NÚCLEO DE MATEMÁTICA – DISCIPLINA: GEOMETRIA ANALÍTICA

PROFESSOR: ___________________________

ALUNO: ____

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS
(Vetores)

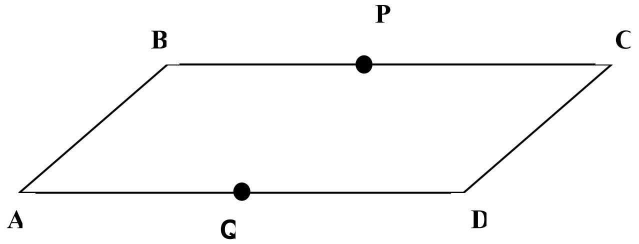
Questão 1. Considere o paralelogramo a seguir, onde os pontos P e Q são os pontos médios dos lados BC e AD, respectivamente. Determine:

a) $\vec{AB} + \vec{AD}$

b) $\vec{DC} - \vec{QD}$

c) $\frac{1}{2}\vec{CB} + \vec{QA}$

d) $\vec{BC} - \vec{QP}$



Questão 2. Considere o paralelepípedo ABCDEFGH, atribua (V) ou (F), justificando o máximo possível.

a) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ é L.I.

b) $\overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{DA}$ são L.I.

c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são L.I.

d) $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{FG}$ são L.D.

e) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DH}$ e $\overrightarrow{HG}$ são L.D.

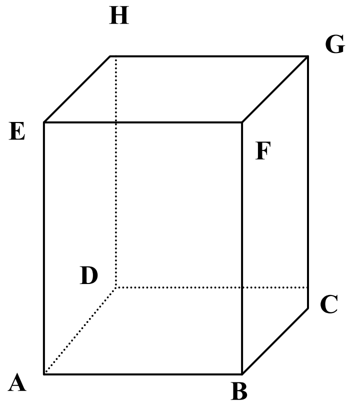
f) $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{BF}$ e $\overrightarrow{AD}$ são L.I.

g) $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{DH}$ e $\overrightarrow{AF}$ são L.D.

h) $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{GE}$ são L.I.

i) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{GB}$ e $\overrightarrow{AG}$ são L.I.

j) $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{HF}$ e $\overrightarrow{AH}$ são L.D.



Questão 3. Escreva o vetor $\vec{u}$ como combinação linear dos demais vetores, em cada caso:

a) $\vec{u} = (-1,8)$, $\vec{v} = (1,2)$, $\vec{w} = (4,-2)$

b) $\vec{u} = (1,0,-3)$, $\vec{u}_1 = (1,-1,0)$, $\vec{u}_2 = (1,2,0)$, $\vec{u}_3 = (0,0,3)$

Questão 4. Mostre que os pontos $A(4,0,1)$, $B(5,1,3)$, $C(3,2,5)$ e $D(2,13)$ são vértices do paralelogramo $ABCD$. E represente-o no espaço através de suas coordenadas.

Questão 5. Sejam $\vec{u} = (2,0,-1)$, $\vec{v} = (0,3,1)$, $\vec{w} = (4m,-6,n-2)$, A(1,–2,0), B(–2,–2,1) e C(3,0,2). Faça o que se pede:

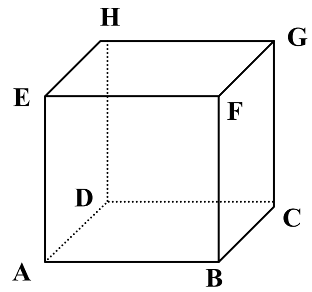
a) Verifique se o conjunto $\{\vec{u},\vec{v},\vec{AB}\}$ é L.I. ou L.D;
b) Determine as coordenadas do ponto D, vértice do paralelogramo ABCD;
c) Determine um vetor $\vec{a}$ que tenha a mesma direção, o sentido oposto e o dobro do tamanho de $\vec{u}$;
d) Calcule os valores de m e n para que $\vec{w}$ seja paralelo a $\vec{u}+\vec{v}$;

