Equações Diferenciais

A segunda lei de Newton para partículas de massa constante tem a forma vectorial

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Se escrevermos a aceleração na forma $\frac{d\vec{v}}{dt}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade, ou na forma $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ onde $\vec{r}$ é o vector de posição, obtemos uma equação diferencial (ou um conjunto de equações diferenciais, uma para cada componente do vector).

A taxa à qual o calor Q escapa através de uma janela é proporcional à área e à taxa de variação da temperatura T com a distância na direcção do fluxo de calor. Temos então

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{dT}{dx}$$

(k é chamada condutividade térmica e depende do material).

1.2. Classificação das equações diferenciais.

Ordinárias: quando a função incógnita depende de apenas uma variável independente.

Exemplo: $\frac{dy}{dx} = 6x$

Parciais: quando a função incógnita depende de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

1.4 - Soluções

Uma solução de uma equação diferencial na função incógnita y e na variável independente x, num intervalo, é uma função y(x), que verifica identicamente a equação para todo x no intervalo.

Exemplos:

a) Verifique se $y = x^2 - 1$ é uma solução da equação $(y')^4 + y^2 = -1$:

Se $y = x^2 - 1 \Rightarrow y' = 2x$.

Então:

$$(y')^4 + y^2 = (2x)^4 + (x^2 - 1)^2 = 16x^4 + x^4 - 2x^2 + 1 = 17x^4 - 2x^2 + 1 \neq -1.$$

Logo, $y = x^2 - 1$ não é solução da equação $(y')^4 + y^2 = -1$.

2) Verifique se a função dada constitui uma solução da equação correspondente, onde **c** é constante.

a) $y = c + x^2$, para $y' = 2x$

b) $y = e^{2x}$, para $y'' + 2.y' = 6.e^{2x}$

c) $y = 5.e^x + 7.e^{-x} - x$, para $y'' - y = x$

d) $y = 7.sen\,2x$, para $y'' + 4y = 0$

2. Mostre que $y = \cos x + 2senx$ é solução da equação diferencial $y'' + y = 0$.

3. Verifique se $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$ é solução da equação diferenci $y'' - 6y' + 9y = 0$.

4. Mostre que $y = x^2 + Cx^{-3}$ é solução da equação diferencial $xy' + 3y = 5x^2$.

5. Verifique se $y = e^{3x}$ é solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2y$.

Capítulo 2. Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis.

2.1. Definição.

Uma equação diferencial do tipo $h(y)dy = g(x)dx$ é denominada separável ou de variáveis separáveis.
Se as funções g(x) e h(y) são integráveis, obtemos a solução geral da equação diferencial integrando os dois membros da equação.

Ou seja: $\int h(y)dy = \int g(x)dx$

Exemplo. Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 4x$.

$\int dy = \int 4x dx \Leftrightarrow y = 2x^2 + C$

Isso significa que a família de curvas $y = 2x^2 + C$ é solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 4x$, pois $\frac{d(2.x^2 + C)}{dx} = 4x$.

Exemplos:

1) Resolver a equação $dy + x.dx = 0$:

2) Resolver a equação $y' = \frac{x+1}{y^2+1}$: