15.2 Integrais Iteradas

Lembremos que geralmente é difícil calcular as integrais de funções de uma variável real diretamente da definição de integral, mas que o Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método mais fácil para calculá-las. O cálculo de integrais duplas pela definição é ainda mais complicado, porém, nesta seção, veremos como expressar uma integral dupla como uma integral iterada, cujo valor pode ser obtido calculando-se duas integrais unidimensionais.

Suponha que f seja uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y)\, dy$ significando que x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y de $y = c$ até $y = d$. Esse procedimento é chamado *integração parcial em relação a y*. (Observe a semelhança com a derivada parcial.) Como $\int_c^d f(x, y)\, dy$ é um número que depende do valor de x, ele define uma função de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Se agora integrarmos a função A com relação à variável x de $x = a$ a $x = b$, obteremos

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

A integral do lado direito da Equação 1 é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são omitidos. Assim,

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

significa que primeiro integramos com relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b.

Da mesma forma, a integral iterada

$$\boxed{3} \qquad \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

significa que primeiro integramos com relação a x (fixando y) de $x = a$ a $x = b$ e em seguida integramos a função de y resultante com relação a y de $y = c$ a $y = d$. Observe que em ambas as Equações, 2 e 3, trabalhamos *de dentro para fora*.

EXEMPLO 1 Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy$

SOLUÇÃO

(a) Olhando x como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y\, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \tfrac{3}{2} x^2$$

Portanto, a função A da discussão precedente é dada por $A(x) = \frac{3}{2} x^2$ neste exemplo. Integramos agora essa função de x de 0 até 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2} x^2 dx = \frac{x^3}{2} \bigg]_0^3 = \frac{27}{2}$$

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y\, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y\, dy = 9 \frac{y^2}{2} \bigg]_1^2 = \frac{27}{2}$$

EXEMPLO 2 Calcule a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$. (Compare com o Exemplo 3 da Seção 15.1.)

SOLUÇÃO 1 O Teorema de Fubini nos dá

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^2 (x - 7)\,dx = \frac{x^2}{2} - 7x\Big]_0^2 = -12$$

SOLUÇÃO 2 Novamente, aplicando o Teorema de Fubini, mas dessa vez integrando com relação a x primeiro, temos

$$\iint_R (x - 3y^2)\,dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^2 (2 - 6y^2)\,dy = 2y - 2y^3\Big]_1^2 = -12$$

Exemplo 1 *Calcule* $\int\int_R (2x+4y)dxdy$ *em que*

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$$

<u>Resolução:</u>

Temos então que

$$\int\int_R (2x+4y)dxdy = \int_1^3 \left[\int_1^2 (2x+4y)dy\right] dx$$

Resolvendo a integral mais interna obteremos:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (2x+4y)dy &= \left[2xy + \frac{4y^2}{2}\right]_1^2 = \left[2xy + 2y^2\right]_1^2 \\
&= 2x.2 + 2.2^2 - (2x.1 + 2.1^2) \\
&= 4x + 8 - 2x - 2 \\
&= 2x + 6
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int\int_R (2x+4y)dxdy &= \int_1^3 (2x+6)dx = \left[\frac{2x^2}{2} + 6x\right]_1^3 \\
&= \left[x^2 + 6x\right]_1^3 = 3^2 + 6.3 - [1^2 + 6.1] \\
&= 9 + 18 - 7 \\
&= 20
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular essa mesma integral invertendo a ordem de integração

$$\int\int_R (2x+4y)dxdy = \int_1^2 \left[\int_1^3 (2x+4y)dx\right] dy$$

Resolvendo a integral mais interna obteremos:

$$\begin{aligned}\int_1^3 (2x+4y)dx &= \left[\frac{2x^2}{2}+4yx\right]_1^3 = \left[x^2+4xy\right]_1^3 \\ &= 3^2+4.3y-(1^2+4.1.y) \\ &= 9+12y-(1+4y) \\ &= 8y+8\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int\int_R (2x+4y)dxdy &= \int_1^2 (8y+8)dy = \left[\frac{8y^2}{2}+8y\right]_1^2 \\ &= \left[4y^2+8y\right]_1^2 = 4.2^2+8.2-[4.1^2+8.1] \\ &= 16+16-12 \\ &= 20\end{aligned}$$

EXEMPLO 2

$$V = \int_0^2 \int_0^2 (x^2+y^2)dydx$$

Assim

$$\int_0^2 (x^2+y^2)dy = \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = x^2.2+\frac{2^3}{3} = 2x^2+\frac{8}{3}$$

Logo

$$V = \int_0^2 (2x^2+\frac{8}{3})dx = \left[\frac{2x^3}{3}+\frac{8}{3}x\right]_0^2 = 2.\frac{2^3}{3}+\frac{8}{3}.2 = \frac{32}{3}$$

EXERCÍCIOS

1–6 □ Calcule as integrais iteradas.

1. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$

2. $\int_1^2 \int_y^2 xy\, dx\, dy$

3. $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x}\, dx\, dy$

4. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y)\, dy\, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} e^{\operatorname{sen}\theta}\, dr\, d\theta$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

Nos Exercícios 1-12, calcule as integrais iteradas.

1. $\int_0^1 \int_0^2 (x+3)\, dy\, dx$

2. $\int_1^3 \int_{-1}^1 (x^2 - 4y)\, dy\, dx$

3. $\int_2^4 \int_0^1 x^2 y\, dx\, dy$

4. $\int_{-2}^0 \int_{-1}^2 (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

5. $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dy\, dx$

6. $\int_0^2 \int_0^1 y \operatorname{sen} x\, dy\, dx$

7. $\int_{-1}^0 \int_2^5 dx\, dy$

8. $\int_4^6 \int_{-3}^7 dy\, dx$

9. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\, dy\, dx$

10. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 x \cos xy\, dy\, dx$

11. $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xy e^{y^2 x}\, dy\, dx$

12. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\, dy\, dx$