

Métodos de Zeros da Função

1

Cálculo Numérico – Bissecção

Métodos Iterativos para a Obtenção de Zeros Reais de Funções

- ▶ *Bissecção*
- ▶ *Falsa Posição*
- ▶ *Falsa Posição Modificado*
- ▶ *Ponto Fixo*
- ▶ *Newton-Raphson*
- ▶ *Secante*

2

Cálculo Numérico – Bissecção

Método da *Bissecção*

Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ onde existe uma raiz única, é possível determinar tal raiz subdividindo sucessivas vezes o intervalo que a contém pelo ponto médio de a e b .

3

3

Cálculo Numérico – Bissecção

Definição do Intervalo Inicial

- ▶ Atribui-se $[a, b]$ como *intervalo inicial*
 - $a_0 = a$
 - $b_0 = b$
- ▶ Condições de Aplicação
 - $f(a) \cdot f(b) < 0$
 - Sinal da derivada *constante*

4

4

Cálculo Numérico – Bissecção

Definição de Novos Intervalos

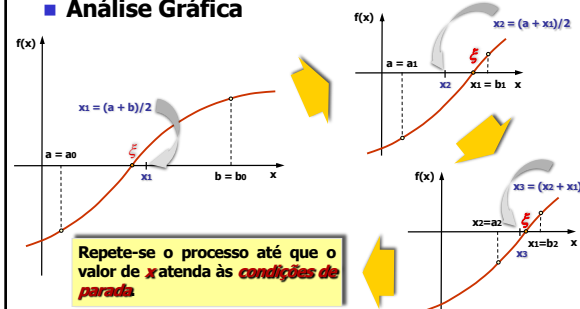
- ▶ Determina-se qual o subintervalo – $[a, x_1]$ ou $[x_1, b]$ – que contém a *raiz*
 - Calcula-se o produto $f(a) \cdot f(x_1)$
 - Verifica-se se $f(a) \cdot f(x_1) < 0$
 - ♦ Se *verdadeiro* $\Rightarrow \xi \in (a, x_1)$
(Logo $a = a$ e $b = x_1$)
 - ♦ *Caso contrario* $\Rightarrow \xi \in (x_1, b)$
(Logo $a = x_1$ e $b = b$)
- ▶ Repete-se o processo até que o valor de x atenda às *condições de parada*.

5

5

Cálculo Numérico – Bissecção

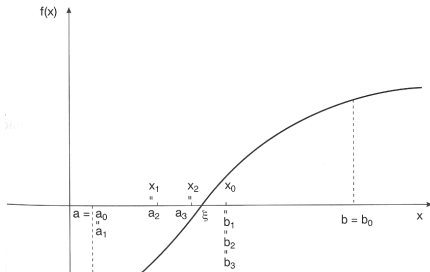
Análise Gráfica



6

6

Método da Bissecção ou Dicotomia (Graficamente)



7

Cálculo Numérico – Bissecção

■ Tolerância (ε)

- ▶ Aproximação de zero, dependente do equipamento utilizado e da precisão necessária para a solução do problema

A **tolerância** é uma estimativa para o **erro absoluto** desta aproximação.

8

Cálculo Numérico – Bissecção

■ Tolerância (ε)

- ▶ Considerando $|\xi - x_{n+1}| < \left(\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \right)$:

deve-se escolher n tal que:

$$\left(\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \right) < \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

9

Cálculo Numérico – Bissecção

■ Condições de Parada

- ▶ Se os valores fossem **exatos**
 - $f(x) = 0$
 - $(x_k - x_{k+1})/x_k = 0$
- ▶ Uma vez que são **aproximados**
 - $|f(x)| \leq \text{tolerância}$
 - $|(x_k - x_{k+1})/x_k| \leq \text{tolerância}$

10

Cálculo Numérico – Bissecção

Algoritmo

```

k := 0; a0 := a; b0 := b; x0 := a;
x_{k+1} := (a_k + b_k)/2;
while critério de parada não satisfeito and k ≤ L
  if f(a_k)f(x_{k+1}) < 0 then /* raiz em [a_k, x_{k+1}] */
    a_{k+1} := a_k; b_{k+1} := x_{k+1};
  else /* raiz em [x_{k+1}, b_k] */
    a_{k+1} := x_{k+1}; b_{k+1} := b_k;
  endif
  k := k + 1; x_{k+1} := (a_k + b_k)/2;
endwhile
if k > L
  parada falhou
endif
  
```

11

Cálculo Numérico – Bissecção

Vantagens:

- Facilidade de implementação;
- Estabilidade e convergência para a solução procurada;
- Desempenho regular e previsível.

O número de interações é **dependente** da **tolerância** considerada

12

11

12

Cálculo Numérico – Bissecção

Desvantagens:

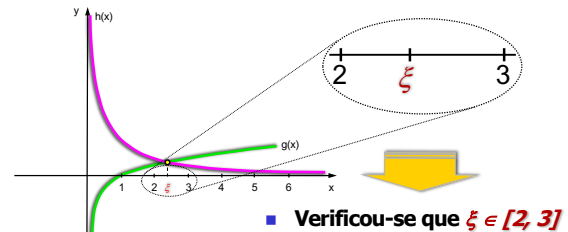
- Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de $f(x)$ em um elevado número de iterações);
- Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível);
- Complexidade da extensão do método para problemas multivariáveis.

13

13

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo 06: Resgatando o Exemplo 05,
 $f(x) = x \log x - 1$ $\varepsilon = 0,002$



14

14

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo 06: $f(x) = x \log x - 1$

Considerando o método da bissecção com $tol = 0,002$ e adotando $[a_0, b_0] = [2, 3]$ como intervalo inicial, tem-se:

■ Cálculo da 1ª aproximação

- ▶ $x_1 = (a_0 + b_0)/2 = (2,00000 + 3,00000)/2 \Rightarrow x_1 = 2,50000$
- ▶ $f(x_1) = f(2,50000) = -0,00510$
- ▶ $f(a_0) = f(2,00000) = -0,39794$
- ▶ Teste de Parada
 - $|f(x_1)| = |-0,00510| = 0,00510 > 0,002$

15

15

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo 06: $f(x) = x \log x - 1$

■ Cálculo da 2ª aproximação

▶ Novo Intervalo

- $f(a_0).f(x_1) = (-0,39794).(-0,00510) > 0$
 logo: $a_1 = x_1 = 2,50000$ e $b_1 = b_0 = 3,00000$
- ▶ $x_2 = (2,50000 + 3,00000)/2 = 2,75000$
- $f(2,50000) = -0,00510 < 0$
- $f(3,00000) = 0,43140 > 0$
- $f(2,75000) = 0,20820 > 0$
- $\xi \in [2,5; 2,75]$
 $a_2 = a_1 = 2,50000$ e $b_2 = x_2 = 2,75000$

16

16

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo 06:

- $x_3 = (2,50000 + 2,75000)/2 = 2,62500$
 - ▶ $f(2,50000) = -0,00510 < 0$ ▶ $\xi \in [2,5, 2,625]$
 - ▶ $f(2,75000) = 0,20820 > 0$ ▶ $a_3 = a_2 = 2,50000$
 - ▶ $f(2,62500) = 0,10020 > 0$ ▶ $b_3 = x_3 = 2,62500$
- $x_4 = (2,50000 + 2,62500)/2 = 2,56250$
 - ▶ $f(2,50000) = -0,00510 < 0$ ▶ $\xi \in [2,5, 2,5625]$
 - ▶ $f(2,62500) = 0,10020 > 0$ ▶ $a_3 = a_2 = 2,50000$
 - ▶ $f(2,56250) = 0,04720 > 0$ ▶ $b_3 = x_4 = 2,56250$

17

17

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo 06: $f(x) = x \log x - 1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	2,00000	3,00000	-0,39794	0,43136	2,50000	-0,00510
1	2,50000	3,00000	-0,00515	0,43136	2,75000	0,20820
2	2,50000	2,75000	-0,00515	0,20816	2,62500	0,10021
3	2,50000	2,62500	-0,00515	0,10021	2,56250	0,04720
4	2,50000	2,56250	-0,00515	0,04720	2,53125	0,02090
5	2,50000	2,53125	-0,00515	0,02094	2,51563	0,00790
6	2,50000	2,51563	-0,00515	0,00787	2,50781	0,00140

$\varepsilon = 0,002$

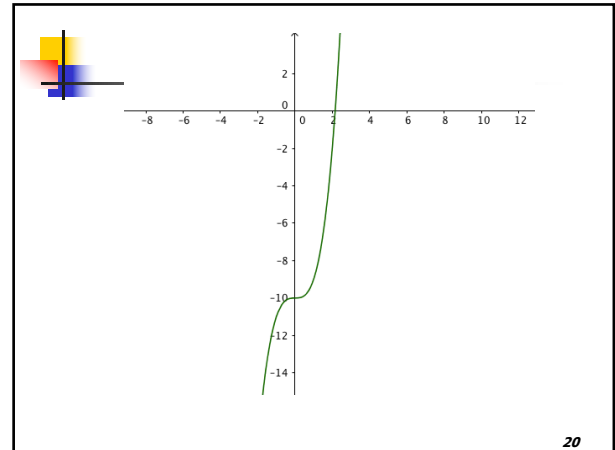
18

18

Ex: Achar a raiz da equação $f(x) = x^3 - 10$ no intervalo $[2,3]$ com o erro absoluto $\delta < 0,1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	Erro = $x_{k+1} - a_k$
0	2	3	-2	17	2,5	5,625	0,5
1	2	2,5	-2	5,625	2,25	1,390625	0,25
2	2	2,25	-2	1,390625	2,125	-0,404296875	0,125
3	2,125	2,25	-0,404296875	1,390625	2,1875	0,467529297	0,0625
4	2,125	2,1875	-0,404296875	0,467529297	2,15625	0,025299072	0,03125

