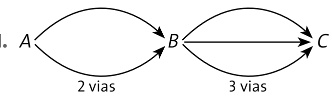
Como o volume da esfera é uma função cúbica $\left(\dfrac{4\pi}{3}R^3\right)$ e x é positivo, a melhor representação geométrica da função é a da alternativa **b**.

Resposta: alternativa **b**.

Unidade 4

Capítulo 11

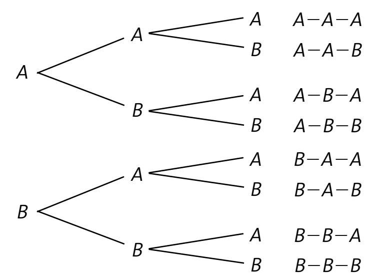
1.



Logo, há $2 \cdot 3 = 6$ maneiras para irmos de A a C passando por B.

2. $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$ maneiras diferentes.

3. Em cada lançamento, podemos ter cara ou coroa. Utilizando A para cara e B para coroa, temos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades de resultado:



4. Há $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras.

5. Algarismos das dezenas: 2, 4, 6 ou 8
Algarismos das unidades: 0, 3, 6 ou 9
Logo, podemos formar $4 \cdot 4 = 16$ números.

6. a) $6 \cdot 6 = 36$ números
b) O algarismo das unidades pode ser 2, 4 ou 6. Logo, temos $6 \cdot 3 = 18$ números pares.
c) O algarismo das unidades pode ser 1, 3 ou 5. Logo, temos $6 \cdot 3 = 18$ números ímpares.
d) $6 \cdot 5 = 30$ números
e) Só podem ser utilizados os algarismos 2, 4 e 6. Logo, temos $3 \cdot 3 = 9$ números.

7. $2^7 = 128$ maneiras

8. $2^6 - 1 = 63$ maneiras

9. $P = 90 \cdot 5 = 450$

10. a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $\dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$

c) $\dfrac{3!5!}{4!6!} = \dfrac{\cancel{3!}\cancel{5} \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}6 \cdot \cancel{5} \cdot 4 \cdot \cancel{3!}} = \dfrac{1}{6 \cdot 4} = \dfrac{1}{24}$

d) $\dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n^2 - n$

e) $\dfrac{\overset{1}{\cancel{(n+1)!}}}{(n+2)\underset{1}{\cancel{(n+1)!}}} = \dfrac{1}{n+2}$

f) $\dfrac{(n+3)\overset{1}{\cancel{(n+2)!}}}{\underset{1}{\cancel{(n-2)!}}} \cdot \dfrac{(n-1)\overset{1}{\cancel{(n-2)!}}}{\underset{1}{\cancel{(n+2)!}}} = (n+3)(n-1) =$
$= n^2 + 2n - 3$

11. a) $\dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 56 \Leftrightarrow n = 8$

b) $(n+2)(n+1)n! + (n+1)n! = 15n! \Rightarrow u^2 + 3n + 2 + n + 1 = 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow u^2 + 4n - 12 = 0 \Rightarrow n = 2$

12. $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
ALI, AIL, LAI, LIA, IAL, ILA

13. Podemos escrever $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ números de 4 algarismos.
$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números de 4 algarismos distintos.

14. $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ maneiras

15. Se duas pessoas estão sempre juntas, podemos considerá-las como uma única pessoa.
$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Essas duas pessoas podem sentar-se de duas maneiras. Logo, temos $2 \cdot 24 = 48$ maneiras.

16. $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ anagramas

17. Os números devem ter o algarismo 6 na unidade de milhar porque eles estão entre 5 000 e 10 000. Logo, fixando o 6, temos 3 algarismos para as outras três ordens:
$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números com algarismos distintos
(6 124, 6 142, 6 214, 6 241, 6 412, 6 421)

18. a) $P_6 = 720$
b) TEO $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = P_3 = 6$
c) $P_4 = 24$
d) $P_4 \cdot P_3 = 144$
e) AEIO $\underline{2} \cdot \underline{1} = P_2 = 2$
$\underline{2} \cdot \underline{1}$ AEIO $= P_2 = 2$
Logo, 4 anagramas.

19. a) $\underline{A}\ \underline{G}\ \underline{I}\ \underline{M}\ \underline{O}$
b) $\underline{A}\ \underline{G}\ \underline{I}\ \underline{O}\ \underline{M}$
c) A $\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = P_4 = 24$
GAIMO = 25º anagrama
d) última: OMIGA
penúltima: OMIAG
e) A $\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = P_4 = 24$ anagramas
G $\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot = P_4 = 24$ anagramas
I A $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = P_3 = 6$ anagramas
I G A M O = 1 anagrama
Logo, 55º anagrama é IGAMO.

20. a) MISSISSIPPI tem 4"I", 4 "S", 2 "P" e 1 "M":
$$P_{11}^{4,\,4,\,2} = \frac{11!}{4!4!2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 34\,650$$
b) ARARAQUARA : tem 5 "A" e 3 "R":
$$P_{10}^{5,\,3} = \frac{10!}{5!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 5\,040$$
c) ABOBORA: tem 2 "A", 2 "B" e 2 "O":
$$P_7^{2,\,2,\,2} = \frac{7!}{2!2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 630$$
d) BISCOITO: tem 2 "I" e 2 "O":
$$P_8^{2,\,2} = \frac{8!}{2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 1} = 10\,080$$
e) $\text{A}\underbrace{\text{RARAQUAR}}\text{A}$: fixando A no início e no final da palavra, temos 8 letras, sendo 3 "A" e 3"R":
$$P_8^{3,\,3} = \frac{8!}{3!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 1\,120$$

22. $P_9^{4,\,3,\,2} = \dfrac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1\,260$ maneiras.

23. Devemos ter 7 questões certas e 3 erradas.
$P_{10}^{4,\,3} = \dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$ modos.

24. $P_4^{2,\,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ ordens.

25. a) $A_{4,\,2} = \dfrac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$
b) $A_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
c) $A_{8,\,2} = \dfrac{8!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$
d) $A_{4,\,4} = \dfrac{4!}{0!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$
e) $A_{5,\,1} = \dfrac{5!}{4!} = 5$
f) $A_{7,\,0} = \dfrac{7!}{7!} = 1$
g) $A_{8,\,5} = \dfrac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$
h) $A_{n,\,0} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

26. a) $A_{x,\,2} = \dfrac{x!}{(x-2)!} = \dfrac{x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} = x^2 - x$
b) $A_{x-3,\,2} = \dfrac{(x-3)!}{(x-3-2)!} = \dfrac{(x-3)!}{(x-5)!} = \dfrac{(x-3)(x-4)\cancel{(x-5)!}}{\cancel{(x-5)!}} =$
$= (x-3)(x-4) = x^2 - 7x + 12$
c) $A_{2x+1,\,3} = \dfrac{(2x+1)!}{(2x+1-3)!} = \dfrac{(2x+1)!}{(2x-2)!} =$
$= \dfrac{(2x+1)2x(2x-1)\cancel{(2x-2)!}}{\cancel{(2x-2)!}} = 2x(2x+1)(2x-1) =$
$= 2x\left(4x^2 - 1\right) = 8x^3 - 2x$

27. a) $A_{x-1,\,2} = 30 \Rightarrow \dfrac{(x-1)!}{(x-1-2)!} = 30 \Rightarrow \dfrac{(x-1)!}{(x-3)!} = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)!}}{\cancel{(x-3)!}} = 30 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+4) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x' = 7$ ou $x'' = -4$ (não convém, pois $x - 3 \cap 0 \Rightarrow x \cap 3$)
Portanto, $x = 7$.
b) $A_{x,\,3} = x^3 - 40 \Rightarrow \dfrac{x!}{(x-3)!} = x^3 - 40 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x-1)(x-2) = x^3 - 40 \Rightarrow x\left(x^2 - 3x + 2\right) = x^3 - 40 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{x^3} - 3x^2 + 2x - \cancel{x^3} + 40 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 40 = 0$
$\Delta = 4 - 4(3)(-40) = 484$
$x = \dfrac{2 \pm 22}{6} \Rightarrow x = -\dfrac{10}{3}$ (não convém) ou $x = 4$

28. 1ª *maneira*: usando a fórmula
$A_{30,\,4} = \dfrac{30!}{26!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720$
1ª *maneira*: sem usar a fórmula
$\underline{30} \cdot \underline{29} \cdot \underline{28} \cdot \underline{27} = 657\,720$

29. a) $A_{5,\,4} = \dfrac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

b) $\_\_\ \_\_\ \_\_\ \boxed{5 \text{ ou } 7}$

Queremos, então, $2A_{4,\,3} = 2 \cdot \dfrac{4!}{1!} = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$.

