Problemas envolvendo reta tangente e reta normal.

Questão 1. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f, nos pontos indicados.

(a) $f(x) = 3x + 5 \quad (x_o = 2)$

(b) $f(x) = x^2 + 3 \quad (x_o = 4)$

(c) $f(x) = 2x^3 + 2 \quad (x_o = 2)$

(d) $f(x) = \sqrt{x + 1} \quad (x_o = 8)$

Questão 2. Considerando as funções a seguir, represente no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, o gráfico de f e os gráficos das retas tangente e normal, no ponto de abscissa x_o indicado. ***(Visualizar no Winplot)***

(a) $f(x) = x^2 - 4 (x_o = 1)$

(b) $f(x) = -2x - 4 \quad (x_o = -1)$

(c) $f(x) = \sqrt{x} \, (x_o = 0)$

(d) $f(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad (x_o = -2)$

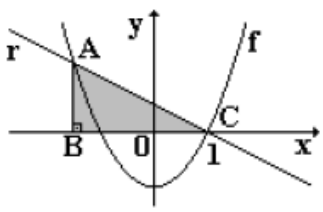
Questão 3. Em que ponto(s) da curva $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ a reta tangente tem ângulo de inclinação igual a $\pi/4$?

Questão 4. Caso exista, determine o(s) ponto(s) da curva $f(x) = 1/x$, no qual a reta tangente é paralela à:

(a) 1ª bissetriz, isto é, $y = x$. **(b)** 2ª bissetriz, isto é, $y = -x$.

Questão 5. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$ e que seja perpendicular à reta $2y + x = 3$.

Questão 6. Calcule a ***área*** do triângulo retângulo *ABC* na figura abaixo, sabendo que a reta **r** é ***normal*** à curva de equação $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 1}$, no ponto de abscissa $\boldsymbol{x_o = 1}$.



Regra da cadeia

Questão 7. Calcule a derivada das funções abaixo:

(a) $f(x)=\left(2x^3+5x-8\right)^3$ **(b)** $f(x)=\left(\dfrac{3x-3}{2x+5}\right)^4$ **(c)** $f(x)=\left(5x^3+2x\right)^3.\left(x-x^2\right)^2$

(d) $f(x)=5\sqrt{3x^4+5x+1}$ **(e)** $f(x)=\dfrac{(2x-3)^3}{(5-3x)^2}$ **(f)** $f(x)=2e^{\left(3x^2+6x+7\right)}$

(g) $f(x)=2^{\left(5-x^3\right)}$ **(h)** $f(x)=e^{\left(\sqrt{x}\right)}.\left(x^3-5x\right)$ **(i)** $f(x)=3e^{sen(x)}$

(j) $f(x)=cos\left(e^x+1\right)$ **(k)** $f(x)=2\,sen\left(x^2\right).cos(x+1)$ **(l)** $f(x)=sen^3(x)$

(m) $f(x)=\dfrac{2^{(2x)}.cos(3x)}{sen(5x)}$ **(n)** $y=\log_2(1-3x)$ **(o)** $y=\dfrac{sen(2x)}{ln\left(x^2\right)}$

(p) $f(x)=ln\left(\dfrac{x^2 sen(x)}{\sqrt{1+x}}\right)$

Questão 8. Encontre a equação da reta *tangente* ao gráfico de $f(x)=\dfrac{2\,sen\left(x^2+2x\right)-3}{cos\left(x^3\right)+1}$ no ponto $x_o=0$.

Derivadas das funções trigonométricas inversas

Questão 9. Calcule a derivada das funções abaixo:

(a) $y=arccos(2x+1)$ **(b)** $y=\mathrm{arccossec}\left(e^x\right)$

(c) $y=x^2\left(arcsen(x)\right)^3$ **(d)** $y=e^x\mathrm{arcsec}(x)$

(e) $y=arctg(2^{7x})$ **(f)** $y=\mathrm{arccotg}(ln\,x)$

Questão 10. Mostre que a reta normal à curva $y=arcsen(x)-ln(x+1)$, no ponto $x_o=0$, faz com o eixo *Ox* um ângulo de 90°.

Questão 11. Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico da função $y=arctg^2(x)$, no ponto de abscissa $x_0=\sqrt{3}$.