20



19

20

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo 02: Seja $f(x) = x^3 - x - 1$

Intervalo inicial atribuído: $[1, 2]$

Considerando-se $\varepsilon = 0,002$

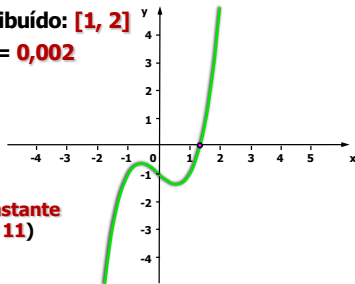
$f(a_0) = -1$

$f(b_0) = 5$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f(a_0) * f(b_0) = -5 < 0$

Sinal da derivada constante
($f'(a_0) = 2$ e $f'(b_0) = 11$)



21

21

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo 02: $f(x) = x^3 - x - 1$

■ Cálculo da 1ª aproximação

$$x_1 = (a_0 + b_0)/2 = (1,000000 + 2,000000)/2 = x_1 = 1,500000$$

$$f(x_1) = 1,5^3 - 1,5 - 1 = 0,875000$$

■ Teste de Parada

$$|f(x_1)| = |0,875| = 0,875000 > 0,002$$

■ Escolha do Novo Intervalo

$$f(a_0) \cdot f(x_1) = (-1) \cdot 0,875 = -0,875$$

$$\text{logo: } a_1 = a_0 = 1,000000 \text{ e } b_1 = x_1 = 1,500000$$

22

22

Cálculo Numérico – Bissecção

Exemplo 02: $f(x) = x^3 - x - 1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	1,0000000	2,0000000	-1,0000000	5,0000000	1,50000000	0,875000
1	1,0000000	1,5000000	-1,0000000	0,875000	1,25000000	-0,296875
2	1,2500000	1,5000000	-0,296875	0,875000	1,37500000	0,224609
3	1,2500000	1,3750000	-0,296875	0,224609	1,31250000	-0,051514
4	1,3125000	1,3750000	-0,051514	0,224609	1,34375000	0,082611
5	1,3125000	1,3437500	-0,051514	0,082611	1,32812500	0,014576
6	1,3125000	1,3281250	-0,051514	0,014576	1,32031250	-0,018711
7	1,3203125	1,3281250	-0,018700	0,014576	1,32421875	-0,002128

$\varepsilon = 0,002$

23

23

Exercícios

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

$$\varepsilon = 0,001$$

$$f(x) = e^x - 5x$$

$$\text{Intervalo } [2,4; 2,6]$$

$$\varepsilon = 0,0001$$

$$f(x) = 3x^3 - 4$$

$$\text{Intervalo } [0; 2]$$

$$\varepsilon = 0,0001$$

Cálculo Numérico

24

3.4.4. Exercícios de Fixação

Calcular pelo menos uma raiz real das equações abaixo, com $\epsilon \leq 10^{-2}$, usando o método da bisseção.

3.4.4.1 $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

3.4.4.2 $f(x) = x + \log x = 0$

3.4.4.3 $f(x) = 3x - \cos x = 0$

3.4.4.4 $f(x) = x + 2 \cos x = 0$

25

25

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

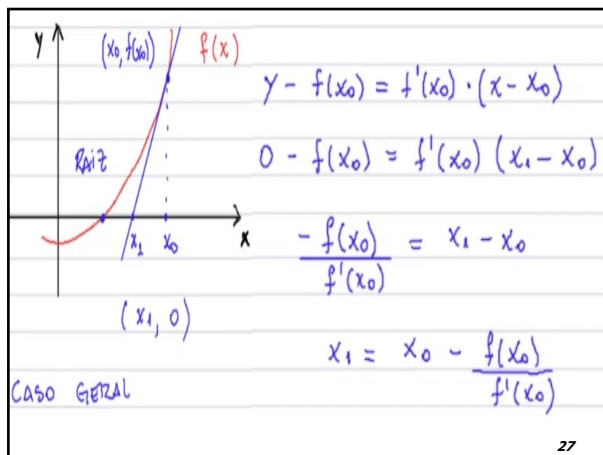
■ Método de **Newton-Raphson**

Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto x_0 com o eixo das abscissas.

x_0 - atribuído em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.

26

26



27

27

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

■ Considerações Iniciais

- Deste modo, escolhido x_0 , a sequência $\{x_k\}$ será determinada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$

28

28

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

■ Motivação Geométrica

- Dado o ponto $(x_k, f(x_k))$

- Traça-se a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:

$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

- Determina-se o zero de $L_k(x)$, um modelo linear que aproxima $f(x)$ em uma vizinhança x_k

$$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

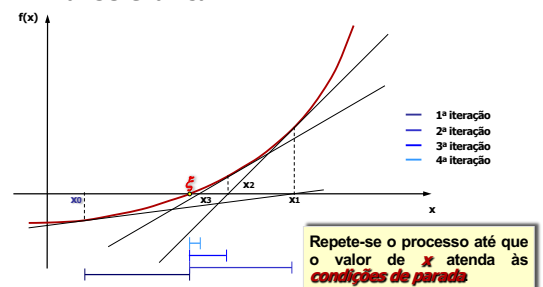
- Faz-se $x_{k+1} = x$

29

29

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

■ Análise Gráfica



30

30

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Estudo da Convergência

TEOREMA 3:

Seja $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém uma raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$ e supondo $f'(\xi) \neq 0$, existirá um intervalo $\tilde{I} \subseteq I$ contendo a raiz ξ , tal que se $x_0 \in \tilde{I}$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

convergir para a raiz.

31

31

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Testes de Parada

▶ A cada iteração, testa-se se a aproximação encontrada poderá ser considerada como a solução do problema.

- $|f(x_k)| \leq \text{tolerância}$
- $|((x_{k+1} - x_k)/x_{k+1})| \leq \text{tolerância}$

32

32

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Algoritmo

```
k := 0; x0 := x;
while critério de interrupção não satisfeito and k ≤ L
  k := k + 1;
  x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f'(x_k)
endwhile
```

33

33

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 17: No Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

■ Seja $x_0 = 1,5$

■ Assim:

- ▶ $g(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^2 + x - 6)/(2x + 1)$
- ▶ $x_1 = g(x_0) = 1,5 - (1,5^2 + 1,5 - 6)/(2 \cdot 1,5 + 1)$
 $x_1 = 2,062500000$
- ▶ $x_2 = g(x_1) = 2,000762195$
- ▶ $x_3 = g(x_2) = 2,000000116$
- ▶ $\vdots$

34

34

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

x	Xk	F(x)
1,5	2,0625	0,31640625
2,0625	2,000762195	0,003811557
2,000762195	2,000000116	5,80764E-07
2,000000116	2	1,33227E-14
2	2	0

35

35

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 18: Considere-se a função $f(x) = x^3 - x - 1$, e $\text{tol} = 0,001$ cujos zeros encontram-se nos intervalos:

$$\xi_1 \in I_1 = (-1, 0), \quad \xi_2 \in I_2 = (1, 2)$$

■ Seja $x_0 = 1$

■ $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$

■ e $g(x) = x - (x^3 - x - 1)/(3x^2 - 1)$

36

36

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 18:

■ Cálculo da 1ª aproximação

$$g(x_0) = 1 - \frac{[(1)^3 - 1 - 1]}{[3 \cdot (1)^2 - 1]} = 1,5$$

► Teste de Parada

- $|f(x_0)| = |0,875| = 0,875 > \varepsilon$

37

37

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 18:

■ Cálculo da 2ª aproximação

$$g(x_1) = 1.5 - \frac{[(1.5)^3 - 1.5 - 1]}{[3 \cdot (1.5)^2 - 1]} = 1,3478261$$

► Teste de Parada

- $|f(x_1)| = |0,100682| = 0,100682 > \varepsilon$

38

38

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 18:

■ Cálculo da 3ª aproximação

$$g(x_2) = 1,3478261 - \frac{[(1,3478261)^3 - 1,3478261 - 1]}{[3 \cdot (1,3478261)^2 - 1]}$$

$$g(x_2) = 1,3252004$$

► Teste de Parada

- $|f(x_2)| = |0,0020584| = 0,0020584 > \varepsilon$

39

39

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 18:

A sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton será:

Iteração	x	F(x)
1	1,5	0,875
2	1,3478261	0,1006822
3	1,3252004	0,0020584
4	1,3247182	9,24378.10 ⁻⁷
5	1,3247178	1,86517.10 ⁻¹³

40

40

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Vantagens:

- Rapidez processo de convergência;
- Desempenho elevado.

41

41

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Desvantagens:

- Necessidade da obtenção de $f'(x)$, o que pode ser impossível em determinados casos;
- O cálculo do valor numérico de $f'(x)$ a cada iteração;
- Dificil implementação.

42

42