30. $A_{12,\,2} = \dfrac{12!}{10!} = 12 \cdot 11 = 132$

31. a) $A_{9,\,3} = \dfrac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

b) $\_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 7\ }$

$A_{8,\,3} = \dfrac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

c) $\underline{\ 3\ }\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 8\ }$

$A_{7,\,5} = \dfrac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

d) Podemos considerar 5 e 6 um único dígito, uma vez que estão juntos. Temos, então:

$6A_{7,\,5} = 6 \cdot \dfrac{7!}{2!} = 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 15\,120$

32. $A_{6,\,4} = \dfrac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

33. $A_{6,\,4} = \dfrac{6!}{2!} = 360$

34. a) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $A_{5,\,4} = \dfrac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

c) $\underline{\ \text{O}\ }\ \_\_\ \_\_\ \_\_$

$A_{4,\,3} = \dfrac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

d) $\_\_\ \_\_\ \boxed{\underline{\text{F}}\ \underline{\text{I}}}$

$A_{3,\,2} = \dfrac{3!}{1!} = 3 \cdot 2 = 6$

e) O I pode ocupar qualquer um dos 4 lugares. Então:

$4A_{4,\,3} = 4 \cdot \dfrac{4!}{1!} = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$

35. a) $A_{6,\,4} = \dfrac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

b) $\_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 6\ }$

$A_{5,\,3} = \dfrac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

c) $\_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 2,\ 4 \text{ ou } 6\ }$

$3A_{5,\,3} = 3 \cdot \dfrac{5!}{2!} = 3 \cdot 60 = 180$

d) $\_\_\ \_\_\ \_\_\ \underline{\ 1,\ 3 \text{ ou } 5\ }$

$3A_{5,\,3} = 3 \cdot \dfrac{5!}{2!} = 180$

36. $A_{30,\,4} = \dfrac{30!}{26!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720$

37. $A_{5,\,3} = \dfrac{5!}{2!} = 60$

Resolvido passo a passo

5. a) $C_{20,2} = \dfrac{20!}{18!2!} = \dfrac{20 \cdot 19}{2!} = 190$ apertos de mão

38. a) $C_{6,\,4} = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$

b) $C_{5,\,3} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

c) $C_{4,\,1} = \dfrac{4!}{3!1!} = \dfrac{4}{1} = 4$

d) $C_{5,\,4} = \dfrac{5!}{4!1!} = \dfrac{5}{1} = 5$

e) $C_7^5 = \dfrac{7!}{5!2!} = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

f) $\dbinom{7}{6} = \dfrac{7!}{6!1!} = \dfrac{7}{1} = 7$

g) $C_{45,\,44} = \dfrac{45!}{44!1!} = \dfrac{45}{1} = 45$

h) $C_{30,\,26} = \dfrac{30!}{26!4!} = \dfrac{\overset{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{30}} \cdot 29 \cdot \overset{7}{\cancel{28}} \cdot 27}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} = 5 \cdot 29 \cdot 7 \cdot 27 = 27\,405$

39. a) $5 + \dfrac{x!}{2!(x-2)!} = x + 14 \Rightarrow 5 + \dfrac{x(x-1)}{2} = x + 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 + x^2 - x = 2x + 28 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-6)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 6$ ou $x = -3$ (não convém)

Logo, $x = 6$.

b) $\dfrac{(x+3)!}{2!(x+3-2)!} = 15 \Rightarrow \dfrac{(x+3)!}{2!(x+1)!} = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x+3)(x+2)}{2} = 15 \Rightarrow (x+3)(x+2) = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 5x + 6 - 30 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 24 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+8)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -8$ (não convém)

Portanto, $x = 3$.

40. $C_{20,\,3} = \dfrac{20!}{3!17!} = \dfrac{\overset{10}{\cancel{20}} \cdot 19 \cdot \overset{6}{\cancel{18}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} = 1\,140$

41. $C_{10,\,6} = \dfrac{10!}{6!4!} = \dfrac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{\cancel{2}}{\cancel{8}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} = 210$

42. $C_{10,\,8} = \dfrac{10!}{8!2!} = \dfrac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$

43. $C_{6,\,3} \cdot C_{4,\,2} = \dfrac{6!}{3!3!} \cdot \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot 4}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} \cdot \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} = 120$

44. a) $C_{9,\,3} = \dfrac{9!}{3!6!} = \dfrac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 84$

b) $C_{5,\,3} \cdot C_{4,\,2} = \dfrac{5!}{3!2!} \cdot \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} \cdot \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} = 10 \cdot 6 = 60$

c) $C_{4,\,3} \cdot C_{5,\,2} = \dfrac{4!}{3!1!} \cdot \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{4}{1} \cdot \dfrac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 4 \cdot 10 = 40$

45. $C_{30,\,5} = \dfrac{30!}{5!25!} = \dfrac{\cancel{30}\cdot 29\cdot \overset{7}{\cancel{28}}\cdot 27\cdot 26}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot \underset{1}{\cancel{4}}\cdot \underset{1}{\cancel{3}}\cdot \underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1} = 142\,506$

46. Heptágono tem 7 vértices; para fazer um triângulo precisamos de 3 vértices, assim:

$C_{7,\,3} = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 4!} = 35$

47. $C_{52,4} = \dfrac{52!}{4!48!} = \dfrac{\overset{13}{\cancel{52}}\cdot \overset{17}{\cancel{51}}\cdot \overset{25}{\cancel{50}}\cdot 49}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot \underset{1}{\cancel{3}}\cdot \underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1} = 270\,725$

48. a) $C_{5,1}\cdot C_{6,1} = 5\cdot 6 = 30$ formas

b) $C_{5,2}\cdot C_{6,2} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\dfrac{6!}{2!\cdot 4!} = 10\cdot 15 = 150$ formas

c) $C_{11,4} = \dfrac{11!}{4!\cdot 7!} = \dfrac{11\cdot 10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 330$ formas

49. a) $C_{14,3}\cdot C_{10,2} = \dfrac{14!}{3!\cdot 11!}\cdot\dfrac{10!}{2!\cdot 8!} = \dfrac{14\cdot 13\cdot \overset{2}{\cancel{12}}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}}\cdot\dfrac{\overset{5}{\cancel{10}}\cdot 9}{2} =$

$= 16\,380$ modos

b) $C_{24,5} = \dfrac{24!}{5!\cdot 19!}\cdot\dfrac{\cancel{24}\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot \overset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{8}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 42\,504$ modos

c) $C_{14,1}\cdot C_{10,1} = 14\cdot 10 = 140$ modos

50. a) $A\,E\,\underbrace{\_\,\_\,\_}_{C_{8,3}} = \dfrac{8!}{3!\cdot 5!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 56$ comissões

b) $C_{8,5} = C_{8,3} = 56$ comissões

c) $\underset{\substack{\text{ou}\\ E}}{A}\,\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_}_{C_{8,4}} = 2\cdot C_{8,4} = 2\cdot\dfrac{8\cdot 7\cdot \overset{2}{\cancel{6}}\cdot 5}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 140$ comissões

51. a) $\underbrace{H\,H\,H}_{C_{5,3}}\ \underbrace{M}_{C_{6,1}} = C_{5,3}\cdot C_{6,1} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\dfrac{6!}{1!\cdot 5!} = 10\cdot 6 = 60$ maneiras

b) Podemos ter exatamente 3 homens e 1 mulher ou exatamente 4 homens.

$C_{5,3}\cdot C_{6,1} + C_{5,4} = 60 + \dfrac{5!}{4!\cdot 1!} = 60 + 5 = 65$ maneiras

c) Podemos ter exatamente 1 homem e 3 mulheres ou nenhum homem e 4 mulheres.

$C_{5,1}\cdot C_{6,3} + C_{6,4} = \dfrac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\dfrac{6!}{3!\cdot 3!} + \dfrac{6!}{4!\cdot 2!} = 115$ maneiras

52. $C_{10,3} - C_{6,3} - C_{4,3} = \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} - \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} - \dfrac{4!}{3!\cdot 1!} = 96$ modos

53. 24 pontos no total, 4 pontos para formar um quadrilátero:

$C_{24,4} = \dfrac{24!}{20!4!} = \dfrac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 20!} = 10\,626$

Pontos na mesma reta não formam quadrilátero:

$4C_{6,4} = 4\cdot\dfrac{6!}{4!2!} = 4\cdot\dfrac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 4\cdot 15 = 60$

$6C_{4,2} = 6\cdot\dfrac{4!}{2!2!} = 6\cdot\dfrac{4\cdot 3\cdot 2!}{2\cdot 1!} = 6\cdot 5 = 30$

Portanto, o total de possibilidades é $10\,626 - 90 = 10\,536$.

54. $C_{8,\,3} = \dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 56$ triângulos

55. $A_{10,\,3} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$ maneiras

56. $A_{5,\,2} = \dfrac{5!}{3!} = 5\cdot 4 = 20$ maneiras

57. $A_{10,\,3} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$ maneiras

58. MATEMÁTICA $\rightarrow$ 2 "M", 3 "A", 2 "T"

$P_{10}^{2,\,3,\,2} = \dfrac{10!}{2!3!2!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}}{\cancel{2}\cdot \cancel{2}} = 151\,200$

59. $C_{6,\,4} = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ quadriláteros

60. $C_{n,\,2} = 36 \Rightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 36 \Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(n-1) = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+8)(n-9) = 0 \Rightarrow n = -8$ (não convém) ou $n = 9$

Portanto, estavam reunidos 9 amigos.

61. a) $P_6 = 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$ anagramas

b) L __ __ __ __ __

$P_5 = 5! = 120$ anagramas

c) L O __ __ __ __

$P_4 = 4! = 24$ anagramas

d) O total de maneiras para escolher as vogais que iniciam e terminam a palavra é $A_{3,\,2}$. Determinadas essas vogais, há 4 letras a serem permutadas, ou seja, P_4 anagramas.

$A_{3,\,2}\cdot P_4 = \dfrac{3!}{1!}\cdot 4! = 6\cdot 24 = 144$ anagramas

e) Há 3 consoantes que podem iniciar a palavra e 3 vogais que podem terminá-la. As 4 letras restantes se permutam.

