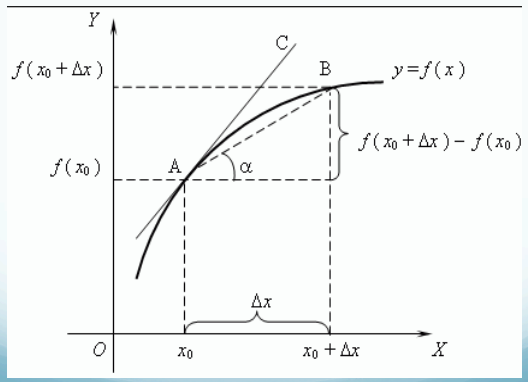
DERIVADA



$$f`(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f`(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f`(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Qual a derivada de y = 2x no ponto $x_0 = 3$

Cálculo 1

2.1- Regras de Derivação

1. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Considere $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ funções deriváveis de $\boldsymbol{x}$, com $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{IR}$ e $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{IR}$.

As principais *regras de derivação* e *derivadas das principais funções elementares segundo a Regra da Cadeia* são:

Cálculo 1 - Derivadas

Regras de derivação

R_1 - Derivada de uma função constante

Se **k** é uma constante e **f(x) = k** para todo **x**, então **f' (x) = 0**.

Exemplo

Seja f(x) = 5 → f' (x) = 0.

Se aplicarmos a definição:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5-5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Cálculo 1 - Derivadas

R_2 - Derivada de uma função potência

Se **n** é um número inteiro positivo e **f(x) = x^n**, então:

f' (x) = n. x^{n-1}

Exemplo: Seja f(x) = x^5 → f' (x) = $5x^4$.

R_3 - Derivada de uma função multiplicada por k

Sejam **f** uma função, **k** uma constante e **g** a função definida por **g(x) = k.f(x)**, então:

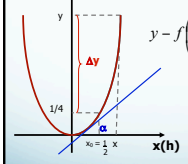
g' (x) = k.f' (x).

Exemplo: f(x) = $8x^2$ → f' (x) = 8.(2x) = 16x

Exemplos

Exemplo 1 – Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de **f(x) = x^2**, no ponto de abscissa 1/2.

$$y - y(x_0) = f'(x).(x - x_0)$$



$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right).\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

onde: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Cálculo de $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Por tanto:

$$y - \left(\frac{1}{4}\right) = 1.\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4x - 4y - 1 = 0$$

Exemplos

Exemplo 2 – Determinar a equação da reta normal ao gráfico de **f(x) = x² + 1**, no ponto de abscissa 1.

Chamando de m_1 o coeficiente angular da reta normal n, sua equação é:

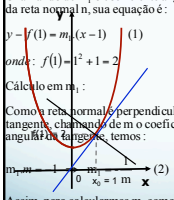
$y - f(1) = m_1(x-1)$ (1)

onde: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

Cálculo em m_1:

Como a reta normal é perpendicular à reta tangente, chamando de m o coeficiente angular da tangente, temos:

$m_1 . m = -1$ (2)



Assim, para calcularmos m, como

$f'(x) = 2x + 0 = 2x$ e $m = f'(1)$, teremos:

$m = 2.1 = 2$

Substituindo este valor em (2):

$m_1 = -\frac{1}{2}$

Levando este valor de m_1 em (1):

$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow$

$x + 2y - 5 = 0$

Cálculo 1 - Derivadas

R_4 - Derivada da Soma

- Sejam **f** e **g** duas funções e **h** a função definida por **h(x) = f(x) + g(x)**.

A derivada da soma é: **h' (x) = f' (x) + g' (x)**.

