

VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Nomenclatura:

P = Perímetro da base

A_b = Área da base

a = Apótema da base

d = Diagonal da base

A_{FL} = Área de uma face lateral

Al = Área lateral

At = Área total

V = Volume

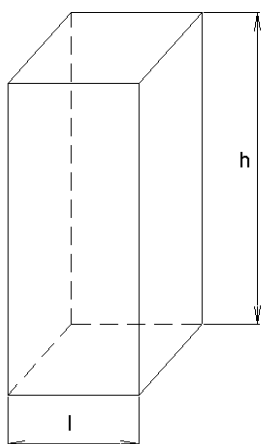
l = Aresta ou lado da base

H = Altura

1. Prisma quadrangular regular

É o sólido em que:

- As bases são quadrados iguais;
- As faces laterais são retângulos iguais.



$$P=4l$$

$$A_b=l^2$$

$$a = \frac{l}{2}$$

$$d=l\sqrt{2}$$

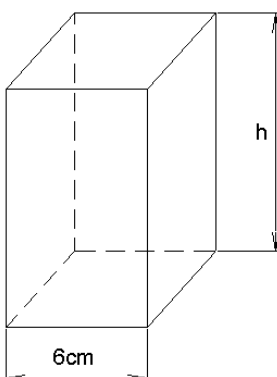
$$A_{FL}=l.H$$

$$Al=4.l.H$$

$$At=Al+2A_b$$

$$V=A_b.H$$

Exemplo: Determine o volume de um prisma quadrangular regular cuja diagonal da base mede $6\sqrt{2}$ cm e a área lateral é o dobro da área da base.



$$d=l\sqrt{2} \Rightarrow l=6 \text{ cm}$$

$$A_b=l^2=36\text{cm}^2$$

$$Al=2A_b \Rightarrow Al=72\text{cm}^2$$

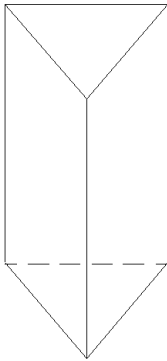
$$Al=4.l.H \Rightarrow H=3\text{cm}$$

$$V=A_b.H \Rightarrow V=108 \text{ cm}^3$$

2. Prisma triangular regular

É o sólido em que:

- As bases são triângulos eqüiláteros iguais;
- As faces laterais são retângulos iguais.



$$P=3l$$

$$A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \text{ (altura da base)}$$

$$A_{FL} = l \cdot H$$

$$Al = 3 \cdot l \cdot H$$

$$At = Al + 2A_b$$

$$V = A_b \cdot H$$

Exemplo: O perímetro da base de um prisma triangular regular é 30cm. A altura do prisma é o dobro da altura da base. Determine o volume do prisma.

$$P=30 \Rightarrow P=3l \Rightarrow l=10\text{cm}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\text{cm}$$

$$H=2h \Rightarrow H=10\sqrt{3}\text{cm}$$

$$A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}\text{cm}^2$$

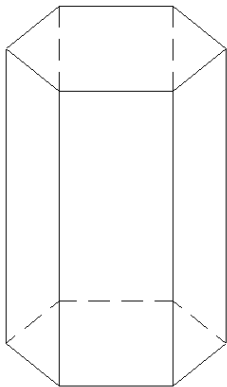
$$V = A_b \cdot H = 250 \cdot 3 = 750\text{cm}^3$$

Logo o volume total é 750cm^3 .

3. Prisma hexagonal regular

É o sólido em que:

- As bases são hexágonos regulares iguais;
- as faces laterais são retângulos iguais.



$$P=6l$$

$$A_b = \frac{6l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{FL} = l \cdot H$$

$$Al = 6 \cdot l \cdot H$$

$$At = Al + 2A_b$$

$$V = A_b \cdot H$$

Exemplo: Calcule a área lateral, a área total e o volume de um prisma hexagonal regular cujo lado mede 4cm, sabendo que a altura do prisma mede 9cm.

$$Al=6.l.H \Rightarrow 216\text{cm}^2$$

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$At=Al+2A_b=24(9+2\sqrt{3})\text{cm}^2$$

$$V=A_b.H=216\sqrt{3}\text{cm}^3$$

Exercícios

1) Um prisma Quadrangular regular tem 20cm de perímetro da base e sua altura é o dobro da aresta da base. Seu volume é igual a

- a) 125cm^3 b) 200cm^3 c) 250cm^3 d) 400cm^3 e) 1000cm^3

2) Um prisma quadrangular regular, de altura 3cm, tem área total igual a 80cm^2 . A aresta da base mede, em cm

- a) 4 b) 10 c) 6 d) 8 e) 9

3) Se a diagonal de um prisma quadrangular regular mede 9cm e um lado de sua base mede 3cm, então sua altura mede

- a) $7\sqrt{3}\text{cm}$ b) $3\sqrt{7}\text{cm}$ c) $3\sqrt{11}\text{cm}$ d) $11\sqrt{3}\text{cm}$ e) $\sqrt{15}\text{cm}$

4) O volume de um prisma quadrangular regular é 256cm^3 e a sua altura é igual ao apótema da base. A área lateral do prisma é

- a) 32cm^2 b) 256cm^2 c) 512cm^2 d) 64cm^2 e) 128cm^2

5) A área de uma face lateral de um prisma quadrangular regular é 18cm^2 . Sabendo que a altura do prisma mede o dobro da aresta da base, a área total do prisma, em cm^2 , é

- a) 90 b) 120 c) 60 d) 50 e) 40

6) A medida da aresta da base de um prisma triangular regular é 4 e a de sua altura $3\sqrt{3}$. O volume deste prisma é igual a

- a) 12 b) $12\sqrt{3}$ c) $24\sqrt{3}$ d) 36 e) 72

7) A altura de um prisma triangular regular cujo volume é $7\sqrt{3} \text{ m}^3$ e cuja aresta da base mede 2m é

- a) $\frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ m}$ b) $\frac{7}{2} \text{ m}$ c) $\sqrt{3} \text{ m}$ d) 7m e) $14\sqrt{3} \text{ m}$

8) O lado da base de um prisma triangular regular mede 8cm. Sabendo que a altura do prisma é igual a altura da base, a área lateral do prisma, em cm^2 , é

- a) 192 b) $108\sqrt{3}$ c) $96\sqrt{3}$ d) $144\sqrt{3}$ e) 100

9) A área total de um prisma triangular regular cujo volume é $4\sqrt{3} \text{ cm}^3$ e a altura é $\frac{2}{3}$ do perímetro da base, mede, em cm^2

- a) $\sqrt{3}$ b) 12 c) $12+\sqrt{3}$ d) $2(12+\sqrt{3})$ e) $4(12+\sqrt{3})$

10) O apótema da base de um prisma hexagonal regular mede $4\sqrt{3} \text{ cm}$. Se a altura do prisma é igual ao semiperímetro da base, a área lateral do prisma é, em cm^2 , igual a

- a) 1152 b) 576 c) 240 d) 972 e) 144

11) Num prisma hexagonal regular de área lateral A, a altura é o dobro da aresta da base. O volume do prisma é

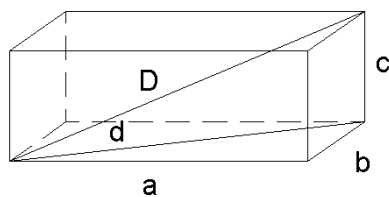
- a) $\frac{A\sqrt{A}}{24}$ b) $\frac{A\sqrt{A}}{12}$ c) $\frac{A\sqrt{A}}{8}$ d) $A\sqrt{A}$ e) $3A\sqrt{A}$

Gabarito

- 1) c 2) a 3) b 4) e 5) a 6) d 7) d 8) c 9) d 10) a 11) c

4. Paralelepípedo retângulo ou ortoedro

É um sólido em que todas as faces são retângulos, iguais dois a dois.



$$Al=2ac+2bc$$

$$At=Al+2ab \text{ ou}$$

$$At=2ab+2ac+2bc$$

$$V=AxBxC$$

$$D=a^2+b^2+c^2$$

Exemplo: Calcule a área lateral, a área total e a diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões 5cm, 4cm e 3cm.