$3\cdot 3P_4 = 9\cdot 4! = 9\cdot 24 = 216$ anagramas

f) $\boxed{\text{L O G}}$ __ __ __

Podemos considerar LOG como uma única letra. Logo, trata-se de $P_4 = 4! = 24$ anagramas.

g) Há P_3 maneiras de L, O, G estarem juntas.

Temos, então:

$P_3\cdot P_4 = 3!4! = 6\cdot 24 = 144$ anagramas

62.

$\boxed{\underset{\text{5 pos.}}{\uparrow}}\ \underset{\text{5 pos.}}{\uparrow}\ \underset{\text{4 pos.}}{\uparrow}\ \underset{\text{3 pos.}}{\uparrow}$

$5A_{5,\,3} = 5\cdot\dfrac{5!}{2!} = 5\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 300$

63. $\underbrace{\_\,\_\,\_}_{\text{letras}}\ \underbrace{\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{algarismos}}$

Como as letras são A e B para ocuparem três espaços, temos $2\cdot 2\cdot 2 = 8$.

Os algarismos são pares (0, 2, 4, 6, 8) e sem repetição; logo, é o caso de $A_{5,\,4}$.

Total de placas $= 8\cdot A_{5,\,4} = 8\cdot\dfrac{5!}{1!} = 8\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 960$

64. $C_{8,\,2} = \dfrac{8!}{2!6!} = \dfrac{8\cdot 7}{2} = 28$ duplas

65. De todas as comissões possíveis, devemos subtrair aquelas em que não haja mulheres:

$$C_{20,\,4} - C_{14,\,4} = \frac{20!}{4!16!} - \frac{14!}{4!10!} =$$

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{20}} \cdot 19 \cdot \overset{3}{\cancel{18}} \cdot 17}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} - \frac{\overset{7}{\cancel{14}} \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot 11}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 4\,845 - 1001 = 3\,844$$

66. a) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

b) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3 \cdot 2}} = 35$

c) $\binom{6}{0} = \frac{6!}{0!6!} = 1$

d) $\binom{20}{18} = \frac{20!}{18!2!} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

67. $\binom{m}{9} = \binom{m}{8} \Rightarrow m = 9 + 8 = 17$

$\binom{m}{17} = \binom{17}{17} \Rightarrow \frac{17!}{17!0!} = 1$

68. $2x = x + 1 \Rightarrow x = 1$ ou $2x + x + 1 = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{3}$ (não convém)

Portanto, $x = 1$.

69. $\dfrac{\frac{12!}{4!8!}}{\frac{12!}{5!7!}} = \frac{\cancel{12!}}{4!8!} \cdot \frac{5!7!}{\cancel{12!}} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}\,\cancel{7!}}{\cancel{4!}\,8 \cdot \cancel{7!}} = \frac{5}{8}$

70. a) $2^5 = 32$

b) $2^6 - \binom{6}{0} = 64 - 1 = 63$

c) $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \overset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 252$

d) $\binom{9}{1} + \binom{9}{3} = \frac{9!}{8!1!} + \frac{9!}{3!6!} = 9 + \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 93$

72. • $\binom{n}{p+1} = 2\binom{n}{p} \Rightarrow \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} =$

$= 2 \cdot \frac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow \frac{1}{(p+1)p!(n-p-1)!} =$

$= \frac{2}{p!(n-p)(n-p-1)!} \Rightarrow \frac{1}{p+1} = \frac{2}{n-p} \Rightarrow$

$\Rightarrow n - p = 2p + 2$ (I)

• $\binom{n}{p+2} = 3\binom{n}{p} \Rightarrow \frac{n!}{(p+2)!(n-p-2)!} =$

$= 3 \cdot \frac{n!}{(n-p)!p!} \Rightarrow \frac{1}{(p+2)(p+1)p!(n-p-2)!} =$

$= \frac{3}{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)!p!} \Rightarrow$

$\Rightarrow (p+2)(p+1) = \frac{(n-p)(n-p-1)}{3}$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$(p+2)(p+1) = \frac{(2p+2)(2p+2-1)}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(p^2 + 3p + 2) = (2p+2)(2p+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3p^2 + 9p + 6 = 4p^2 + 2p + 4p + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -p^2 + 3p + 4 = 0 \Rightarrow p^2 - 3p - 4 = 0$

$\Delta = 9 - 4(1)(-4) = 25$

$p = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow p = 4$ ou $p = -1$ (não convém)

Como $n - p = 2p + 2$, então:

$n - 4 = 2(4) + 2 \Rightarrow n - 4 = 10 \Rightarrow n = 14$

Portanto, $n = 14$ e $p = 4$.

73. a) $C_{4,0} + C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + C_{4,4} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} +$

$+ \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$

b) $C_{8,1} + C_{8,2} + \ldots + C_{8,7} + C_{8,8} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \ldots + \binom{8}{7} +$

$+ \binom{8}{8} = 127$

74. Há $\binom{6}{1}$ maneiras de abrir uma das janelas, $\binom{6}{2}$ maneiras de abrir duas das janelas e assim por diante até $\binom{6}{6}$ maneiras de abrir as seis janelas. Logo:

$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \ldots + \binom{6}{6} = 2^6 - \binom{6}{0} = 64 - 1 = 63$ maneiras

75. Há $\binom{10}{3}$ maneiras de fazer triângulos, $\binom{10}{4}$ maneiras de fazer quadriláteros, e assim por diante, até $\binom{10}{10}$ maneiras de fazer decágonos.

Logo:

$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \ldots + \binom{10}{10} = 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} =$

$= 1024 - 1 - 10 - 45 = 968$ polígonos

76. Há $\binom{8}{0}$ maneiras de não escolher cobertura alguma, $\binom{8}{1}$ maneiras de escolher uma só cobertura, $\binom{8}{2}$ maneiras de escolher duas das coberturas, e assim por diante, até $\binom{8}{8}$ maneiras de escolher as 8 coberturas juntas. Assim:

$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \ldots + \binom{8}{8} = 2^8 = 256$ modos de fazer a escolha.

77. $\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\binom{5}{0}}x^5 + \underset{\underset{5}{\downarrow}}{\binom{5}{1}}x^4 \cdot 2 + \underset{\underset{10}{\downarrow}}{\binom{5}{2}}x^3 \cdot 2^2 + \underset{\underset{10}{\downarrow}}{\binom{5}{3}}x^2 \cdot 2^3 + \underset{\underset{5}{\downarrow}}{\binom{5}{4}}x \cdot 2^4 +$

$+ \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\binom{5}{5}}2^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

b) $\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\binom{4}{0}}a^4 - \underset{\underset{4}{\downarrow}}{\binom{4}{1}}a^3 \cdot 3 + \underset{\underset{6}{\downarrow}}{\binom{4}{2}}a^2 \cdot 3^2 - \underset{\underset{4}{\downarrow}}{\binom{4}{3}}a \cdot 3^3 + \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\binom{4}{4}}3^4 =$

$= a^4 - 12a^3 + 54a^2 - 108a + 81$

78. a) $15 + 1 = 16$ termos

b) $\binom{15}{0}x^{15}1^0 = x^{15}$

c) $\binom{15}{2}x^{15-2}1^2 = 105x^{13}$

Para refletir

Página 255

$$C_{n,\,n} = \frac{\cancel{n!}^{\,1}}{\cancel{n!}_{\,1}\,0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

Página 263

$$\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0! \cdot \cancel{n!}} = 1$$

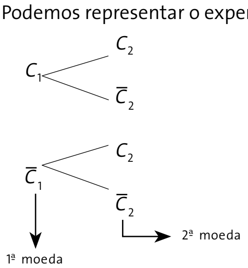
$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n\cancel{(n-1)!}}{1! \cdot \cancel{(n-1)!}} = n$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

Capítulo 12

1. Neste caso o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3\}$.
   A: ocorrência do número 2 = $\{2\}$
   B: ocorrência de número ímpar = $\{1, 3\}$

2. Espaço amostral $\Omega = \{(C_1, C_2), (C_1, \overline{C}_2), (\overline{C}_1, C_2), (\overline{C}_1, \overline{C}_2)\}$, em que C_1 e C_2 são as caras e $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_2$ são as coroas.
   Podemos representar o experimento da seguinte forma:



   A: exatamente uma cara = $\{(C_1, \overline{C}_2), (\overline{C}_1, C_2)\}$
   B: coroa em ambas = $\{(\overline{C}_1, \overline{C}_2)\}$
   C: pelo menos uma cara = $\{(C_1, C_2), (C_1, \overline{C}_2), (\overline{C}_1, C_2)\}$

3. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   a) A: número par = $\{2, 4, 6\}$
   $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

   b) B: número primo = $\{2, 3, 5\}$
   $p(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

   c) C: número 3 = $\{3\}$
   $p(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6} \simeq 16{,}7\%$

   d) D: número menor do que 3 = $\{1, 2\}$
   $p(D) = \dfrac{n(D)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \simeq 33{,}3\%$

   e) E: número menor do que 1 = $\{\ \}$
   $p(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{0}{6} = 0\%$

   f) F: número menor do que 7 = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   $p(F) = \dfrac{n(F)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{6} = 100\%$

4. $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, V_1, V_2, V_3, V_4\} \Rightarrow n(\Omega) = 10$

   a) A: uma bola vermelha = $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$
   $p(A) = \dfrac{4}{10} = 40\%$

   b) B: uma bola branca = $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$
   $p(B) = \dfrac{6}{10} = 60\%$

5. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \Rightarrow n(\Omega) = 13$

   a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
   $p(A) = \dfrac{6}{13} \simeq 46{,}2\%$

   b) $B = \{3, 6, 9, 12\}$
   $p(B) = \dfrac{4}{13} \simeq 30{,}8\%$

   c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
   $p(C) = \dfrac{6}{13} \simeq 46{,}2\%$

   d) $D = \{9, 10, 11, 12, 13\}$
   $p(D) = \dfrac{5}{13} \simeq 38{,}5\%$

   e) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   $p(E) = \dfrac{9}{13} \simeq 69{,}2\%$

   f) $F = \{6, 7, 8, 9\}$
   $p(F) = \dfrac{4}{13} \simeq 30{,}8\%$

   g) $G = \{4, 8, 12\}$
   $p(G) = \dfrac{3}{13} \simeq 23{,}1\%$

6. $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
   $n(\Omega) = 36$

   a) $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
   $n(A) = 6$
   $p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} \simeq 16{,}7\%$

   b) $B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$
   $n(B) = 18$
   $p(B) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

   c) $C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$
   $n(C) = 15$
   $p(C) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12} \simeq 41{,}7\%$

   d) $D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (6, 1)\}$
   $n(D) = 21$
   $p(D) = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12} \simeq 58{,}3\%$

e) $E = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4)\}$

$n(E) = 9$

$p(E) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 25\%$

f) $F = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$n(F) = 6$

$p(F) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}7\%$

g) $G = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$

$n(G) = 14$

$p(G) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \simeq 38{,}9\%$

7. $\Omega = \{2c, 2o, 2e, 2p, ..., Ac, Ao, Ae, Ap\} \Rightarrow n(\Omega) = 52$

a) $A = \{2c, 3c, 4c, ..., Ac\}$

$n(A) = 13$

$p(A) = \frac{13}{52} = 25\%$

b) $B = \{Ac, Ao, Ae, Ap\}$

$n(B) = 4$

$p(B) = \frac{4}{52} \simeq 7{,}7\%$

c) $C = \{Ac\}$

$n(C) = 1$

$p(C) = \frac{1}{52} \simeq 1{,}9\%$

d) $D = \{2o, 3o, ..., Ao, 2c, 3c, ..., Ac\}$

Para cada naipe há 13 cartas, então $n(D) = 26$.

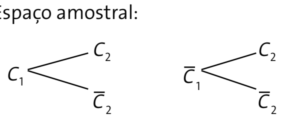
$p(D) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} = 50\%$

e) $E = \{3o, 3c\}$

$n(E) = 2$

$p(E) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \simeq 3{,}8\%$

8. Espaço amostral:



$\Omega = \{(C_1, C_2), (C_1, \overline{C}_2), (\overline{C}_1, C_2), (\overline{C}_1, \overline{C}_2)\}$

a) $A = \{(C_1, C_2)\}$

$n(A) = 1$

$p(A) = \frac{1}{4} = 25\%$

b) $B = \{(C_1, \overline{C}_2), (\overline{C}_1, C_2)\}$

$n(B) = 2$

$p(B) = \frac{2}{4} = 50\%$

c) $C = \{(\overline{C}_1, \overline{C}_2)\}$

$n(C) = 1$

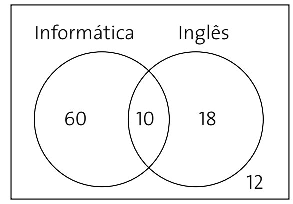
$p(C) = \frac{1}{4} = 25\%$

d) $D = \{(\overline{C}_1, C_2), (C_1, \overline{C}_2)\}$

$n(D) = 2$

$p(D) = \frac{2}{4} = 50\%$

9. Complementando o diagrama de Venn para o caso, temos:



a) Frequentam somente o curso de informática = 60

Probabilidade de cursar somente o curso de informática =

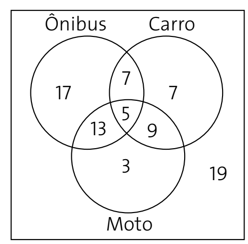
$= \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 60\%$

b) Não frequentam nenhum curso = 12

Probabilidade de não frequentar nenhum curso =

$= \frac{12}{100} = \frac{3}{25} = 12\%$

10. Temos o seguinte diagrama de Venn:



$n(\Omega) = 80$

a) A: somente ônibus

$n(A) = 17$

$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{17}{80} = 21{,}25\%$

b) B: somente carro

$n(B) = 7$

$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{80} = 8{,}75\%$

c) C: carro e ônibus, mas não moto

$n(C) = 7$

$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{7}{80} = 8{,}75\%$

d) D: nenhum veículo

$n(D) = 19$

$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{19}{80} = 23{,}75\%$

e) E: apenas um dos veículos

$n(E) = \underbrace{17}_{\text{apenas ônibus}} + \underbrace{7}_{\text{apenas carro}} + \underbrace{3}_{\text{apenas moto}} = 27$

$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{27}{80} = 33{,}75\%$

11. Sendo Ω o espaço amostral do experimento e A o evento: "sair o anagrama AMOR", temos que:

- $n(\Omega) = P_4 = 4! = 24$
- $n(A) = 1$

Assim, a probabilidade "procurada" é dada por: $p(A) = \frac{1}{24}$

12. a) O número de formas "procurado" é dado por:

$$C_{52,\,2} = \frac{52!}{2! \cdot 50!} = 1326$$

b) O número de maneiras "procurado" é dado por:

$$C_{13,\,2} = \frac{13!}{2! \cdot 11!} = 78$$

c) Sendo Ω o espaço amostral do experimento e A o evento: "saírem duas cartas de espadas", temos que:

- $n(\Omega) = C_{52,\,2} = 1326$
- $n(A) = C_{13,\,2} = 78$

Assim, a probabilidade "procurada" é dada por:

$$p(A) = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

13. a) Evento A: número par

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{17}$$

b) Evento B: número primo

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{17}$$

c) Evento C: par ou primo

$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17\}$

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{14}{17}$$

d) Evento D: par e primo

$D = \{2\}$

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{1}{17}$$

e) Evento E: nem par nem primo

$$1 - p(\text{par ou primo}) = 1 - \frac{14}{17} = \frac{3}{17}$$

f) Evento F: par mas não primo

$$p(\text{par não primo}) = p(\text{par}) - p(\text{par e primo}) = \frac{8}{17} - \frac{1}{17} =$$
$$= \frac{7}{17}$$

g) Evento G: primo mas não par

$$p(\text{primo não par}) = p(\text{primo}) - p(\text{primo e par}) =$$
$$= \frac{7}{17} - \frac{1}{17} = \frac{6}{17}$$

14. a) Evento A: copas $\Rightarrow n(A) = 13$

$$p(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 25\%$$

b) Evento B: dama $\Rightarrow n(B) = 4$

$$p(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \simeq 7,7\%$$

c) Evento C: copas ou dama

O evento copas e dama tem 1 elemento.

Então, $p(\text{copas e dama}) = \frac{1}{52}$. Logo:

$p(\text{copas ou dama}) = p(\text{copas}) + p(\text{dama}) - p(\text{copas e}$ $\text{dama}) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \simeq 30,8\%$

d) Evento D: copas e dama

$$p(\text{copas e dama}) = \frac{1}{52}$$

e) $\bar{E}$: não copas

Se $p(E) = \frac{13}{52}$, então:

$$p(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - \frac{13}{52} = \frac{39}{52} = 75\%$$

f) $\bar{F}$: não dama

Se $p(F) = \frac{4}{52}$, então:

$$p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} \simeq 92,3\%$$

g) G: nem copas nem dama:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \leqslant B}) = 1 - p(A \leqslant B) = 1 - \frac{4}{13} =$$
$$= \frac{9}{13} \simeq 69,2\%$$

15. Evento A: soma $8 = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow n(A) = 5$

Evento B: números iguais $= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5),$ $(6, 6)\} \Rightarrow n(B) = 6$

Evento $A \cap B$: $\{(4, 4)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

Logo:

$n(A \leqslant B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 1 = 10$

Assim:

$$p(A \leqslant B) = \frac{n(A \leqslant B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \simeq 27,78\%$$

16. Evento A: ser homem $\Rightarrow n(A) = 16$

Evento B: ter cabelo castanho $\Rightarrow n(B) = \frac{16}{2} + \frac{20}{2} = 18$

Evento $(A \cap B)$: homem e cabelo castanho $\Rightarrow n(A \cap B) = 8$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 16 + 18 - 8 = 26$

Logo:

$$p(A \cup B) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \simeq 72,2\%$$

17. Quando o dado é viciado, os eventos elementares não são equiprováveis. Porém, sabemos que $p(\Omega) = 1$

Assim, sendo A o evento: "sair o número 6", temos que:

$p(A) + p(\bar{A}) = 1$

Então, como $p(A) = \frac{3}{11}$, concluímos que: $\frac{3}{11} + p(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$

Portanto, a probabilidade "procurada" é igual a $\frac{8}{11}$.