Questão 6. Sejam $\vec{u} = (1,3,-1), \vec{v} = (0,-1,1)$ e $\vec{w} = (1,0,2)$. Verifique se o conjunto $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é uma base do espaço. Em caso afirmativo, determine as coordenadas do vetor $\vec{a} = 3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$. Em caso negativo, escreva $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Questão 7.. São dados os pontos A(0,1,2), B(2,1,0), C(–1,1,3), D(4,2,0) e E(1,2,1), verifique:

a) Se A, B e C são colineares;
b) Se A, C, D e E são coplanares.

Questão 8. Considere o cubo ABCDEFGH. Sejam A(3,5,4), B(6,5,4), D(3,5,7) e E(3,2,4). Faça o que se pede, levando em conta os conhecimentos sobre vetores:



a) Determine as coordenadas dos outros vértices;
b) Determine as coordenadas do vetor $2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}$ em relação à base $\{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\}$;
c) Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AF}$ em relação à base $\{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\}$;
d) Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AG}$ em relação à base $\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\}$.

Questão 9. Assinale (V) verdadeiro ou (F) falso nos itens a seguir, justificando devidamente suas respostas.

a) Os vetores $\vec{a} = (1,-2,0)$ e $\vec{b} = (-2,4,0)$ são paralelos;
b) Os vetores $\vec{h} = (4,0,-1)$, $\vec{m} = (-2,3,1)$ e $\vec{n} = (0,2,1)$ têm representantes num mesmo plano;
c) Os vetores $\vec{w} = (3,2,-1)$ e $\vec{f} = (-3,-2,1)$ são coplanares, por isso são LD;
d) O ângulo entre os vetores $\vec{u} = (-2,3,3)$ e $\vec{v} = (1,0,-1)$ é obtuso;
e) O triângulo ABC formado pelos pontos A(0,1,2), B(4,2,1) e C(2,2,5) é retângulo em B;

Questão 10. Sejam $\vec{u} = (1,0,-2), \vec{v} = (0,1,1)$, $\vec{w} = (-1,1,1)$ e $\vec{a} = (\frac{x}{2},3y,6)$. Faça o que se pede:

a) Seja A(0,2,3), determine as coordenadas do ponto B, tal que $\overrightarrow{AB} = -2\vec{w}$;
b) Verifique se os vetores $\vec{a} = (-3,0,6)$ e $\vec{u}$ são LI ou LD;
c) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{y} = 4\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$;
d) Determine as coordenadas de um vetor não nulo e ortogonal a $\vec{v}$;
e) Um vetor $\vec{h}$, onde $\vec{h}$ tenha a direção da bissetriz do ângulo $(\vec{u},\vec{w})$;
f) Dados os ângulos diretores do vetor $\vec{t}$: α = 45º, β - obtuso e γ = 120º, determine as coordenadas do versor $\vec{t}_0$.

Questão 11. Considere os vetores $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (0,-2,3)$ e $\overrightarrow{w} = (2,0,a)$:

a) Calcule o valor de <u>a</u> para que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sejam LD;

b) Calcule as coordenadas do vetor $\text{proj}_{\vec{u}}^{\vec{v}}$;

c) Calcule o valor de h e k para que o vetor $\vec{x} = (2, h+1, 3k)$ seja paralelo ao vetor $\vec{u} - \vec{v}$.

Questão 12. Calcular o valor de z para que o vetor $\vec{v} = \left(z, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ seja unitário.

Questão 13. Calcular o perímetro do triângulo de vértices $A(0,1,2)$, $B(-1,0,-1)$ e $C(2,-1,0)$.

Questão 14. Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = (\alpha+1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ sejam ortogonais.