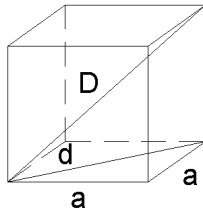
$$Al = 2ac + 2bc = 54cm^2$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{50}cm^2$$

$$At = 2ac + 2bc + 2ab = 94cm^2$$

5. Cubo ou hexágono regular

É um tipo especial de paralelepípedo retângulo em que todas as faces são quadrados iguais.



$$S = 12a \text{ (soma das arestas)}$$

$$A_{\text{face}} = a^2$$

$$Al = 4a^2$$

$$At = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$D = a\sqrt{3}$$

Exemplo: A área lateral de um cubo é $36cm^2$. Calcule a sua área total.

$$Al = 36cm^2 \Rightarrow Al = 4a^2 = 36 \Rightarrow a = 3$$

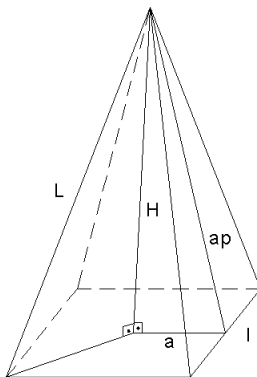
6. Pirâmide quadrangular regular

ap = apótema da pirâmide

L = aresta lateral da pirâmide

É o sólido que:

- A base é um quadrado;
- As faces laterais são triângulos iguais.



$$H^2 + a^2 = ap^2$$

$$H^2 + R^2 = L^2$$

$$A_{FL} = \frac{l \cdot ap}{2}$$

$$Al = \frac{4 \cdot l \cdot ap}{2}$$

$$At = Al + A_b$$

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

Exemplo: Numa pirâmide quadrangular regular, a aresta da base mede 6cm e a altura mede 4cm. Calcule a área lateral, a área total e o volume da pirâmide.

$$Al = \frac{4 \cdot l \cdot ap}{2} = 60\text{cm}^2 \quad a_b = l/2 = 3\text{cm}$$

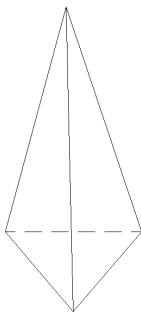
$$H^2 + a^2 = ap^2 \Rightarrow ap = 5\text{cm} \quad At = Al + A_b = 96\text{cm}^2$$

$$A_b = 36\text{cm}^2 \quad V = 48\text{cm}^3$$

7 Pirâmide triangular regular

É o sólido que:

- A base é um triângulo equilátero;
- As faces laterais são triângulos iguais.



$$H^2 + a^2 = ap^2$$

$$H^2 + R^2 = L^2$$

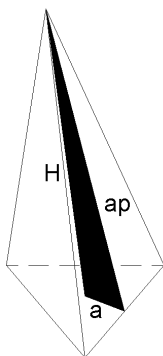
$$A_{FL} = \frac{l \cdot ap}{2}$$

$$Al = \frac{3 \cdot l \cdot ap}{2}$$

$$At = Al + A_b$$

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

Exemplo: Calcule a área lateral, a área total e o volume de uma pirâmide triangular regular cuja aresta da base mede 6cm e a altura da pirâmide 1cm.