18. Quando a moeda é viciada, os eventos elementares não são equiprováveis. Porém, sabemos que $p(\Omega) = 1$.

Assim, sendo C o evento "sair cara", temos que:

$P(C) + p(\bar{C}) = 1$

Então, como $p(\bar{C}) = 3 \cdot p(C)$, concluímos que:

$p(C) + 3p(C) = 1 \Rightarrow 4\,p(C) = 1 \Rightarrow p(C) = \frac{1}{4}$

Portanto, a probabilidade "procurada" é dada por:

$$p(\bar{C}) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

19. De acordo com o enunciado temos que:

$p(1) + 2p(1) + 3p(1) + 4p(1) + 5p(1) + 6p(1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 21p(1) = 1 \Rightarrow p(1) = \frac{1}{21}$

a) $p(3) = 3 \cdot p(1) = 3 \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{7}$

b) $p(2) + p(4) = 2 \cdot p(1) + 4 \cdot p(1) = 2 \cdot \frac{1}{21} + 4 \cdot \frac{1}{21} = \frac{6}{21}$

c) $p(2) + p(4) + p(6) = 2 \cdot p(1) + 4 \cdot p(1) + 6 \cdot p(1) =$
$= 2 \cdot \frac{1}{21} + 4 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{12}{21}$

20. Espaço amostral: grupos de duas peças tomadas de um grupo de quarenta

$$n(\Omega) = C_{40,\,2} = \frac{40!}{2!38!} = \frac{39 \cdot 40}{2} = 780$$

a) As peças perfeitas são 37. Logo, se o evento A for escolher duas peças perfeitas, temos:

$$n(A) = C_{37,\,2} = \frac{37!}{2!35!} = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$$

Logo:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{666}{780} \simeq 85{,}4\%$$

b) Evento B: duas peças defeituosas de um grupo de três

$$n(B) = C_{3,\,2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Logo:

$$p(B) = \frac{3}{780} \simeq 0{,}4\%$$

c) Evento C: pelo menos uma peça defeituosa
O evento C é complementar do evento A.
Logo:

$$p(C) = 1 - p(A) = 1 - \frac{666}{780} = \frac{114}{780} \simeq 14{,}6\%$$

21. O espaço amostral tem $C_{52,\,2}$ elementos.

$$n(\Omega) = \frac{52!}{2!50!} = \frac{51 \cdot 52}{2} = 1\,326$$

a) Evento A: escolher duas cartas de ouros

$$n(A) = C_{13,\,2} = \frac{13!}{2!11!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$$

Logo:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{78}{1\,326} = \frac{1}{17} \simeq 5{,}9\%$$

b) Os pares de cartas (copas, ouros) são em número de $13 \cdot 13 = 169$. Logo, o evento B: uma de copas e outra de ouros é tal que $n(B) = 169$.

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{169}{1\,326} = \frac{13}{102} \simeq 12{,}7\%$$

c) Evento C: pelo menos uma carta é de ouros

Das 52 cartas, 13 são de ouros e 39 não. Portanto, $\binom{39}{2}$ é o número combinações de 2 cartas, das quais nenhuma é de ouros. Assim:

$$p(C) = 1 - \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} = 1 - \frac{741}{1\,326} = \frac{585}{1\,326} = \frac{195}{442} \simeq 44{,}1\%$$

22. Na opção 1 temos uma probabilidade de $\frac{2}{8} = 25\%$ de achar uma bomba.

Na opção 2 temos uma probabilidade de $\frac{1}{8} = 12{,}5\%$ de achar uma bomba.

Na opção 3 temos 7 bombas restantes $(10 - 2 - 1 = 7)$ espalhadas em 46 quadradinhos $(64 - 9 - 9 = 46)$, de modo que a probabilidade de achar uma bomba é $\frac{7}{46} \simeq 15{,}2\%$.

Assim, na próxima jogada é preferível escolher algum dos 8 quadradinhos que cercam o número 1 já revelado.

23. Evento A: 4 no primeiro dado $\Rightarrow p(A) = \frac{1}{6}$

Evento B: a soma dos resultados é 9 $\Rightarrow p(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Evento $(A \cap B)$: 4 no primeiro dado e soma 9 $\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{36}$

Logo:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}$$

24. Escolhemos ao acaso uma pessoa do grupo, temos que:

a) $p(A/H) = \frac{p(A \cap H)}{p(H)} = \frac{\frac{80}{350}}{\frac{190}{350}} = \frac{8}{19}$

b) $p(P/M) = \frac{p(P \cap M)}{p(M)} = \frac{\frac{90}{350}}{\frac{160}{350}} = \frac{9}{16}$

c) $p(D/H) = \frac{p(D \cap H)}{p(H)} = \frac{\frac{50}{350}}{\frac{190}{350}} = \frac{5}{19}$

d) $p(A/M) = \frac{p(A \cap M)}{p(M)} = \frac{\frac{40}{350}}{\frac{160}{350}} = \frac{1}{4}$

e) $p(\overline{C}/\overline{M}) = \frac{p(\overline{A} \cap \overline{M})}{p(\overline{M})} = \frac{\frac{110}{350}}{\frac{190}{350}} = \frac{11}{19}$

f) $p(\overline{D}/H) = \frac{p(\overline{D} \cap H)}{p(H)} = \frac{\frac{140}{350}}{\frac{190}{350}} = \frac{14}{19}$

g) $p(P/\overline{H}) = \frac{p(P \cap \overline{H})}{p(\overline{H})} = \frac{\frac{90}{350}}{\frac{160}{350}} = \frac{9}{16}$

25. $\Omega = \{(C,C,C), (C,C,\overline{C}), (C,\overline{C},C), (C,\overline{C},\overline{C}), (\overline{C},C,C), (\overline{C},C,\overline{C}), (\overline{C},\overline{C},C), (\overline{C},\overline{C},\overline{C})\}$
$n(\Omega) = 8$

a) A: três caras $\Rightarrow p(A) = \frac{1}{8}$

b) B: três caras, primeira cara $\Rightarrow p(B) = \frac{1}{4}$

c) C: exatamente 2 caras: $p(C) = \frac{3}{8}$

d) D: 2 caras, primeira foi coroa: $p(D) = \frac{1}{4}$

e) E: cara no segundo lançamento, nos lançamentos houve duas coroas e uma cara $\Rightarrow p(E) = \frac{1}{3}$

f) F: cara no segundo lançamento, com três caras obtidas $\Rightarrow$
$\Rightarrow p(F) = 1$

g) G: cara no segundo lançamento, pelo menos uma cara foi obtida $\Rightarrow p(G) = \frac{4}{7}$

26. $\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M),$
$(F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$
$n(\Omega) = 8$

Evento A: o casal tem 2 meninas $\Rightarrow p(A) = \frac{3}{8}$

Evento B: primeira criança é menina $\Rightarrow p(B) = \frac{4}{8}$

$A \cap B$: o casal tem duas crianças, sendo a primeira uma menina $\Rightarrow$
$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Logo:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$$

27. a) Evento A: primeira carta seja copas $\Rightarrow p(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

b) Evento B: segunda carta seja paus, dado que a primeira seja copas $\Rightarrow p(B) = \frac{1}{4}$

c) Evento C: a primeira carta seja copas e a segunda seja paus $\Rightarrow$
$\Rightarrow p(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

28. Sejam os eventos:
- A: sair parafuso bom na 1ª retirada.
- B: sair parafuso defeituoso na 2ª retirada.

Temos que:

$p(A \cap B) = \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} = \frac{1}{11}$

Assim, a probabilidade "procurada" é igual a $\frac{1}{11}$.

29. Evento A: ter deficiência de certa vitamina
Evento B: pessoas do grupo A que têm certa doença
$p(A \cap B) = 30\% \cdot 10\% = 3\%$

30. $p(A) = 0{,}2$, $p(B) = 0{,}4$, A e B são independentes

a) $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$

b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}52$

31. A e B são independentes, $p(A) = 0{,}5$, $p(A \cap B) = 0{,}3$

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow 0{,}3 = 0{,}5p(B) \Rightarrow p(B) = 0{,}6$

32. Evento A: sair número ímpar no 1º dado
$p(A) = \frac{3}{6}$
Evento B: soma dos resultados $7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3),$
$(5, 2), (6, 1)\}$
$p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

a) $p(A) = \frac{1}{2}$

b) $p(B) = \frac{1}{6}$

c) $A \cap B = \{(1, 6), (3, 4), (5, 2)\}$. Então:
$p(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

d) $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$

e) Sim, pois $p(B/A) = p(B)$ ou $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

33. a) A probabilidade de saírem duas balas de hortelã (a 1ª de hortelã e a 2ª de hortelã) é dada por: $\frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{7}$

b) A probabilidade de saírem duas balas de morango (a 1ª de morango e a 2ª de morango) é dada por: $\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} = \frac{2}{35}$

c) A probabilidade de não sair nenhuma bala de limão (a 1ª não é limão e a 2ª não é limão) é dada por: $\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$

34. O espaço amostral é o conjunto de pares (moeda, dado).
Então, $n(\Omega) = 12$.
Evento A: $n(A) = 6$
Evento B: $n(B) = 2$
$n(A \cap B) = 1$
Então:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6 + 2 - 1 = 7$
Assim:

$$p(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{12} \simeq 58{,}3\%$$

35. a) Evento A: carta vermelha $\Rightarrow p(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

Evento B: sair cara $\Rightarrow p(B) = \frac{1}{2}$

Evento $A \cap B$: carta vermelha e cara $\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{4}$

O evento lançar uma moeda e retirar uma carta de um baralho produz pares (moeda, carta).

