LISTA DE EXERCÍCIOS – RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1) Usando o Método de Euler, resolver cada PVI abaixo:

a)

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \end{cases} \qquad y' = f = -y + x + 2$$

$$0 \le x \le 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad h = 0{,}1$$

b)

Determine a solução numérica aproximada da seguinte Equação Diferencial Ordinária, com o passo $h = 0.2$:

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 0 & \forall x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sabendo-se que a solução exata da equação é $y(x) = e^{-2x}$, compare com as soluções aproximadas obtidas nos items anteriores.

c)

Usando o Método de Euler, encontre uma solução aproximada para o P.V.I.:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases};$$

no intervalo [0, 2,5] com 5 subintervalos.

RESPOSTAS:

a)

$$f_0 = f(x_0, y_0) = -y_0 + x_0 + 2 \Rightarrow f(0{,}2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$x_1 = 0{,}1$$
$$y_1 = y_0 + h\ f_0 = 2 + (0{,}1)\ (0) = 2{,}0000$$

$$f_1 = f(x_1, y_1) = -y_1 + x_1 + 2 \Rightarrow f(0{,}1;\ 2{,}0000) = -2{,}0000 + 0{,}1 + 2 = 0{,}1000$$

$$x_2 = 0{,}2$$
$$y_2 = y_1 + h\ f_1 = 2 + (0{,}1)\ (0{,}1000) = 2{,}0100$$

$$f_2 = f(x_2, y_2) = -y_1 + x_1 + 2 \Rightarrow f(0{,}2;\ 2{,}0100) = -2{,}0100 + 0{,}2 + 2 = 0{,}1900$$

$$x_3 = 0{,}3$$
$$y_3 = y_2 + h\ f_2 = 2{,}01 + (0{,}1)\ (0{,}1900) = 2{,}0290$$

b)

$$y'(x)+2y(x)=0 \Rightarrow y'(x)=-2y(x) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-2y=f(x,y) \\ y(0)=y_0=1 \end{cases}$$

Dados do Problema: $y_0 = 1$, $h = 0.2$, $x \in [0,1]$

Este método consiste em aplicar a seguinte fórmula iterativa:

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad , \quad n \geq 0$$

Então:

(1)
$x_0=0$, $y_0=1$, $f(x_0,y_0)=-2y_0=-2(1)=-2$
$\Rightarrow y_1=y_0+hf(x_0,y_0) \Rightarrow y_1=1+0.2(-2)=1-0.4=0.6$

(2)
$x_1=0.2$, $y_1=0.6$, $f(x_1,y_1)=-2y_1=-2(0.6)=-1.2$
$\Rightarrow y_2=y_1+hf(x_1,y_1) \Rightarrow y_2=0.6+0.2(-1.2)=0.6-0.24=0.36$

(3)
$x_2=0.4$, $y_2=0.36$, $f(x_2,y_2)=-2y_2=-2(0.36)=-0.72$
$\Rightarrow y_3=y_2+hf(x_2,y_2) \Rightarrow y_3=0.36+0.2(-0.72)=0.36-0.144=0.216$

(4)
$x_3=0.6$, $y_3=0.216$, $f(x_3,y_3)=-2y_3=-2(0.216)=-0.432$
$\Rightarrow y_4=y_3+hf(x_3,y_3) \Rightarrow y_4=0.216+0.2(-0.432)=0.1296$

(5)
$x_4=0.8$, $y_4=0.1296$, $f(x_4,y_4)=-2y_4=-2(0.1296)=-0.2592$
$\Rightarrow y_5=y_4+hf(x_4,y_4) \Rightarrow y_5=0.1296+0.2(-0.2592)=0.07776$

(6) $\boldsymbol{x_5 = 1.0}$ **,** $\boldsymbol{y_5 = 0.07776}$ ***(Método de Euler)***

c)

A solução exata da E.D.O. é $y(x) = 2e^x - x + 1$, e pode-se determinar os valores discretos de x, confrontando as soluções:

x	**0**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**
y (Euler)	1,0	1,7210	3,1874	5,8543	10,4548	18,1689
y (Exata)	1,0	1,7974	3,4366	6,4634	11,7781	28,8650