$$Al = \frac{3 \cdot l \cdot ap}{2} \Rightarrow Al = 60\text{cm}^2$$

$$a_b = l/2 \Rightarrow a_b = 3\text{cm}$$

$$H^2 + a^2 = ap^2 \Rightarrow ap = 2\text{cm}$$

$$At = Al + ab \Rightarrow At = 9(2 + \sqrt{3})\text{cm}^2$$

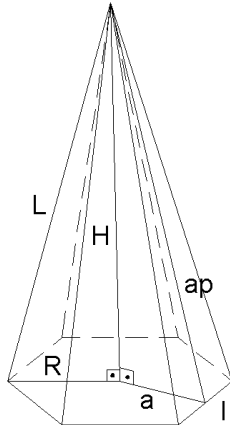
$$A_b = 9\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$V = 3\sqrt{3}\text{cm}^3$$

8 Pirâmide hexagonal regular

É o sólido em que:

- A base é um hexágono regular;
- As faces laterais são triângulos iguais.



$$H^2 + a^2 = ap^2$$

$$H^2 + R^2 = L^2$$

$$A_{FL} = \frac{l \cdot ap}{2}$$

$$Al = \frac{6 \cdot l \cdot ap}{2}$$

$$At = Al + A_b$$

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

Exemplo: Calcule a área lateral, a área total e o volume de uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta da base mede 8cm e a altura 4cm.

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$H^2 + a^2 = ap^2 \Rightarrow 48 + 16 = ap^2 \Rightarrow ap = 8$$

$$Al = \frac{6 \cdot l \cdot ap}{2} = 192 \text{cm}^2$$

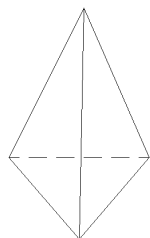
$$A_b = \frac{6 \cdot l^2 \sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3}$$

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3} = 32\sqrt{3} \text{cm}^3$$

$$At = Al + A_b \Rightarrow At = 96(2 + \sqrt{3}) \text{cm}^2$$

9 Tetraedro regular

É a pirâmide triangular regular em que todas as faces são **triângulos equiláteros iguais**. Portanto, todas as arestas de um tetraedro regular são iguais e vamos representar cada uma por l.



$$S = 6l \text{ (soma das arestas)}$$

$$ap = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$H = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

$$Al = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$At = \frac{4l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{l^3 \sqrt{2}}{12}$$

Exemplo: A área da base de um tetraedro regular é $9\sqrt{3} \text{cm}^2$. Calcule o seu volume.

$$A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow l = 6$$

$$V = \frac{l^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{216\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \text{cm}^3$$

Exercícios

1) A área de cada uma das faces de um cubo é igual a $12,25\text{cm}^2$. O volume deste cubo vale, em cm^3 ,

- a) 36,75 b) 21,4 c) 42,875 d) 83,75 e) 63,75

2) A área total de um cubo é de 24m^2 . O seu volume será, em cm^3 ,

- a) 16 b) 8 c) $\sqrt[3]{24}$ d) 216 e) 14

3) O número que expressa a área total de um cubo, em cm^2 , é o mesmo que expressa seu volume, em cm^3 . Qual o comprimento, em cm, de cada uma das arestas desse cubo?

- a) 9 b) 6 c) 4 d) 2 e) 1

4) Se a diagonal da face de um cubo mede 2cm, então a diagonal do cubo mede

- a) 3cm b) 5cm c) $2\sqrt{2}\text{cm}$ d) $\sqrt{6}$ e) 4cm

5) O volume de um cubo cuja diagonal mede 3 é

- a) 27 b) 9 c) 6 d) $3\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}$

6) A altura de uma pirâmide quadrangular regular mede $2\sqrt{5}\text{cm}$ e a aresta da base mede 8cm. A área lateral da pirâmide, em cm^2 , vale

- a) 192 b) 160 c) 96 d) 64 e) 32

7) Em uma pirâmide regular com 12cm de altura, tendo com base um quadrado de lado 10cm, a área lateral é