Sendo C : cara; $\overline{C}$: coroa; V : vermelha e $\overline{V}$: preta, podemos ter (C, V), $(C, \overline{V})$, $(\overline{C}, V)$, $(\overline{C}, \overline{V})$. Logo:
$p(C, V) = \frac{1}{4} = 25\%$

b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$
$= \frac{3}{4} = 75\%$

c) O espaço amostral tem 104 pares (moeda, carta).
O evento C, carta de figura (dama, valete, rei) e coroa, tem:

$\underset{\text{figura}}{3} \cdot \underset{\text{naipes}}{4} \cdot \underset{\text{coroa}}{1} = 12$ elementos

Logo:
$p(C) = \frac{12}{104} \simeq 11{,}5\%$

d) Evento A: carta de figura $\Rightarrow n(A) = 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow p(A) = \dfrac{12}{52}$

Evento B: coroa $\Rightarrow n(B) = 1 \Rightarrow p(B) = \dfrac{1}{2}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{12}{52} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{12}{104} =$

$= \dfrac{64}{104} = \dfrac{16}{26} \simeq 61{,}5\%$

36. Pelo enunciado, temos que:

- se não chover, a chance de pescar algum peixe é de 80%; logo, se não chover, a chance de não pescar nenhum peixe é de 20%.
- se chover, a chance de pescar algum peixe é de 30%; logo, se chover, a chance de não pescar nenhum peixe é de 70%.
- a chance de chover num determinado dia é de 40%; logo, a chance de não chover nesse dia é de 60%.

Assim:

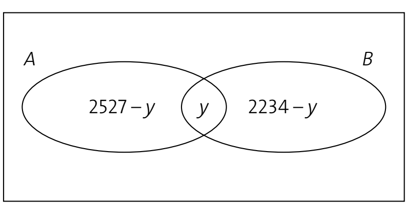
a) a probabilidade de o pescador não pescar nenhum peixe é dada por:

$$p = \frac{60}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{70}{100} = 40\%$$

b) a probabilidade de ter chovido, sabendo que o pescador não pescou nenhum peixe, é dada por:

$$p = \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{70}{100}}{\frac{60}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{70}{100}} = \frac{\frac{28}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{7}{10} = 70\%$$

37. Sendo y o número de pessoas dos dois antígenos, temos:



$2527 - y + y + 2234 - y + 1846 = 6000 \Rightarrow y = 607$

Logo:

$$p = \frac{607}{6000} \simeq 10{,}11\%$$

38. A probabilidade, nesse caso, é:

$$\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

a) $n = 5, k = 5$

$$p(A) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}$$

b) $n = 5, k = 2$

$$p(B) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

c) $n = 5,\ k = 1$

$$p(C) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

d) $p(D) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{32}$ (os eventos são independentes)

39. Usando a fórmula $\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, em que n é o número de filhos e k é o número de meninos, temos:

a) $\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \dfrac{6!}{3!3!} \cdot \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \dfrac{1}{64} = \dfrac{20}{64} = \dfrac{5}{16}$

b) $\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \dfrac{6!}{4!2!} \cdot \dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{6 \cdot 5}{2} \cdot \dfrac{1}{64} = \dfrac{15}{64}$

40. $\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \dfrac{6!}{4!2!} \cdot \dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{6 \cdot 5}{2} \cdot \dfrac{1}{64} = \dfrac{15}{64}$

41. $\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{3} = \dfrac{10 \cdot 1 \cdot 125}{6^2 \cdot 6^3} = \dfrac{625}{3\,888} \simeq 16\%$

42. a) $P = (0{,}4)8 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{8} = \dfrac{256}{390\,625} \simeq 0{,}066\%$

b) $\binom{8}{6}(0,4)^6(0,6)^2 = \dfrac{8!}{6!2!}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{6}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2} =$

$= \dfrac{8 \cdot 7}{2} \cdot \dfrac{64}{15\,625} \cdot \dfrac{9}{25} = \dfrac{16\,128}{390\,625} \simeq 4{,}13\,\%$

43. Os eventos são independentes, logo a probabilidade de a 4ª criança ser menino é 50%.

44. Pelos dados do problema, temos:

Homem / Mulher	C	c
c	Cc	cc
c	Cc	cc

A probabilidade de nascer filho de olhos escuros é $\dfrac{1}{2}$ (2 em 4) e a probabilidade de nascer homem é $\dfrac{1}{2}$.

Logo, a probabilidade total é:

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} = 25\%$

45. Pelos dados do problema, temos:

M / F	W	w
w	Ww	ww
w	Ww	ww

Para ser branca, a cria deve ser ww. Logo:

$p(\text{branca}) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

46. Sendo m: gene recessivo e M: gene dominante, temos:

M / H	M	m
m	mM	mm
m	mM	mm

Logo, a chance de o descendente ter polidactilia é $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

Pensando no Enem

1. Trabalhando coxa, abdômen e um terceiro músculo, temos:
coxa abdômen ___
$1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$
Trabalhando coxa e outros 2 grupos (sem abdome), temos:
coxa ___ ___
$1 \cdot C_{5,\,2} = 10$
Trabalhando abdome e outros 2 grupos (sem coxa), temos:
abdome ___ ___
$1 \cdot C_{5,\,2} = 10$
Total: $5 + 10 + 10 = 25$
Resposta: alternativa **d**.

2. Para somar R$ 3,50 com as moedas disponíveis existem 4 modos diferentes:
1º) 7 moedas de R$ 0,50, com apenas 1 ordem.
2º) 5 moedas de R$ 0,50 e 1 moeda de R$ 1,00, com:

$$P_6^{(5)} = \frac{6!}{5!} = 6 \text{ ordens}$$

3º) 3 moedas de R$ 0,50 e 2 moedas de R$ 1,00, com:

$$P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ ordens}$$

4º) 1 moeda de R$ 0,50 e 3 moedas de R$ 1,00, com:

$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{3!} = 4 \text{ ordens}$$

Total: $1 + 6 + 10 + 4 = 21$ sequências
Resposta: alternativa **e**.

3. Com os irmãos na barraca para 3 pessoas, temos:

$$\underset{1}{\underline{\ \text{I}\ }} \cdot \underset{1}{\underline{\ \text{R}\ }} \cdot \underset{10}{\underline{\quad}} \text{ e } \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{C_{9,\,4}} \cdot \text{ e } \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{C_{5,\,5}} =$$

$= 10 \cdot 126 = 1260$

Com os irmãos na barraca para 4 pessoas, temos:

$$\underset{1}{\underline{\ \text{I}\ }} \cdot \underset{1}{\underline{\ \text{R}\ }} \cdot \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{C_{10,\,2}} \cdot \text{ e } \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{C_{8,\,3}} \cdot \text{ e } \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{C_{5,\,5}} =$$

$= 45 \cdot 56 = 2520$

Com os irmãos na barraca para 5 pessoas, temos:

$$\underset{1}{\underline{\ \text{I}\ }} \cdot \underset{1}{\underline{\ \text{R}\ }} \cdot \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{C_{10,\,3}} \cdot \text{ e } \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{C_{7,\,3}} \cdot \text{ e } \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{C_{4,\,4}} =$$

$= 120 \cdot 35 = 4200$

Total: $1260 + 2520 + 4200 = 7980$
Resposta: alternativa **d**.

4. Considerando que a escolha do bairro foi aleatória com $\frac{1}{4}$ de probabilidade para cada um, a probabilidade de não obter sucesso é:

$$\frac{1}{4} \cdot 0{,}55 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}47 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}30 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}35 = 0{,}4175$$

A probabilidade de ter escolhido *C*, sabendo que não houve sucesso, é:

$$p = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0{,}30}{0{,}4175} \simeq 0{,}18, \text{ ou seja, } 18\%$$

Resposta: alternativa **c**.

5. A probabilidade de os dois dados terem o mesmo número é:

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Para que isso ocorra 3 vezes consecutivas, temos:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

Resposta: alternativa **e**.

6. O total de alunos envolvidos é 280 alunos, e 1 personagem esconde 1 objeto em 1 cômodo de um total de 5 objetos e 6 personagens em 9 cômodos, assim:
$5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$ combinações
Logo, há 10 alunos a mais do que as possíveis respostas.
Resposta: alternativa **a**.

7. Total de cores primárias e secundárias: $3 + C_{3,\,2} = 6$
Total de cores com tonalidade: $3 \cdot 6 = 18$
Por fim, incluindo o preto e o branco: $18 + 2 = 20$
Resposta: alternativa **c**.

8. 1º) Retirar 1 bola da urna I e colocá-la na urna II.
2º) Retirar 1 bola da urna II.

$$P(\text{Am}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{11} = \frac{4}{110}$$

$$P(\text{Az}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{11} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{11} = \frac{13}{110}$$

$$P(\text{Br}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{11} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{22}{110}$$

$$P(\text{Verd}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{11} = \frac{31}{110}$$

$$P(\text{Verm}) = \frac{4}{11} = \frac{40}{110} \Rightarrow \text{maior probabilidade}$$

Resposta: alternativa **e**.

9.
$$\begin{cases} 21\% \text{ de } 500 = 105 \rightarrow \text{não opinaram} \\ 12\% \text{ de } 500 = 60 \rightarrow \text{acharam chato} \end{cases}$$

Assim, somente opinaram $500 - 105 = 395$ visitantes. Logo,

$$P = \frac{60}{395} = 0{,}15$$

Resposta: alternativa **d**.