Exemplo: $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$

$f'(x) = 3.(4x^3) + 8.1 + 0 = f'(x) = 12x^3 + 8$

R_5 - Derivada do Produto

- Sejam **f** e **g** duas funções e h a função definida por **h(x) = f(x) . g(x)**. A derivada do produto é:

h' (x) = f (x) . g' (x) + f' (x).g(x) → y' = u.v' + u'.v

Exemplo $f(x) = (2x^3 - 1)(x^4 + x^2)$

$f'(x) = (2x^3 - 1).(4x^3 + 2x) + (x^4 + x^2).6x^2$

Cálculo 1 - Derivadas

R_6 - Derivada do quociente

- Sejam **f** e **g** duas funções e **h** a função definida por **h(x) = f(x) / g(x)**. A derivada do quociente é:

$$h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2} \rightarrow y' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$$

Exemplo:

$$f(x) = \frac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3} \longrightarrow f'(x) = \frac{(x^2 - 5x + 3).(2.4x^3 - 0) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 5x + 3).(8x^3) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2}$$

Exercícios de Fixação

R_1 - Derivada de uma função constante

Se c é uma constante e f(x) = c para todo x, então f' (x) = 0.

a) $y = 8$
b) $y = \sqrt{3+\pi}$
c) $y = -5$

a) $y = \cos\ \pi$
b) $y = sen(3+\pi)$
c) $y = e$

R_2 - Derivada de uma função potência

Se n é um número inteiro positivo e f(x) = x^n, então f' (x) = n. x^{n-1}.

a) $y = x^8$
b) $y = x^{-3}$
c) $y = x^{1/2}$

Cálculo 1 - Derivadas

R_3 - Derivada de uma função multiplicada por uma constante

Sejam **f** uma função, **k** uma constante e **g** a função definida por **g(x) = k.f(x)** **g' (x) = k.f' (x)**.

a) $y = 2x^8$
b) $y = 6x^{-3}$
c) $y = 4x^{1/2}$

d) $y = -5x^{-3}$
e) $y = 8^{-3}x^{-2/3}$
f) $y = ex^{a/b}$

g) $y = -5/x^{-3}$
h) $y = 1/x^{-2/3}$
i) $y = e/x^{a/b}$

Cálculo 1 - Derivadas

R_4 - Derivada da Soma e da Diferença

Sejam **f** e **g** duas funções e **h** a função definida por **h(x) = f(x) + g(x)**.

A derivada da soma é: **h' (x) = f ' (x) + g' (x)**

A derivada da diferença é: **h' (x) = f ' (x) - g' (x)**

$y = 2x^8 + x$
$y = 6x^{-3} - 2x$
$y = 4x^{1/2} - 3x + 2$

$y = -5x^{-3} - 4$
$y = 8^{-3}x^{-2/3} + x^{1/3}$
$y = \frac{x^3}{2} + \frac{3x}{2}$

$y = -5/x^{-3} - 3x^{-2}$
$y = 1/x^{-2/3} + 2x$
$y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b} - x$

Cálculo 1 - Derivadas

R_5 - Derivada do Produto

Sejam **f** e **g** duas funções e **h** a função definida por **h(x) = f(x).g(x)**. A derivada do produto é **h' (x) = f(x) . g' (x) + f '(x) . g(x)**.

a) $y = 2x^8 x$
b) $y = 6x^{-3}.2x$
c) $y = 4x^{1/2}.3x$
d) $y = -5x^{-3}.4x$
e) $y = 8^{-3}x^{-2/3}.x^{1/3}$
f) $y = \left(3x + \frac{1}{x}\right)\cdot(6x-1)$
g) $y = -5/x^{-3}.3x^{-2}$
h) $y = 1/x^{-2/3}.2x$
i) $y = x(2x-1)(3x+2)$

Cálculo 1 - Derivadas

R_6 - Derivada do quociente

Sejam **f** e **g** duas funções e **h** a função definida por **h(x) = f(x)/g(x)**

A derivada do quociente é:

$$h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

a) $y = (2x^8 + x)/(x-1)$
b) $y = 6x^{-3}/(2x-3)$
c) $y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}$
d) $y = -5x^{-3}/(3x-2)$
e) $y = 8^{-3}x^{-2/3}/x^{1/3}$
f) $y = \frac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$
g) $y = \frac{a-x}{a+x}$
h) $y = (x^{-2/3} - 2x)/2x$
i) $y = x(2x-1)/(3x+2)$

Cálculo 1 - Derivadas

R_7 - Seja **f(x) = sen x**, a **derivada do seno** é **f' (x) = cos x**.

R_8 - Seja **f(x) = cos x**, a **derivada do cosseno** é **f' (x) = - sen x**.

