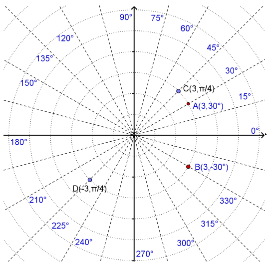
COORDENADAS POLARES

Coordenadas polares

Observações:



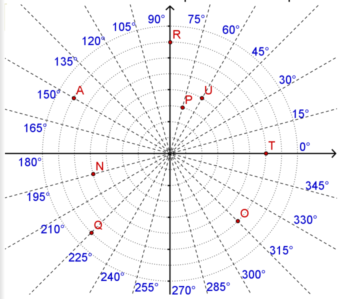
1. Marca-se o ângulo de modo análogo ao que é feito em trigonometria, ou seja, no sentido anti-horário o ângulo é positivo, caso contrário, o ângulo é negativo.

2. O pólo é representado nesse sistema pelo par de coordenadas $(0,\theta)$, onde θ representa qualquer ângulo.

3. Emprega-se também o sinal negativo anterior à primeira coordenada polar **r** do ponto P, para significar que o ponto P pertence à semirreta oposta a semirreta correspondente ao ângulo **θ**.

Exemplo 1

Determine as coordenadas polares de cada ponto dado a seguir.



T(6,0°)
U(4,60°)
P(3,75°)
R(7,90°)
A(7,150°)
N(5,195°)
Q(7,225°)
O(6,315°)

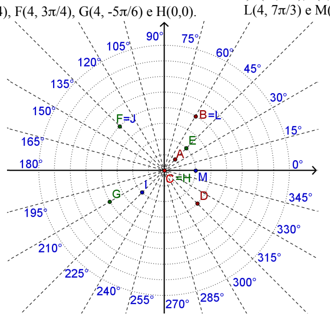
Exemplo 2

Marque no plano polar os pontos dados nos itens a seguir:

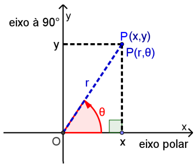
a) A(1,45°), B(4,60°), C(0,45°) e D(3,-45°).

b) E(2,π/4), F(4, 3π/4), G(4, -5π/6) e H(0,0).

c) I(-2,π/4), J(4, 3π/4), L(4, 7π/3) e M(-2,180°).



Sistemas que relacionam as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas



$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos(\theta)$$

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \mathrm{arctg}(\frac{y}{x}), x \neq 0$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Daí,

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0 \\ x = 0, \theta = \pm 90° \end{cases}$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}}$$

Exemplo 3

Determine as coordenadas cartesianas dos pontos A(3,45°) e B (-2,90°).

$$x = 3\cos(45°) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad x = -2\cos(90°) = 0 \qquad \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

$$y = 3\,\mathrm{sen}(45°) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad y = -2\,\mathrm{sen}(90°) = -2$$

$$B = (0,-2)$$

$$A = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0 \\ x = 0, \theta = \pm 90° \end{cases}$$

Exemplo 4

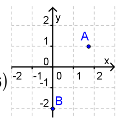
Determine as coordenadas polares dos pontos:

$$A = (\sqrt{3}, 1) \qquad B = (0,-2)$$

$$r^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 \Rightarrow r = \pm 2$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad \theta = \pi/6 \text{ ou } \theta = 7\pi/6$$

$$A = (2, \pi/6) \quad A = (-2, 7\pi/6)$$



$$r^2 = (0)^2 + (-2)^2 \Rightarrow r = \pm 2$$

$$x = 0 \Rightarrow \theta = \pm 90° \qquad B = (-2, 90°) \quad B = (2, -90°)$$

Determine:

a) As coordenadas polares do ponto P(2,2)

b) As coordenadas cartesianas do ponto $Q(4,120°)$.

c) As coordenadas polares do ponto $S(0,4)$.

a) Você pode começar calculando o valor de r:

$$r^2 = (2)^2 + (2)^2 = 8 \Rightarrow r = \pm 2\sqrt{2}.$$

E em seguida o valor de θ: $\theta = \text{arctg}\left(\frac{2}{2}\right) = \text{arctg}(1) \Rightarrow \theta = 45°$.