Vestibulares de Norte a Sul

1. Múltiplos de 5 de três algarismos

$$\rightarrow \underset{9}{\underline{\quad}} \ \underset{8}{\underline{\quad}} \ \underset{1}{\underline{\ 0\ }} + \underset{8}{\underline{\quad}} \ \underset{8}{\underline{\quad}} \ \underset{1}{\underline{\ 5\ }} =$$

$= 9 \cdot 8 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 1 = 144$
Resposta: alternativa **e**.

2. Considerando o alfabeto com 26 letras, temos:

Número de senhas com 4 caracteres

$$\rightarrow \underbrace{\underset{26}{\underline{\quad}}}_{\text{(alfabético)}} \ \underbrace{\underset{36}{\underline{\quad}} \ \underset{36}{\underline{\quad}} \ \underset{36}{\underline{\quad}}}_{\text{(alfabético ou numérico)}} = 26 \cdot 36^3$$

Resposta: alternativa **d**.

3. • Para soma = 6: $\{(5, 1), (1, 5), (4, 2), (2, 4), (3, 3)\} = 5$ pares

Logo, $P(S = 6) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

• Para soma = 7: $\{(6, 1), (1, 6), (5, 2), (2, 5), (4, 3), (3, 4)\} =$ $= 6$ pares

Logo, $P(S = 7) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Resposta: alternativa **a**.

4. Observe o esquema a seguir:

$A\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5!} = 120$ palavras que começam com A

$F\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5!} = 120$ palavras que começam com F

$\underline{L}\ \underline{A}\ \underline{F}\ \underline{O}\ \underbrace{\_\ \_}_{2!} = 2$ palavras que começam com LAFO

Assim, restam LAFROT que está na 243ª posição e LAFRTO que está na 244ª posição.

Resposta: alternativa **c**.

5. $P(X_1) = \frac{3}{5}$

$P(X_2) = 1 - P(X_1) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Logo, a probabilidade de o indivíduo portador do vírus X sobrevi-ver é:

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6 + 5}{15} = \frac{11}{15}$

Resposta: alternativa **e**.

6. Sejam os vértices A, B, C, D, com A e C opostos.

Vamos considerar 2 opções:

I) Se A e C tiverem a mesma cor, podemos colorir A de 4 modos e C de apenas 1 (igual a A). Nesse caso, B e D podem ter quaisquer outras 3 cores.

Então temos um total de $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 36$ maneiras.

II) Se A e C não tiverem a mesma cor, podemos colorir A de 4 modos e C de 3 modos. Nesse caso, B e D podem ter quaisquer outras 2 cores, diferentes de A e C.

Então temos um total de $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ maneiras.

No total são $36 + 48 = 84$ maneiras.

Resposta: alternativa **d**.

7. Para cada um dos 6 caminhos ligando E_1 a E_2, temos 4 caminhos ligando E_2 a E_3. Assim, o total é $6 \cdot 4 = 24$ caminhos.

Resposta: alternativa **d**.

8. Sendo Ω espaço amostral do experimento, temos:

$$n(\Omega) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = 15$$

A probabilidade de ter duas cartas iguais é $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Resposta: alternativa **d**.

9. $$\frac{n!}{(n+2)! + (n+1)!} = \frac{1}{48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n+2)(n+1)n! + (n+1)n!} = \frac{1}{48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+2)(n+1) + (n+1)} = \frac{1}{48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2 + 4n + 3} = \frac{1}{48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 4n + 3 = 48 \Rightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = -9 \text{ (não convém) ou } n = 5$$

Resposta: alternativa **c**.

10. • Se os 3 números são pares:

$$C_{15,3} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \overset{7}{\cancel{14}} \cdot 13}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 455 \text{ maneiras}$$

• Se são 2 ímpares e 1 par:

$$C_{15,2} \cdot C_{15,1} = \frac{15!}{2!13!} \cdot \frac{15!}{1!14!} = \frac{15 \cdot \overset{7}{\cancel{14}}}{\cancel{2}} \cdot 15 = 1\,575 \text{ maneiras}$$

No total são $455 + 1\,575 = 2\,030$ maneiras.

11. O número de pares escolhidos entre as 100 pessoas é:

$$A_{100,2} = \frac{100!}{98!} = 100 \cdot 99 \Rightarrow n(\Omega) = 9\,900$$

A dupla (1ª pessoa, 2ª pessoa) tem a primeira pessoa afetada por A e a segunda pessoa afetada por B.

Logo, o evento em questão tem $25 \cdot 11$ elementos. Portanto

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{25 \cdot 11}{9\,900} = \frac{1}{36} \simeq 2{,}8\%$$

12. $$\underbrace{\_\ \_}_{\text{2 questões obrigatórias}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{\binom{6}{3}} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \text{ alunos}$$

Resposta: alternativa **b**.

13. $$\boxed{C}\ \overbrace{\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6(2,2)}}^{\text{6 letras com repetições: 2 “O” e 2 “N”}}\ \boxed{T}$$

$$1 \cdot P_6(2, 2) \cdot 1 =$$

$$= \frac{6!}{2!2!} = \frac{720}{4} = 180$$

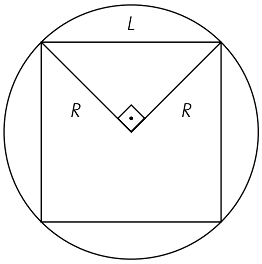
Resposta: alternativa **c**.

Caiu no Enem

1. $$\begin{array}{l} \\ \text{Mat} \\ \text{Port} \\ \text{Geo} \\ \text{Hist} \end{array} \begin{array}{c} \text{1ºb} \quad \text{2ºb} \quad \text{3ºb} \quad \text{4ºb} \\ \begin{bmatrix} 5{,}9 & 6{,}2 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 6{,}6 & 7{,}1 & 6{,}5 & 8{,}4 \\ 8{,}6 & 6{,}8 & 7{,}8 & 9{,}0 \\ 6{,}2 & 5{,}6 & 5{,}9 & 7{,}7 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5{,}9 + 6{,}2 + 4{,}5 + 5{,}5}{4} \\ \vdots \\ \text{etc} \\ \vdots \\ \uparrow \\ \text{médias anuais} \end{bmatrix}$$

Resposta: alternativa **e**.

2.



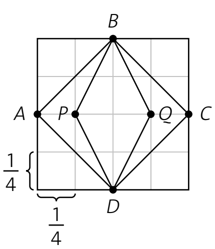
$L = R\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$

Para que o quadrado esteja totalmente "apoiado" no círculo, devemos ter:

$R \geqslant \dfrac{L}{\sqrt{2}}$

Resposta: alternativa **a**.

3.



$A_{sombreada} = \underbrace{4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}}_{\text{os 4 cantos}} + \underbrace{\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2}}_{\text{o losango}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}\ m^2$

$A_{branca} = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}\ m^2$

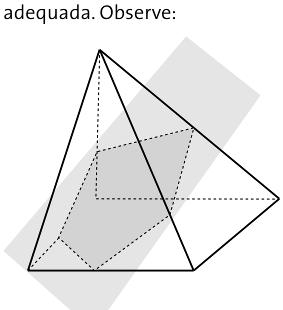
Assim, o custo será de:

$30 \cdot \dfrac{3}{4} + 50 \cdot \dfrac{1}{4} = \text{R\$ } 35{,}00$

Resposta: alternativa **b**.

4. O plano intercepta os 2 prismas triangulares (prismas I e IV) citados no texto. Entretanto, nota-se pela imagem que há um terceiro sólido sendo interceptado pelo plano, com uma face unida com parte da face do prisma IV, e que portanto transformaria a intersecção pedida em um triângulo e um quadrilátero (provavelmente um losango). Teríamos 2 triângulos apenas se a intersecção pedida fosse do plano com os prismas II e IV.
Resposta: alternativa **a**.

5. A única justificativa plausível é a do item **c**. E ela é realmente adequada. Observe:



Resposta: alternativa **c**.

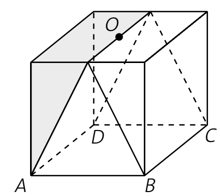
6. $a^3 = 13\,824 \Rightarrow a = 24$ cm
Como a medida do raio das esferas é 6 cm, cabem 2 esferas em cada uma das três dimensões do cubo, totalizando 8 esferas.
Resposta: alternativa **b**.

7. Como o volume do cubo e o do paralelepípedo são iguais, então:
$x^3 = 4 \cdot 3 \cdot 18 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$
Resposta: alternativa **b**.

8. O produto das três dimensões mostradas na figura nos dá o volume do sólido.
Resposta: alternativa **b**.

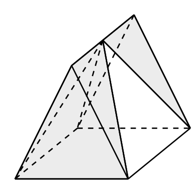
9. $V = 12^3 - 8^3 = 1216$
Resposta: alternativa **d**.

10. 1º corte:



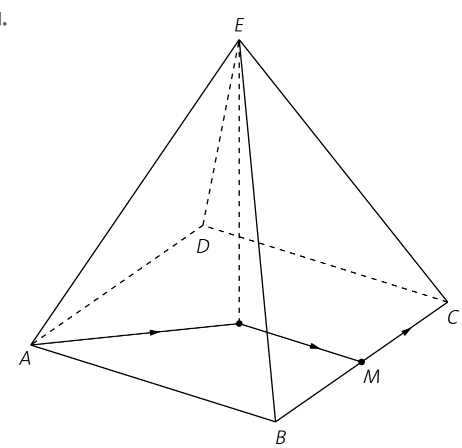
Nesta etapa saem 2 sólidos de formatos iguais.

2º corte:



Nesta etapa saem 2 sólidos de formatos iguais, distintos dos 1os.
Resposta: alternativa **e**.