- a) 240cm^2 b) 260cm^2 c) 340cm^2 d) 400cm^2 e) $20\sqrt{119}\text{cm}^2$

8) A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular é igual ao dobro da área de sua base. Se a aresta da base mede 3cm, então o apótema da pirâmide mede

a) 3cm b) 6cm c) 9cm d) 12cm e) 15cm

9) Em uma pirâmide quadrangular regular com 4cm de altura, tendo o apótema da base igual a 3cm, a área lateral

a) 60cm^2 b) 30cm^2 c) 120cm^2 d) 45cm^2 e) 12cm^2

10) (UFPR) Uma pirâmide quadrangular regular tem 8m de altura e 10m de apótema. O seu volume é

a) 1152m^3 b) 288m^3 c) 96m^3 d) 384m^3 e) 48m^3

11) (PUC) A base de uma pirâmide é um hexágono regular cujo lado mede 2cm. Se a altura da pirâmide é $2\sqrt{3}\text{cm}$, seu volume, em cm^3 , é igual a

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

12) Se o lado da base de uma pirâmide hexagonal regular mede 3cm e sua aresta lateral mede 6cm, então sua altura mede

a) $3\sqrt{3}\text{cm}$ b) $\sqrt{3}\text{cm}$ c) 3cm d) $\sqrt{5}\text{cm}$ e) 5cm

13) A base de uma pirâmide regular é um hexágono que tem 6cm de lado. Se a altura da pirâmide mede 5cm, então sua aresta lateral mede

a) $\sqrt{30}\text{cm}$ b) 11cm c) $\sqrt{61}\text{cm}$ d) 30cm e) 7cm

14) O volume de um tetraedro regular de aresta 1 vale

a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{12}$

15) A soma das arestas de um tetraedro regular é igual a 36cm. A sua área total, em cm^2 , é igual a

a) $100\sqrt{3}$ b) $10\sqrt{3}$ c) $36\sqrt{3}$ d) $144\sqrt{3}$ e) $108\sqrt{3}$

Gabarito:

1) c 2) b 3) b 4) d 5) d 6) c 7) b 8) a 9) a 10) d 11) b 12) a

13) c 14) e 15) c

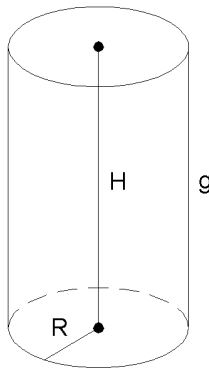
10 Cilindro

Chama-se **Cilindro de Revolução** ou **Cilindro Circular Reto** ao sólido que se obtém girando-se o retângulo em torno de um de seus lados.

R = raio da base

g = geratriz

H = altura do cilindro



$$g=h$$

$$\varnothing=2R$$

$$P=2\pi R$$

$$A_b=\pi R^2$$

$$A_l=2\pi Rg \text{ ou } A_l=2\pi RH$$

$$A_t=A_l+2A_b$$

$$V=A_b \times H \text{ ou } V=A_b \times g$$

Exemplo: O volume de um cilindro de revolução é $567\pi\text{cm}^3$ e a sua geratriz mede 7cm. Calcule a área total do cilindro.

$$V=A_b \times g \Rightarrow r=9$$

$$A_t=A_l+2A_b \Rightarrow A_t=288\pi\text{cm}^2$$

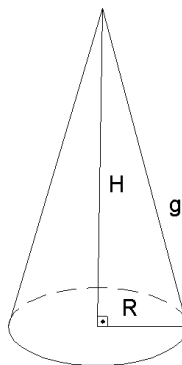
11 Cone

Chama-se **Cone de Revolução** ou **Cone Circular Reto** ao sólido que se obtém girando-se um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

R = raio da base

g = geratriz

H = altura



$$H^2+R^2=g^2$$

$$\varnothing=2R$$

$$P=2\pi R$$

$$A_b=\pi R^2$$

$$A_l=\pi Rg$$

$$A_t=A_l+A_b$$

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

Exemplo: Num cone de revolução, a área da base é $36\pi\text{cm}^2$ e a área total é $96\pi\text{cm}^2$. Calcule o volume do cone.

$$A_b=\pi R^2 \Rightarrow r=6\text{cm} \quad A_t=A_l+A_b \Rightarrow g=10$$

$$H^2+R^2=g^2 \Rightarrow H=8\text{cm} \quad V = \frac{A_b \cdot H}{3} \Rightarrow V=96\pi\text{cm}^3$$

12 Esfera

Chama-se esfera ao sólido que se obtém girando-se um semi-círculo em torno do seu diâmetro.

