Erros e Operações

1.2 Erros Absolutos e Relativos

1.2.1 Erro Absoluto

É o módulo da diferença entre um valor exato x de um número e seu valor aproximado $\bar{x}$.

(Eq.1) $EA_x = |x - \bar{x}|$,

onde x é o valor exato e $\bar{x}$ é o valor aproximado.

Geralmente não se conhece o valor exato x. Assim, o que se faz é obter um limitante superior (k_1 majorante) ou uma estimativa para o módulo do erro absoluto.

(Eq.2) $|EA_x| \le k_1$.

Exemplos:

a) Sabendo-se que $\pi = (3{,}14; 3{,}15)$ tomaremos para π um valor dentro deste intervalo e teremos, então, $|E_{a_x}| = |\pi - \bar{\pi}| < 0.01$.

b) Seja x representado por $\bar{x} = 2112{,}9$ de forma que $|E_{a_x}| < 0{,}1$ podemos dizer que $x \in (2112{,}8; 2113{,}0)$.

1.2.2 Erro Relativo ou Taxa de Erro

Erro relativo de x é o módulo do quociente entre o erro absoluto EA_x e o valor exato x ou o valor aproximado $\bar{x}$, se x ou $\bar{x} \neq 0$.

(Eq.3) $ER_x = \left|\frac{EA_x}{x}\right| = \left|\frac{x - \bar{x}}{x}\right|$ ou $ER_x = \left|\frac{EA_x}{\bar{x}}\right| = \left|\frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}\right|$.

Erro percentual: é o erro relativo em termos percentuais, ou seja:

$$\boxed{E_{p_x} = E_{r_x} \times 100\%}$$

Exemplos:

a) Seja x representado por $\bar{x} = 2112{,}9$ de forma que $|E_{a_x}| < 0{,}1$ podemos dizer que $x \in (2112{,}8; 2113{,}0)$.

$$|E_{r_x}| = \frac{|E_{a_x}|}{\bar{x}} < \frac{0{,}1}{2112{,}9} \cong 4{,}7 \times 10^{-5}$$

$$E_{p_x} = 4{,}7 \times 10^{-5}.100\% = 0{,}0047\%$$

1.3 Erros de Arredondamento e Truncamento

1.3.1 Erro de Arredondamento

Arredondar um número na casa d_i é desconsiderar as casas d_{i+j} ($j = 1, \ldots, \infty$) de tal forma que:

d_i seja a última casa se $d_{i+1} < 5$;

$d_i + 1$ seja a última casa se $d_{i+1} \ge 5$.

Exercício 3 Arredondar π na quarta casa decimal, sendo que $\pi = 3{,}1415926535\ldots$

1.3.2 Erro de Truncamento

Truncar um número na casa d_i é desconsiderar as casas d_{i+j} ($j = 1, \ldots, \infty$).

Exercício 4 Aproximar π truncando na quarta casa decimal, sendo que $\pi = 3{,}1415926535\ldots$

1.5.4 Propagação de erros

Suponhamos que as operações indicadas nos itens a) e b) sejam processadas numa máquina com 4 dígitos significativos.

Fazendo $x_1 = 0.3491 \times 10^4$ e $x_2 = 0{,}2345 \times 10^0$ temos:

$$a)\ (x_2 + x_1) - x_1 = (0{,}2345.10^0 + 0{,}3491.10^4) - 0{,}3491.10^4$$
$$= 0.3491.10^4 - 0{,}3491.10^4$$
$$= 0{,}0000$$

$$b)\ x_2 + (x_1 - x_1) = 0{,}2345.10^0 + (0{,}3491.10^4 - 0{,}3491.10^4)$$
$$= 0.2345.10^0 + 0{,}0000$$
$$= 0{,}2345$$

a) $(11.4 + 3.18) + 5.05$ *e* $11.4 + (3.18 + 5.05)$

$$\begin{aligned}(11.4 + 3.18) + 5.05 &= 14.6 + 5.05 = 19.7\\ 11.4 + (3.18 + 5.05) &= 11.4 + 8.23 = 19.6\end{aligned}$$

b) $\frac{3.18 \times 11.4}{5.05}$ *e* $\left(\frac{3.18}{5.05}\right) \times 11.4$