Derivadas sucessivas.

Questão12. Calcule as derivadas sucessivas até a ordem n indicada.

(a) $y = 3x^4 - 2x - 9, \ \ n = 4$ **(b)** $y = sen(-5x), \ \ n = 5$

(c) $y = ln(1 - x^2), \ \ n = 2$ **(d)** $y = e^{2x+1}, \ \ n = 3$

Questão 13. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis até a 3ª ordem. Mostre que:

(a) $(f.g)'' = gf'' + 2f'g' + fg''$ **(b)** $(f.g)''' = gf''' + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

Questão 14. Mostre que a função $x = A.cos(\omega t + \alpha)$, onde *A*, ω e α são *constantes e t é variável,* é solução da ***equação diferencial*** $x'' + \omega^2 x = 0$.

Derivada na forma implícita.

Questão 15. Determine a derivada y' das curvas dadas *implicitamente* por:

(a) $x^2 + y^2 = 4$ **(b)** $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$ **(c)** $x^2y^2 + x\,sen(y) = 0$

(d) $e^{xy} = x + y - 3$ **(e)** $y^3 - \dfrac{x - y}{x + y} = 0$ **(f)** $tg(y) = xy - 1$

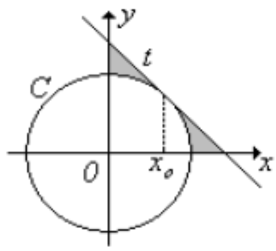
Questão 16. Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de cada função abaixo, nos pontos indicados:

(a) $6x^2 + 13y^2 = 19$ (***elipse***), nos pontos onde a normal é paralela à reta $26x - 12y - 7 = 0$. (***Ver no Winplot***)

(b) $ln(y) = x + y^2$ no ponto $P(-1,1)$.

(c) $x^3 = y.2^y$, no ponto em que a normal é vertical.

Questão 17. Seja *C* a circunferência dada *implicitamente* por $x^2 + y^2 = 1$ e t a reta tangente à *C* no ponto de abscissa $x_o = \sqrt{2}/2$, como mostra a figura ao lado. Calcule o valor da área sombreada.



Questão 18. Mostre que as retas tangentes às curvas $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ e $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$ na origem, são perpendiculares.

Regras de L'Hospital

Questão 19. Calcule os limites abaixo usando as ***Regras de L'Hospital :***

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-5x+5senx}{2x^3}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{4x}}{5x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-senx}$ **(e)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[xsen\left(\dfrac{5}{x}\right)\right]$ **(f)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (x)^{5/x^2}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} [cos\,(2x)]^{3/x^2}$ **(h)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(2x^2+x\right)^x$ **(i)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(e^{1/x}-1\right)$

Questão 20. Para cada função a seguir, determine (se possível): o domínio, os intervalos de crescimento e decrescimento, além dos máximos e mínimos relativos.

(a) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$

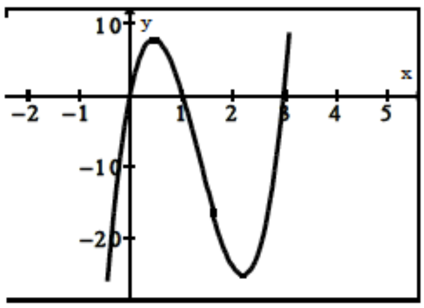
(b) $f(x)=-x^3+3x-2$

(c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; Sabendo que: $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

(d) $f(x)=e^{-x^2/2}$; Sabendo que: $f'(x)=-xe^{-x^2/2}$.

(e) $f(x)=\dfrac{-2x^2+8}{\left(x^2-16\right)}$; Sabendo que: $f'(x)=\dfrac{48x}{\left(x^2-16\right)^2}$.

Questão 21. Sabe-se que: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$, o gráfico da derivada f' é representado ao lado e f tem um máximo no ponto $(1,5)$. Determine as constantes a, b e c.



Otimização

Questão 22. Resolva cada problema a seguir:

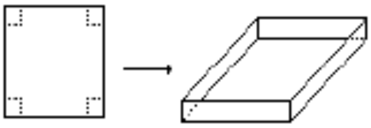
(a) Deseja-se cercar um jardim de forma retangular com L metros de cerca. Encontre as dimensões do maior jardim que pode ser cercado se usado todo o material.