R_9 - Seja **f(x) = cotg x**, a **derivada da cotangente** é **f' (x) = - cosec^2 x**.

R_{10} - f(x) = sec x, a **derivada da secante** é **f' (x) = sec x . tg x**.

R_{11} - f(x) = cosec x, a **derivada da cosec** é **f' (x) = -cosec x . cotg x**.

Cálculo 1 - Derivadas

R_{12} - Regra da Cadeia

Se **f** e **g** são funções diferenciáveis, então a derivada da função composta **f(g(x))** é dada por:

[f(g(x))]' = f'(g(x)) . g'(x)

Exemplo

- Calcule a derivada de $h(x) = (2x + 1)^{10}$.

A função h(x) é composta, $f(x) = x^{10}$ e $g(x) = 2x + 1$.

Pela regra da cadeia, temos

$h'(x) = f'(g(x)) \,.\, g'(x) = 10.(2x + 1)^9.2 = 20(2x + 1)^9$

Cálculo 1 - Derivadas

R_{12}) Regra da Cadeia

Se f e g são funções diferenciáveis, então a derivada da função composta f(g(x)) é dada por:

[f(g(x))]' = f'(g(x)) . g'(x)

a) $y = (2x+3)^8$

b) $y = \left(x^2 - a^2\right)^5$

c) $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$

d) $y = \left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^3$

e) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

f) $y = \left(2x^2 - 3\right)^2$

Cálculo 1 - Derivadas

R_{13} - Derivada da função logarítmica neperiano ou natural

Seja **f(x) = lnx**, sua derivada é; **f' (x) = 1/x**.

Exemplo: $f(x) = \ln(3x^2 - x), então$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^2 - x}.(6x - 1) = \frac{6x - 1}{3x^2 - x}$$

R_{14} - Derivada da função logarítmica de base *a*

Seja **$f(x) = \log_a(x)$**, sua derivada é; **f' (x) = 1/x . lna**

Exemplo: $f(x) = \log_{10} x, então$

$$f'(x) = \frac{1}{x.\ln 10}$$

Cálculo 1 - Derivadas

R_{15} - Derivada da função exponencial de base "e"

Seja **f(x) = e^x**, sua derivada é a própria **f' (x) = e^x**.

R_{16} - Derivada da função exponencial de base "a"

Seja **f(x) = a^x**, sua derivada é: **f' (x) = a^x . lna**

DERIVADAS	DIFERENCIAIS	NOTAÇÃO DE LAGRANGE
$\frac{dk}{dx} = 0$	dk = 0	(k)´= 0
$\frac{d}{dx}ku = 0$	d(ku) = 0	(ku)´= 0
$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} \quad \frac{dv}{dx}$	d(u+v) = du+dv	(u+v)´= u´+ v´
$\frac{d}{dx}u.v = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$	d(u.v) = vdu + udv	(uv)´= u´v+v´u
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	d(u/v) = (vdu –udv)/v^2	(u/v)´= (u'v – v'u)/v^2
$\frac{d}{dx}u^n = n.u^{n-1}\frac{du}{dx}$	d(u^n) = n.u^{n-1}.du	(u^n)´= n.u^{n-1}.u´
$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$	d(e^u) = e^u.du	(e^u)´= e^u.u´

DERIVADAS	DIFERENCIAIS	NOTAÇÃO DE LAGRANGE
$\frac{d}{dx}a^u = a^u.\ln a.\frac{du}{dx}$	d(a^u) = a^u.lna.du	(a^u)' = a^u.lna.u'
$\frac{d}{dx}sen\,u = \cos u\,.\frac{du}{dx}$	d(senu) = cosu.du	(senu)' = cosu.u'
$\frac{d}{dx}cos\,u = -sen\,u.\frac{du}{dx}$	d(cosu) = - senu.du	(cosu)' = -senu.u'
$\frac{d}{dx}lnu = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$	d(lnu) = (1/u).du	(lnu)´= (1/u).u'
$\frac{d}{dx}arctg\,u = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$	d(arctgu) = du/ (1+u^2)	(arctgu)' = u'/(1+u^2)
$\frac{d}{dx}arcsen\,u = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$	$d(arcsen\,u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$	$(arcsen\,u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$