Questão 15. Seja o triângulo de vértices $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ e $C(3,-2,1)$. Determinar o ângulo interno ao vértice B.

Questão 16. Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45º, 60º e 90º? Justifique.

Questão 17. Seja (α, β, γ) os ângulos diretores do vetor $\vec{v}$. Sabendo-se que $|\vec{v}| = 2$, $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ e $\cos(\beta) = \frac{-1}{4}$, determinar $\vec{v}$.

Questão 18. Sobre produto vetorial, faça o que se pede:

a) Calcule a área do triângulo ABC para $\overrightarrow{AB} = (1,1,3)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$;

b) Construa uma base negativa do espaço contendo os vetores $\vec{u} = (1,-3,1)$ e $\vec{v} = (-3,0,3)$;

c) Determine um vetor <u>unitário</u> ortogonal a (1,0,2) e a (–2,3,3).

Questão 19. Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1,2,m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v_1} = (2,-1,0)$ e $\vec{v_2} = (1,-3,-1)$.

Questão 20. Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto A(3,2,1) e uma diagonal de extremidades P(1,1,–1) e Q(0,1,2).

Questão 21. Considere os pontos A(1,–2,3), B(2,–1,–4), C(0,2,0) e D(–1,2,1), vértices de um tetraedro. Calcule o volume do tetraedro ABCD e a área da base ACD.

Questão 22. Qual o valor de x para que o volume do tetraedro de arestas $\vec{OA}=(x,3,4), \vec{OB}=(0,4,2)$ e $\vec{OC}=(1,3,2)$ seja igual a 2 u.v..

Questão 23. Dados os vetores $\vec{u}=(2,1,0), \vec{v}=(1,0,1)$ e $\vec{w}=(0,1,0)$ determine o que se pede:

a) Uma base ortogonal negativa do espaço (vetores da base ortogonais dois a dois) contendo dois dos vetores acima; (dica: procure dois que já sejam ortogonais para começar)
b) O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

GABARITO

Q1. a) $\vec{AC}$ b) $\vec{DP}$ c) $\vec{CB}$ d) $\vec{BD}$
Q2. a) F b) F c) F d) F e) F f) V g) F h) F i) F j) V
Q3. a) $a = 3$ e $b = -1$ b) $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ e $c = -1$
Q5. a) LI b) D(6,0,1) ou D(0,0,1) c) (–4,0,2) d) $m = -1$ e $n = 2$
Q6. Não é base: $\vec{w} = \vec{u} + 3\vec{v}$
Q7. a) Sim b) Não
Q8. a) C(6,5,7), F(6,2,4), G(6,2,7), H(3,2,7) b) (0,2,1) c) (0,1,1) d) (–1,1,0)
Q9. a) V b) F c) F d) V e) F
Q10. a) B(2,0,1) b) LD f) $\vec{y} = (2,1,-7)$ c) $(\frac{-1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}})$ d) $(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{3}})$
e) $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
Q11. a) $a = 1$ b) $(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{8}{3})$ c) $h = 1$ e $k = -\frac{2}{3}$
Q12. $z = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ou $z = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
Q13. $2\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)$
Q14. $\alpha = -3$ ou $\alpha = 2$
Q15. 45º
Q18. Não
Q19. $\vec{v} = (1,\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{11}}{2})$ ou $\vec{v} = (1,\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{11}}{2})$
Q18. a) $\frac{\sqrt{22}}{2}$ b) {(1,-3,1),(-3,0,3),(9,6,9)} c) $(-\frac{6}{\sqrt{94}},-\frac{7}{\sqrt{94}},\frac{3}{\sqrt{94}})$
Q19. $m = -5$
Q20. $\sqrt{74}$
Q21. $V = \frac{10}{3}$ u.v. e $S = 2\sqrt{3}$
Q22. x = 11 ou x = –1
Q23. a) {(1,0,1),(-1,0,1),(0,1,0)} b) 2 u.v.