(b) A potência *P* de uma bateria de um automóvel é dada por $P=VI-I^2R$, sendo *I* a corrente para uma voltagem *V* e resistência interna da bateria *R*. São constantes *V* e *R*. Que corrente corresponde à potência *máxima*?

(c) Uma área retangular com $288m^2$ deve ser cercada. Em dois lados opostos será usada uma cerca que custa 1 real o metro e nos lados restantes, uma cerca que custa 2 reais o metro. Encontre as dimensões do retângulo com o menor custo.

(d) Uma fábrica produz *x* **milhares** de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 6$ e a receita obtida na venda é dada por $R(x) = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades que *maximiza* o lucro *L*. (Lucro = Receita - Custo, isto é, $L(x) = R(x) - C(x)$).

(e) Usando uma folha de cartolina, de lado igual a *60 cm*, deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando seus cantos em quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o *maior* possível.



(f) Uma reta passando por $P(1,2)$ corta o eixo *Ox* em $A(a,0)$ e o eixo *Oy* em $B(0,b)$. Determine o triângulo *OAB* de área mínima, para *a* e *b* positivos.

(g) O departamento de trânsito de uma cidade, depois de uma pesquisa, constatou que num dia normal da semana à tarde, entre 2 e 7 horas, a velocidade do tráfego é de aproximadamente $V(t) = 2t^3 - 27t^2 + 108t - 35$ quilômetros por hora, onde *t* é o número de horas transcorridas após o meio dia. A que horas do intervalo de 2 às 7, o tráfego flui mais rapidamente e a que horas flui mais lentamente, e com que velocidade?

(h) Um gerador de corrente elétrica tem uma força eletromotriz de ε volts e uma resistência interna de r ohms. ε e r são constantes. Se *R* ohms é uma resistência externa, a resistência total é *(r + R)* ohms e se *P* watts é a potência então, $P = (\varepsilon^2 R)/(r + R)^2$. Qual o valor de *R* que consumirá o *máximo* de potência? Interprete o resultado.

(i) Se $1200\,cm^2$ de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

Respostas

Questão 1.

(a) tangente : $y - 3x - 5 = 0$ e normal : $3y + x - 35 = 0$

(b) tangente : $y - 8x + 13 = 0$ e normal : $8y + x - 156 = 0$

(c) tangente : $y - 24x + 30 = 0$ e normal : $24y + x - 434 = 0$

(d) tangente : $6y - x - 10 = 0$ e normal : $y + 6x - 51 = 0$

Questão 3. $x = 1$ e $x = -1/3$

Questão 4.

(a) não existe

(b) $(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$

Questão 5. reta tangente : $y = 2x - \left(\dfrac{25}{4}\right)$

Questão 6. $\dfrac{25}{16} u.a.$

Questão 7.

(a) $f'(x) = 3(2x^3 + 5x - 8)^2 (6x^2 + 5)$

(b) $f'(x) = \dfrac{84(3x-3)^3}{(2x+5)^5}$

(c) $f'(x) = (5x^3 + 2x)^2 (x - x^2)(-65x^4 + 55x^3 - 14x^2 + 10x)$

(d) $f'(x) = \dfrac{(60x^3 + 25)}{2\sqrt{3x^4 + 5x + 1}}$

(e) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)^2 (12 - 6x)}{(5 - 3x)^3}$

(f) $f'(x) = (12x + 12)e^{(3x^2 + 6x + 7)}$

(g) $f'(x) = 2^{(5 - x^3)} \ln(2)(-3x^2)$

(h) $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \left[\dfrac{x^3 - 5x}{2\sqrt{x}} + (3x^2 - 5) \right]$

(i) $f'(x) = 3\cos(x) e^{sen(x)}$

(j) $f'(x) = -e^x\, sen(e^x + 1)$

(k) $f'(x) = 4x\cos(x^2)\cos(x+1) - 2\,sen(x^2)\,sen(x+1)$

(l) $f'(x) = 3\,sen^2(x)\cos(x)$

(m) $f'(x) = \dfrac{\left[2^{(2x)} \ln(4)\cos(3x) - 3.2^{(2x)}\, sen(3x)\right] sen(5x) - 5.2^{(2x)} \cos(3x)\cos(5x)}{sen^2(5x)}$

(n) $y' = \dfrac{3}{(3x-1)\ln 2}$

(o) $y' = \dfrac{2x\cos(2x)\ln(x^2) - 2\,sen(2x)}{x \ln^2(x^2)}$

(p) $f'(x) = \dfrac{2}{x} + \cot g(x) - \dfrac{1}{2 + 2x}$

Questão 8. $2y-4x+3=0$

Questão 9.

