Integrais Indefinidas

Métodos de Cálculo II

- Antiderivação e Integração
  - Antiderivação é uma operação que consiste em encontrar uma função F cuja derivada (F ') é uma função conhecida f. Se a função F existir, ela é chamada antiderivada de f.
- Exemplo
  - Seja $f(x)=x^2$. Uma antiderivada de f é: $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$

  pois $F'(x)=x^2$.
  - Costuma-se chamar a operação de antiderivação também por integração e a antiderivada de integral.

Métodos de Cálculo II

- Antiderivação e Integração
  - Todas integrais indefinidas devem ter o complemento " +C" em sua solução pois muitas funções têm a mesma derivada.
  - A integral indefinida é aquela para a qual não foi definida um intervalo de valores, portanto, ela é uma função ou família de funções;
  - A integral definida é aquela definida dentro de um certo intervalo e calculada neste intervalo, portanto, ela é um número.

Métodos de Cálculo II

- Integral Indefinida
  - A operação que envolve uma integral indefinida consiste em achar sua primitiva, ou seja, é a mesma operação que consiste em achar uma antiderivada. O que muda então?
  - A notação!
  - Para denotar a integral de uma função passaremos a utilizar a seguinte notação:
  - Seja $f(x)=x^2$. Uma primitiva de f é: $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$

  pois $F'(x)=f(x)$. Assim, a nova notação estabelece que:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Métodos de Cálculo II

- Exemplo
  - A integral de $f(x)=x^2$ é: $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$
  - A integral de $f(x)=\operatorname{sen} x$ é: $\int \operatorname{sen} x dx=-\cos x+C$
  - A integral de $f(x)=e^x$ é: $\int e^x dx=e^x+C$
  - A integral de $f(x)=\cos x$ é: $\int \cos x dx=\operatorname{sen} x+C$
  - ...

Métodos de Cálculo II

- Outro Exemplo
  - A função $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+C$ é uma primitiva da função

  f(x)=cos2x pois $\int \cos 2x dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+C$.
  - Fazendo, $F'(x)=\frac{1}{2}.2\cos 2x+0=\cos 2x=f(x)$
  - Não é uma tarefa muito fácil encontrar a primitiva de certas funções, mas existem métodos para isto e iremos aprender alguns deles.

Métodos de Cálculo II

- Definição simbólica
  - Se F(x) é uma primitiva de f(x), a expressão F(x) + C é chamada integral indefinida da função f(x) e é representada pela expressão:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

  - O símbolo "dx" que aparece na fórmula serve para identificar a variável sobre a qual se processa a integração.

Métodos de Cálculo II

- Exemplo

$$\int x^2 dx$$

  - Significa que a operação de integração incide sobre a variável "x".

$$\int x^2 . y^3 dy$$

  - Significa que a operação de integração incide sobre a variável "y".

Métodos de Cálculo II

- Integral de uma função constante
  - Uma primitiva de uma função constante f(x)=k, é a função linear F(x)=k.x, pois F'(x) = (k.x)' = k. Logo:

$$\int k\,dx = k.x + C$$

- Exemplo

$$\int 5\,dx = 5.x + C$$

Métodos de Cálculo II

- Integral de uma função potência
  - Seja, por exemplo, f(x)=x^4.
  - Uma primitiva de f(x) é $F(x)=\frac{x^5}{5}$ pois F'(x)=x^4. Logo: $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$
  - Portanto, uma primitiva da função f(x)=x^n, com n≠-1, é a função $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Métodos de Cálculo II

- Caso especial de Integral de uma função potência
  - Seja, por exemplo, f(x)=x^{-1}=1/x.
  - Uma primitiva de f(x)=1/x é a função F(x)=ln|x|, portanto:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Métodos de Cálculo II

- Integral de função exponencial

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

- Integrais de funções trigonométricas

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = tg x + C$$

Métodos de Cálculo II

- Integrais de funções trigonométricas

$$\int \sec x.tgx.dx = \sec x + C$$

$$\int \text{cossec}^2 xdx = \cot gx + C$$

$$\int \text{cossec}\, x.\cot gx.dx = \text{cossec}\, x + C$$

- Integral das funções inversas

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \text{arcsen}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = arctgx + C$$

Métodos de Cálculo II

- Propriedades
  - Integral da soma

$$\int [f(x)+g(x)].dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

  - Exemplo

$$\int (x^2+x+4)dx = \underbrace{\int x^2 dx}_{\frac{x^3}{3}} + \underbrace{\int xdx}_{\frac{x^2}{2}} + \underbrace{\int 4dx}_{4x} + C$$

Métodos de Cálculo II

- Propriedades
  - Integral da diferença

$$\int [f(x)-g(x)].dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

  - Exemplo

$$\int (x^4 - x^2)dx = \underbrace{\int x^4 dx}_{\frac{x^5}{5}} - \underbrace{\int x^2 dx}_{\frac{x^3}{3}} + C$$

Métodos de Cálculo II

- Técnicas de Integração
  - Método da Substituição: A chave do método da substituição é dividir a função em partes e depois encontrar uma parte da função cuja derivada também faça parte dela.
- Exemplo

$$\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} dx$$

  - Podemos dividir a equação acima em duas partes:
    - sen x.dx e
    - cos x.
  - Repare que a derivada do cos x é -sen x, portanto, a derivada do cosseno faz parte da função.

Métodos de Cálculo II

- Passos:
  - Procure na função pela parte cuja derivada esteja na função. Se você estiver em dúvida, tente usar a que está no denominador ou alguma expressão que esteja sendo elevada a uma potência;
  - Chame-a de "u" e tome sua derivada com relação ao diferencial (dx, dy, dt, etc.). Acrescentando esse diferencial;
  - Use as expressões "u" e "du" para substituir as partes da integral original;
  - A sua nova integral será mais fácil de ser calculada, mas não esqueça de, ao final, desfazer a substituição.