11.



A figura mostra o percurso $A \to E \to M \to C$ quando projetado no plano da base da pirâmide.
Resposta: alternativa **c**.

12. $V_i = a^3$
$V_f = (0{,}8a)^3 = 0{,}512a^3$
Diminuição de volume: $V_i - V_f = (1 - 0{,}512)a^3 = 0{,}488\, a^3$
Logo, V_f é 48,8% menor que V_i.
Resposta: alternativa **c**.

13. O bebedouro 3 é um semicilindro.
Resposta: alternativa **e**.

14. O volume da leiteira é $\pi \cdot 4^2 \cdot 20 = 320\pi$.
O volume de cada copinho é $\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$.
Assim, a leitura tem o volume 20 vezes maior que o do copo.
Resposta: alternativa **a**.

15. Tora da espécie I: $V_I = 3^2 \cdot 12 \cdot 0{,}06 = 6{,}48\ m^3$
Tora da espécie II: $V_{II} = 4^2 \cdot 10 \cdot 0{,}06 = 9{,}6\ m^3$
Portanto, o peso da carga é:
$3 \cdot 6{,}48 \cdot 0{,}77 + 2 \cdot 9{,}6 \cdot 0{,}78 = 29{,}9$ toneladas
Resposta: alternativa **a**.

16. As relações $\dfrac{\text{área}}{\text{capacidade}}$ são:

$$R_I = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 6}{\pi \cdot 2^2 \cdot 6} = 1\ m^{-1}$$

$$R_{II} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 8}{\pi \cdot 2^2 \cdot 8} = 1\ m^{-1}$$

$$R_{III} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 8}{\pi \cdot 3^2 \cdot 8} = \frac{2}{3}\ m^{-1}$$

Resposta: alternativa **d**.

17. O raio externo da manilha será 1,2 m e o interno, 1 m.
$\pi \cdot 1{,}2^2 \cdot 4 - \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = 1{,}76\pi\ m^3$
Logo, o preço da manilha será $1{,}76 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 10 =$ R\$ 54,56.
Resposta: alternativa **d**.

18. Volume da taça hemisférica: $V_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\ m\ell$

Volume da taça cônica: $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot h$

$\dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot h = 18 \Rightarrow h = 6\ cm$

Resposta: alternativa **b**.

19. De acordo com o enunciado, cabem 58 Terras em Netuno e 23 Netunos em Júpiter. Assim, cabem $58 \cdot 23 = 1334$ Terras em Júpiter.
Resposta: alternativa **b**.

20. O formato da sombrinha é um cone:
- a base é uma circunferência
- tem um vértice.

Resposta: alternativa **e**.

21.

Açúcar	Água
1 parte	5 partes

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 10 = 40\pi \geqslant 120\ cm^3 = 120\ m\ell$

Proporção: $\dfrac{\overset{\text{açúcar}}{x}}{1} = \dfrac{\overset{\text{água}}{y}}{5} = \dfrac{x+y}{6} \Rightarrow \dfrac{y}{5} = \dfrac{120}{6} \Rightarrow y = 100\ m\ell$

Resposta: alternativa **c**.

22. No sorteio dos 4 times, os agrupamentos são conjuntos, portanto temos uma combinação. No sorteio dos 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, temos uma sequência, pois (Flamengo, Cruzeiro) é diferente de (Cruzeiro, Flamengo). Assim, temos um arranjo.
Resposta: alternativa **a**.

23. Como ele mora em *A*, os diferentes trajetos ocorrem pela variação das outras 5 cidades, ou seja, são $5! = 120$ possibilidades. Como nesse valor estão contados os trajetos simétricos (*ABCDEFA* e *AFEDCBA*), temos 60 duplas de trajetos com seu simétrico. Gastando 1,5 minuto para cada avaliação de um trajeto e seu simétrico, ele demorará $60 \cdot 1{,}5 = 90$ minutos.
Resposta: alternativa **b**.

24. 1) Os números começando por 1, 3 ou 5:

$$\frac{\substack{1\\3\\5}}{3} \cdot \frac{\quad}{4} \cdot \frac{\quad}{3} \cdot \frac{\quad}{2} \cdot \frac{\quad}{1} = 72$$

2) Os números começando por 7, sendo o 2º algarismo 1 ou 3:

$$\frac{7}{1} \cdot \frac{\substack{1\\3}}{2} \cdot \frac{\quad}{3} \cdot \frac{\quad}{2} \cdot \frac{\quad}{1} = 12$$

3) Os números começando por 74, sendo o 3º algarismo 1 ou 3:

$$\frac{7}{1} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{\substack{1\\3}}{2} \cdot \frac{\quad}{2} \cdot \frac{\quad}{1} = 4$$

4) O número 75 913

$$\frac{7}{1} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{9}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} = 1$$

Resposta: alternativa **e**.

25. O número de "quinas" distintas que podem ser feitas tendo disponíveis 9 números é dado por $C_{9,5} = \dfrac{9!}{5!4!} = 126$.
Já o número de "quinas" distintas que podem ser feitas tendo disponíveis 6 números é dado por $C_{6,5} = \dfrac{6!}{5!1!} = 6$. Jogando 84 apostas de 6 números, nenhuma delas com quinas coincidentes, teríamos $84 \cdot 6 = 504$ chances.
Assim, podemos dizer que a chance de acertar no 1º caso é 4 vezes maior que a chance de acertar no 2º caso.
Resposta: alternativa **c**.

26. Do gráfico, obtemos que a população de 60 anos ou mais, na população de países desenvolvidos, está entre 30% e 35%, por volta de 32,5% (metade do intervalo).
c) $\dfrac{8}{25} = 0{,}32 = 32\%$ (serve)
Resposta: alternativa **c**.

27. A chance de um paciente não sofrer efeito colateral em *N* doses é $P = 0{,}9^N$.
Portanto, a chance de ele sofrer pelo menos 1 efeito colateral é $1 - 0{,}9^N$.
$1 - 0{,}9^N \leqslant 0{,}35 \Rightarrow 0{,}9^N \geqslant 0{,}65$
$N_{máx} = 4$
Resposta: alternativa **b**.

28. $E1E3$: $\overline{P} = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}10$
$E1E4$: $\overline{P} = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$
$E2E5$: $\overline{P} = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$ (maior entre as opções)
$E2E6$: $\overline{P} = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$
Então, o trecho com menor probabilidade de engarrafamento é o caminho *E2E5*.
Resposta: alternativa **d**.

29. Temos 2 defeituosos (D) e 2 não defeituosos (N). Assim, a probabilidade de termos uma sequência qualquer de 2 defeituosos e 2 não defeituosos.

é $\frac{4!}{2!2!} \cdot (0{,}2\%)^2 \cdot (99{,}08\%)^2$.

Resposta: alternativa **c**.

30. A probabilidade é de $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Resposta: alternativa **d**.

31.

Região	Temperatura	Recomendação
Rural	< 30 °C	Sim
Comercial	entre 31 °C e 32°C	Não
Residencial Urbano	entre 30 °C e 31 °C	Sim
Residencial Subúrbio	< 30 °C	Sim

Assim, a tabela mostra que três das quatro regiões estão de acordo com a recomendação. Logo, a probabilidade de escolher aleatoriamente uma região favorável é:

$P = \frac{3}{4}$

Resposta: alternativa **e**.

32. São 15 bolas coloridas, sendo que cada uma tem um valor de 1 a 15, de acordo com a cor. Cada um escolheu a soma de duas bolas e a tabela a seguir mostra os pares de bolas que podem resultar nessa soma.

Arthur: (1,11); (2,10); (3,9); (4,8); (5,7) $\Rightarrow$ soma 12
Bernardo: (5,12); (6,11); (7,10); (8,9); (4;13); (3,14); (2,15) $\Rightarrow$ soma 17
Caio: (7,15); (8,14); (9,13); (10,12) $\Rightarrow$ soma 22
Assim, Bernardo tem possibilidades de pares de bolas cuja soma dá 17, e, por isso, tem maior probabilidade de ganhar o jogo.

Resposta: alternativa **c**.

33. A porcentagem total de domicílio que possuem mais de 1 Mbps é $15 + 5 + 1 = 22$, assim a probabilidade de escolher um domicílio com essa característica é:

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{22}{100} = 0{,}22$

Resposta: alternativa **d**.

34. De acordo com os dados, o total de pessoas vacinadas é 200 e a quantidade de pessoas vacinadas portadoras de doenças crônicas é 22. Assim, a probabilidade de escolher uma pessoa portadora de doença crônica aleatoriamente é:

$P = \frac{22}{200} = \frac{11}{100} = 11\%$

Resposta: alternativa **e**.

35. Experimento: jogar 2 dados
Evento: observar a soma
José: (6,1); (5,2); (4,3); (3,4); (2,5); (1,6)

$P(\text{Soma } 7) = \frac{6}{36}$

Paulo: (3,1); (2,2); (1,3)

$P(\text{Soma } 4) = \frac{3}{36}$

Antonio: (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)

$P(\text{Soma } 8) = \frac{5}{36}$

Resposta: alternativa **d**.

HINO NACIONAL

Letra: Joaquim Osório Duque Estrada
Música: Francisco Manuel da Silva

Ouviram do Ipiranga as margens plácidas
De um povo heroico o brado retumbante,
E o sol da liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
És belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores;
"Nossos bosques têm mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
– Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

ISBN 978-850816302-1
9 788508 163021