Reta Tangente e Normal

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Assim sendo, temos que a equação da reta t, tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

A *reta normal* à curva $y = f(x)$, no ponto P_0 dessa curva, é a reta que passa por P_0 *perpendicularmente* à curva. Isto, é, r é normal à curva $y = f(x)$, no ponto P_0, quando r é perpendicular à reta tangente à curva nesse ponto.

Lembre-se que se duas retas são perpendiculares, tendo coeficientes angulares m e m', então $m' = -1/m$.

Assim, se $f'(x_0) \neq 0$, a equação da reta r, normal à curva $y = f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Exemplo 2.1 *Qual é a equação da reta t, que tangencia a parábola $y = x^2$, no ponto $P = (-1, 1)$? Qual é a equação da reta r, normal à parábola nesse ponto?*

Solução. *Sendo $y = x^2$, temos $\frac{dy}{dx} = 2x$. Em P, temos $x_0 = -1$. O coeficiente angular da reta t é dado por*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Assim, a reta t, tangente à curva $y = x^2$ no ponto P, tem equação

$$y - 1 = (-2)(x - (-1))$$

ou seja, $y = -2x - 1$.

Para escrever a equação da reta r, normal à curva no ponto P, fazemos uso do fato de que a declividade da reta r é $m_r = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{2}$.

Portanto, r tem equação $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$, ou ainda $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Na figura 2.2 temos a representação da curva $y = x^2$ e das retas t e r, respectivamente tangente e normal à curva no ponto $P = (-1, 1)$.