R = raio da esfera

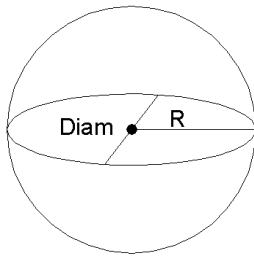
A = área da esfera

V = volume da esfera

$$\varnothing = 2R$$

$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$



$$A_{cm} = \text{área da círculo máximo} \quad A_{cm} = \pi R^2$$

Exemplo: O volume da esfera é $288\pi \text{cm}^3$. Calcule a área da superfície da esfera.

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow r = 6\text{cm}$$

$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow 144\pi \text{cm}^2$$

Exercícios

1) Num cilindro circular reto de volume 36π , a altura mede 4, então o raio da base mede

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 9

2) A área lateral de um cilindro de 6m de raio é igual a área da base. A altura desse cilindro é

- a) 2 b) 3 c) 5 d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{5}$

3) De um cubo de aresta 2cm retiramos um cilindro de diâmetro 2cm. O volume do sólido resultante e, em cm^3 , igual a

- a) 0 b) 6π c) $8 - 2\pi$ d) $8 - 3\pi$ e) $8 - 8\pi$

4) A área total de um cilindro reto de revolução é 128π e sua altura é 12. A área lateral do sólido é

- a) 192π b) 96π c) 64π d) 48π e) 36π

5) Um cone que tem raio 3cm e a altura igual ao diâmetro da base, tem o volume de

- a) $24\pi\text{cm}^3$ b) $12\pi\text{cm}^3$ c) $18\pi\text{cm}^3$ d) $54\pi\text{cm}^3$ e) $36\pi\text{cm}^3$
- 6) A altura de um cone de revolução que tem área lateral igual a 15π e raio da base igual a 3 é
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
- 7) A área lateral de um cone circular reto é o dobro da área de sua base. A razão entre a geratriz e o raio do cone é
- a) $1/3$ b) $1/2$ c) 1 d) 2 e) 3
- 8) Uma ampulheta pode ser considerada como formada por dois cones retos idênticos, unidos pelo vértice, inscritos em um cilindro reto. A razão entre o volume de um dos cones e o volume do cilindro é
- a) $1/2$ b) $1/3$ c) $1/4$ d) $1/6$ e) $1/8$
- 9) A razão entre o volume e a área de uma esfera de raio 2π é
- a) $3/\pi$ b) $\pi/3$ c) $2\pi/3$ d) 2π e) $\pi/2$
- 10) O volume de uma semiesfera de raio $3\sqrt{2}$ é
- a) $216\sqrt{2}$ b) $180\sqrt{2}\pi$ c) $72\sqrt{2}\pi$ d) $36\sqrt{2}\pi$ e) $18\sqrt{2}\pi$
- 11) Duas esferas de chumbo, uma de raio 2cm e outra de raio 3cm, fundem-se formando uma nova esfera. O raio da nova esfera mede, em cm
- a) 2,5 b) 5 c) $\sqrt[3]{35}$ d) 35 e) 6
- 12) Uma panela cilíndrica de 20cm de diâmetro está completamente cheia de massa para doce, sem exceder a sua altura de 16cm, o número de doces, em formato de bolinhas de 2cm de raio, que se podem obter com toda a massa é
- a) 300 b) 250 c) 200 d) 150 e) 100

Gabarito:

- 1) c 2) b 3) c 4) b 5) c 6) d 7) d 8) d 9) c 10) d 11) c 12) d