Assim, você fazer dois pares de coordenadas polares $\left(-2\sqrt{2}, 45°\right)$ e $\left(2\sqrt{2}, 45°\right)$.

As coordenadas cartesianas do ponto P(2,2) indicam que o mesmo está no primeiro quadrante. Daí, você pode concluir que as coordenadas polares do ponto P são $\left(2\sqrt{2}, 45°\right)$.

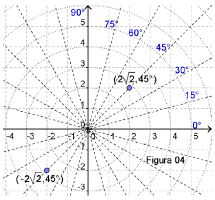


Figura 04

b) Inicie calculando os valores de x e y:

$$x = 4\cos(120°) = 4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow x = -2$$

$$y = 4\text{sen}(120°) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$$

Assim, as coordenadas cartesianas do ponto Q são $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.

c) Observe que a abscissa do ponto S é igual a zero. Assim, você pode escolher $\theta = 90^\circ$. Resta determinar o valor de r, ou seja, a distância do ponto S ao polo. Para isso, marque o ponto S no plano cartesiano.

Veja a figura 05, o valor de r é 4. Assim, as coordenadas polares do ponto S são $(4, 90^\circ)$.

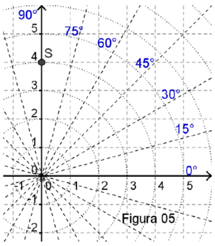


Figura 05

2 – Determine o par principal de coordenadas polares dos pontos dados:

a) $A\ 2,-870^\circ$

Solução. O par principal $A\ r_0, \theta_0$ onde devemos ter $r_0 > 0$ e $0 \le \theta_0 < 2\pi$.

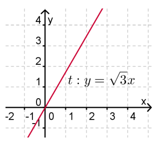
Fazendo $-870^\circ = -2 \cdot 360^\circ - 150^\circ$, sabemos que -150° corresponde a 210°. Logo, as coordenadas principais do ponto são $2, 210^\circ$.

$C\ 4, 530^\circ$

Exemplo 5

Determine a equação polar da reta $t : y = \sqrt{3}x$

Solução: $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$



$$r\,\text{sen}(\theta) = \sqrt{3}(r\cos(\theta))$$

$$\frac{r\,\text{sen}(\theta)}{r\cos(\theta)} = \frac{\sqrt{3}(r\cos(\theta))}{r\cos(\theta)}$$

$$\text{tg}(\theta) = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Daí,

$t : \theta = \frac{\pi}{6}$ é uma equação polar da reta t.

Observe que a variável r não aparece nessa equação, daí essa variável é livre.

Exemplos de pontos que pertencem à reta t:

$A = (-2, \pi/6)$ $B = (0, \pi/6)$ $C = (7, \pi/6)$

3 – Determine uma equação polar para as curvas que tem equações cartesianas dadas:

a) $y = 1 - 2x$

Solução.

b) $x^2 + y^2 = 4$

4 – Determine uma equação cartesiana das curvas cuja equação na forma polar é dada por:

a) $r^2 = 2\,\text{sen}(2\theta)$

Solução. $r^2 = x^2 + y^2$ e $\text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ implicam em

$$x^2 + y^2 = 4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 4\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4xy}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2\,{}^2 = 4xy\,.$$

b) $r = \dfrac{6}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

Solução. $r = \dfrac{6}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta} \;\Rightarrow\; 2r - 3r\,\text{sen}\,\theta = 6 \;\Rightarrow\; \pm 2\sqrt{x^2+y^2} - 3y = 6$, ou seja, a equação procurada é dada por $4x^2 - 5y^2 - 36y = 36$.