Métodos de Cálculo II

- Exemplo
  - Use o método de substituição para encontrar a integral: $\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} dx$
- Solução
  - Devemos escolher parte da função cuja derivada esteja na função, como a derivada de sen x = cos x e a derivada do cos x = -sen x, e, ambas estão na função, na dúvida... selecionamos a parte que está no denominador, isto é: cos x;
  - Chamamos u = cos x;
  - Agora derivamos u com relação a "x", portanto: *du = - sen x.dx*;
  - Como na função original a função seno é positiva, basta multiplicar ambos os lados por –1 para que ela fique positiva;

$$-du = \text{sen}\, x.dx$$

Métodos de Cálculo II

- Solução
  - Basta re-escrever a integral original com as expressões "u" e "du";
  - Integral original: $\int \frac{\operatorname{sen} x.dx}{\cos x}$
  - Nova integral: $\int \frac{-du}{u}$
  - Que também pode ser re-escrito como: $-\int \frac{du}{u}$

Métodos de Cálculo II

- Solução
  - Basta calcular: $-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$;
  - O passo final é desfazer a substituição de u pelo o valor da original:

$$-\int \frac{du}{u} = -\ln|\cos x| + C$$

Métodos de Cálculo II

- Outro Exemplo
  - Use o método de substituição para encontrar a integral: $\int \cos(3x).dx$
- Solução
  - Chamamos u = 3x;
  - Agora derivamos u com relação a "x", portanto: *du = 3.dx*;
  - Basta re-escrever a integral original com as expressões "u" e "du";
  - Note que 3.dx não está na equação original, apenas dx. Para ficar apenas com dx, fazemos:

$$\frac{du}{3} = dx$$

Métodos de Cálculo II

- Solução
  - Basta re-escrever a integral original com as expressões "u" e "du";
  - Integral original: $\int \cos(3x).dx$
  - Nova integral: $\int \cos u.\frac{du}{3}$
  - Que também pode ser re-escrita: $\frac{1}{3}\int \cos u.du$

Métodos de Cálculo II

- Solução
  - Calculando $\frac{1}{3}\int \cos u.du$, temos: $\frac{1}{3}\int \cos u.du = \frac{1}{3}.\operatorname{sen} u + C$
  - Substituindo u pelo seu valor original, teremos:

$$\frac{1}{3}\int \cos u.du = \frac{1}{3}.\operatorname{sen} 3x + C$$

Métodos de Cálculo II

- Técnicas de Integração
  - Integração por partes:

    No Cálculo-I, quando calculávamos a derivada do produto de duas funções aplicávamos uma regra: chamávamos uma das funções de *u*, a outra função de *v* e sua derivada era dada por *u'v + uv'*.
  - Exemplo

    Seja f(x)= e^x.senx. Chamamos $u=e^x$, $v=senx$ e $f'(x)=e^x.senx + e^x.cosx$.
  - A integração por partes irá se aplicar a esses casos em que a função é constituída por um produto e também nos casos em que uma das funções pode ser derivada repetidamente e a outra pode ser integrada repetidamente.

Métodos de Cálculo II

- Técnicas de Integração
  - Integração por partes:

    Assim, considere *f(x)* e *g(x)* duas funções deriváveis. A regra do produto nos diz que:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

  - Ou, dito de outra maneira:

$$\left[u.v\right]' = u'.v + uv'$$

Métodos de Cálculo II

- Técnicas de Integração
  - Em termos de integrais indefinidas, a equação se torna:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]dx = \int \left[f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\right]dx$$

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]dx = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)dx$$

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]dx - \int f'(x).g(x)dx = \int f(x).g'(x)dx$$

Métodos de Cálculo II

- Rearranjando os termos, temos:

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

- Que é a fórmula da integração por partes.
- Porém essa fórmula é mais facilmente lembrada na forma diferencial. Sejam:
  - *u = f(x)* $\longrightarrow$ *du = f'(x)dx;*
  - *v = g(x)* $\longrightarrow$ *dv = g'(x)dx.*
- Usando a regra de substituição, a fórmula acima pode ser simplificada para:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Métodos de Cálculo II

- Exemplo-1:
  - Usando o método da integração por partes, determine: $\int x.\cos x dx$
- Solução
  - Usamos a fórmula simplificada da integração por partes, fazendo:
    - *u = x, du = dx;*
    - *v = senx, dv = cosxdx.*
  - Então:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x.\cos x dx = x.\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x.dx$$

$$\int x.\cos x dx = x.\operatorname{sen} x + \cos x + c$$

Métodos de Cálculo II

- Observações
  - O objetivo da integração por partes é passar de uma integral $\int udv$ que não sabemos como calcular para uma integral $\int vdu$ que podemos calcular.
  - Geralmente, escolhemos *dv* primeiro sendo a parte do integrando, incluindo *dx*, que sabemos integrar de maneira imediata; u é a parte restante.
  - Lembre-se de que a integração por partes nem sempre funciona.

Métodos de Cálculo II

- **Bibliografia utilizada:**

  - Flemming, D. M. & Gonçalves, M. B. *Cálculo A.* Person Education. São Paulo, 1992.
  - Abdounur, O. J. & Hariki, S. Matemática Aplicada. Saraiva. São Paulo, 2006.
  - Stewart, J. *Cálculo. Volume I.* Thomson. São Paulo, 2006.
  - Priestley, W. M. *Calculus: An Historical Approach.* Springer-Verlag. New York, 1979.
  - Eves, H. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* Dover, 1990.