(a) $y'=\dfrac{-2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$

(b) $y'=\dfrac{-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

(c) $y'=2x\left(sen^{-1}x\right)^3+\dfrac{3x^2\left(sen^{-1}x\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $y'=e^x arc\sec(x)+\dfrac{e^x}{x\sqrt{x^2-1}}$

(e) $y'=\dfrac{7\ln(2)2^{7x}}{1+2^{14x}}$.

(f) $y'=\dfrac{-1}{x\ln^2 x+x}$.

Questão 11.

reta tangente: $y-\left(\dfrac{\pi^2}{9}\right)=\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$ *reta normal:* $y-\left(\dfrac{\pi^2}{9}\right)=\left(\dfrac{-6}{\pi}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$

Questão 12.

(a) $y^{(4)}=72$

(b) $y^{(5)}=(-5)^5\cos(-5x)$

(c) $y''=\dfrac{-2-2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$

(d) $y'''=8e^{(2x+1)}$

Questão 15.

(a) $y'=-xy^{-1}$

(b) $y'=\dfrac{1-y^2}{2xy+6y^2+2}$

(c) $y'=\dfrac{-2xy^2-sen(y)}{2x^2y+x\cos(y)}$

(d) $y'=\dfrac{ye^{xy}-1}{1-xe^{xy}}$

(e) $y'=\dfrac{2y}{3y^2(x+y)^2+2x}$

(f) $y'=\dfrac{y}{sec^2(y)-x}$

Questão 16.

(a) R. T: $\begin{cases}6x+13y+19=0 & \text{em } P(-1,-1)\\ 6x+13y-19=0 & \text{em } Q(1,1)\end{cases}$ R. N: $\begin{cases}6y-13x-7=0 & \text{em } P(-1,-1)\\ 6y-13x+7=0 & \text{em } Q(1,1)\end{cases}$

(b) *reta tangente:* $y=-x$ *reta normal:* $y=x+2$

(c) *reta tangente:* $y=0$ *reta normal:* $x=0$

Questão 17. Área = $\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$ *u.a.*

Questão 19.

(a) $-5/12$

(b) $-5/2$

(c) $+\infty$

(d) 2

(e) -5

(f) 1

(g) e^3

(h) 1

(i) $+\infty$

Questão 20.

(a) $D(f)=R$; crescente: $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$; decrescente: $[1,3]$; máx.: $Q(1,6)$; mín.: $R(3,2)$;

(b) $D(f)=R$; crescente: $[-1,1]$; decrescente: $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$; máx.: $Q(1,0)$; mín.: $R(-1,-4)$;

(c) $D(f)=R-\{1\}$; decrescente em $R-\{1\}$; não possui máximo nem mínimo relativos;

(d) $D(f)=R$; crescente: $(-\infty,0]$; decrescente: $[0,+\infty)$; máx.: $N(0,1)$; não tem mín;

(e) $D(f)=R-\{-4,4\}$; crescente: $[0,4)\cup(4,+\infty)$; decrescente: $(-\infty,-4)\cup(-4,0]$; mín.: $N(0,-1/2)$; não tem máx..

Questão 21. $a=3$, $b=-16$, $c=18$

Questão 22.

(a) *um quadrado de lado* $L/4$.

(b) *I = V/2R.*

(c) *24 m (R$1) e 12 m (R$2).*

(d) *x = 1000* unidades .

(e) *10 cm.*

(f) triângulo de *base = 2 e altura = 4.*

(g) *Mais rapidamente às 3 horas com velocidade de 100 km/h e mais lentamente às 6 horas com velocidade de 73 Km/h.*

(h) *r = R.*

(i) $V=4000cm^3$.