$$\begin{aligned}\frac{3.18 \times 11.4}{5.05} &= \frac{36.3}{11.4} = 7.18\\ \left(\frac{3.18}{5.05}\right) \times 11.4 &= 3.18 \times 16.5 = 7.19\end{aligned}$$

c) $3.18 \times (5.05 + 11.4)$ *e* $3.18 \times 5.05 + 3.18 \times 11.4$

$$\begin{aligned}3.18 \times (5.05 + 11.4) &= 3.18 \times 16.5 = 52.3\\ 3.18 \times 5.05 + 3.18 \times 11.4 &= 16.1 + 36.3 = 52.4\end{aligned}$$

Arrredondamento e aritmética de ponto flutuante

Um número real x no sistema de aritmética de ponto flutuante pode ser escrito também na forma:

$$x = \pm(0,d_1d_2d_3...d_t).\beta^e$$

com $d_1 \neq 0$, pois é o primeiro algarismo significativo de x.

onde:

d_i - são números inteiros contidos no intervalo $0 \le d_i \le \beta - 1; \quad i = 1,2,..,t$;

e - representa o expoente de β e assume valores entre $I \le e \le S$ onde

I, S - são, respectivamente, limite inferior e superior para a variação do expoente;

$\left[\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + ... + \frac{d_t}{\beta^t}\right]$ é a chamada ***mantissa*** e é a parte do número que representa seus dígitos significativos e t ***é o número de dígitos significativos*** do sistema de representação, comumente chamado de precisão da máquina.

Exemplos:

a) Escrever os números reais $x_1 = 0.35$, $x_2 = -5.172$, $x_2 = 0.0123$, $x_4 = 0.0003$, e $x_5 = 5391.3$ onde estão todos na base $\beta = 10$ em notação de um sistema de aritmética de ponto flutuante.

Solução:

$$0.35 = (3\times10^{-1} + 5\times10^{-2})x10^0 = 0.35\times10^0$$
$$-5.172 = -(5\times10^{-1} + 1\times10^{-2} + 7\times10^{-3} + 2\times10^{-4})\times10^1 = -0.5172\times10^1$$
$$0.0123 = (1\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 3\times10^{-3})\times10^{-1} = 0.123\times10^{-1}$$
$$5391.3 = (5\times10^{-1} + 3\times10^{-2} + 9\times10^{-3} + 1\times10^{-4} + 3\times10^{-5})\times10^4 = 0.53913\times10^4$$
$$0.0003 = (3\times10^{-1})\times10^{-3} = 0.3\times10^{-3}$$

b) Considerando agora que estamos diante de uma máquina que utilize apenas três dígitos significativos e que tenha como limite inferior e superior para o expoente, respectivamente, -2 e 2, como seriam representados nesta máquina os números do exemplo a)?

Solução: Temos então para esta máquina $t = 3$, $I = -2$ e $S = 2$. Desta forma $-2 \le e \le 2$. Sendo assim temos:

$0.35 = 0.350\times10^0$
$-5.172 = -0.517\times10^1$
$0.0123 = 0.123\times10^{-1}$
$5391.3 = 0.53913\times10^4$ Não pode ser representado por esta máquina. Erro de ***overflow***.
$0.0003 == 0.3\times10^{-3}$ Não pode ser representado por esta máquina. Erro de ***underflow***.

Um erro de *overflow* ocorre quando o número é muito grande para ser representado, já um erro de *underflow* ocorre na condição contrária, ou seja, quando um número é pequeno demais para ser representado.

Exercício 20 Preencher a tabela a seguir, com base nos parâmetros: $t=3$, $\beta=10$, $I=-5$, $S=5$ e $-5 \le \mathbf{exp} \le 5$.

Número	**Truncamento**	**Arredondamento**
−6,48		
0,0002175		
3498,3		
−0,00000001452		
2379441,5		

2.1 - *Considere o sistema* $F(10,4,4,4)$. *Represente neste sistema os números:* $x_1 = 4321.24$, $x_2 = -0.0013523$, $x_3 = 125.64$, $x_4 = 57481.23$ *e* $x_5 = 0.00034$.