Integração Numérica

Integração Numérica

Ementa:

8.1 – Introdução

8.2 – Regra dos trapézios

8.3 – Primeira Regra de Simpson

8.4 – Segunda Regra de Simpson

Integração Numérica

8.1 – Introdução

Dada uma função f(x), integrável no intervalo [a,b], definimos a integral como sendo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

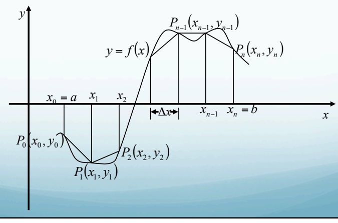
Onde F'(x)=f(x).

Mas quando a forma analítica de F(x) for de difícil obtenção, ou quando conhecermos somente valores discretos de f(x) (como uma tabela de dados), precisamos recorrer a métodos numéricos para a sua resolução.

Integração Numérica

8.2 – Regra dos trapézios

Esta regra aproxima pequenos trechos da curva y=f(x) por segmentos de reta igualmente espaçados no intervalo [a,b].



Integração Numérica

A região entre a curva e o eixo x é aproximada por trapézios. Realizando a soma das áreas dos trapézios, encontramos a integral de f(x). De forma geral, a fórmula para obtenção da integral é:

$$T = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

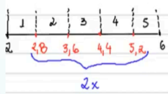
Onde h é a largura do trapézio, geralmente dada através do número "n" de intervalos:

h=(b-a)/n

RADIANOS

$$\int_2^6 e^x \cdot \cos(x)\, dx = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + 2 \cdot \left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) \right) + f(b) \right]$$

$$h = \frac{6-2}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$



$f(2) = e^2 \cdot \cos(2) = -3{,}074932$

$f(2{,}8) = e^{2{,}8} \cdot \cos(2{,}8) = -15{,}494514$

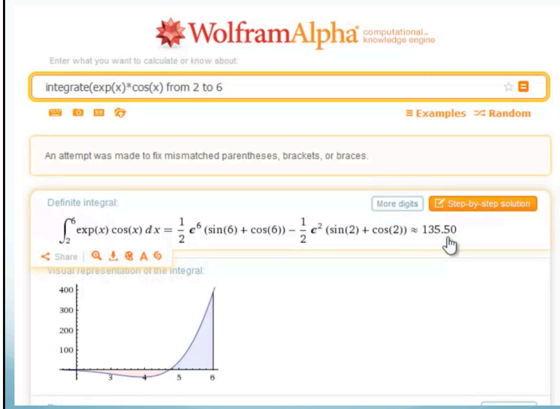
$f(3{,}6) = e^{3{,}6} \cdot \cos(3{,}6) = -32{,}819775$

$f(4{,}4) = e^{4{,}4} \cdot \cos(4{,}4) = -25{,}032529$

$f(5{,}2) = e^{5{,}2} \cdot \cos(5{,}2) = 84{,}929067$

$f(6) = e^6 \cdot \cos(6) = 387{,}360340$

$$\int_2^6 e^x \cos x\, dx = \frac{0{,}8}{2} \cdot \left[f(2) + 2 \cdot \left(f(2{,}8) + f(3{,}6) + \cdots + f(5{,}2) \right) + f(6) \right] = 162{,}979963$$



Integração Numérica

Exemplo: Calcular a integral definida abaixo, utilizando a regra dos trapézios com:

a)n = 5 intervalos.

b)n= 10 intervalos.

$$\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$$

Integração Numérica

Solução:

a) O método prático de cálculo envolve preencher uma tabela com os valores de x e y, bem como os coeficientes de y:

i	x	y	c
0	1,0	1,000	1
1	1,6	0,625	2
2	2,2	0,454	2
3	2,8	0,357	2
4	3,4	0,294	2
5	4,0	0,250	1

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{5} = 0{,}6$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Integração Numérica

Portanto, utilizando a regra do trapézio:

$$T = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5\right)$$

$$T = \frac{0{,}6}{2}\left(1 + 2.0{,}625 + 2.0{,}454 + 2.0{,}357 + 2.0{,}294 + 0{,}25\right)$$

$$T = 0{,}3.(1 + 1{,}25 + 0{,}908 + 0{,}714 + 0{,}588 + 0{,}250)$$

$$T = 0{,}3.(4{,}71) = 1{,}413$$

O valor exato desta integral é 1,3863.

Integração Numérica

b) Considerando agora 10 intervalos:

i	x	y	c
0	1,0	1,000	1
1	1,3	0,769	2
2	1,6	0,625	2
3	1,9	0,526	2
4	2,2	0,454	2
5	2,5	0,400	2
6	2,8	0,357	2
7	3,1	0,322	2
8	3,4	0,294	2
9	3,7	0,270	2
10	4,0	0,250	1

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{10} = 0{,}3$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Integração Numérica

Levando os dados à equação dos trapézios:

$$T = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_9 + y_{10}\right)$$

$$T = \frac{0{,}3}{2}(9{,}288) = 1{,}393$$

Como pode-se notar, um maior número de pontos torna o resultado mais próximo do valor real.

Integração Numérica

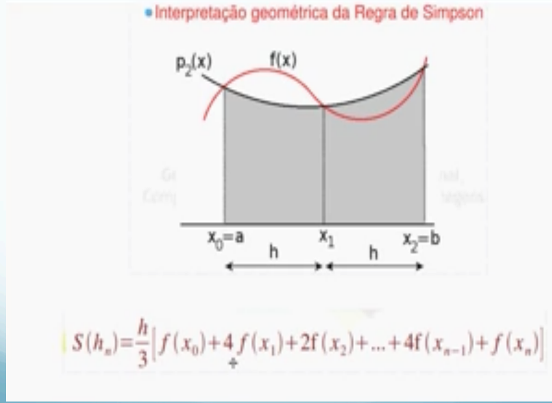
8.3 – Primeira Regra de Simpson

Também conhecida como regra do 1/3 de Simpson, este método aproxima os pontos da tabela por equações do 2º grau. A equação geral para a primeira regra de Simpson é:

$$I_2 = \frac{h}{3}\cdot\left(\sum_{i=0}^{m} c_i . y_i\right)$$

Onde os coeficientes ci são iguais a 1, para c_0 e c_n, 4 para os "i" ímpares e 2 para os "i" pares. Um detalhe importante:

O número de subintervalos "m" deve ser par.



Integração Numérica

Exemplo:

Calcule a integral abaixo, utilizando m=4 intervalos.

$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx$$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{4-1}{4} = 0{,}75$$

i	x	y	c	c.y
0	1	1	1	1
1	1,75	0,571	4	2,285
2	2,5	0,4	2	0,8
3	3,25	0,308	4	1,230
4	4	0,25	1	0,25

De acordo com a primeira regra de Simpson:

$$I_2 = \frac{h}{3}.(c_0.y_0 + c_1.y_1 + c_2.y_2 + c_3.y_3 + c_4.y_4)$$

$$I_2 = \frac{0{,}75}{3}.(1.1 + 4.0{,}571 + 2.0{,}4 + 4.0{,}308 + 1.0{,}25)$$

$$I_2 = 0{,}25.(5{,}566) = 1{,}3915$$

Integração Numérica

8.4 – Segunda Regra de Simpson

Também conhecida como regra dos 3/8 de Simpson, este método aproxima os pontos da tabela por equações do 3º grau. A equação geral para a segunda regra de Simpson é:

$$I_3 = \frac{3.h}{8}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m} c_i . y_i\right)$$

Onde os ci são iguais a 1, para c_0 e c_n, 2 para os "i" múltiplos de 3 e, 3 para os demais.

O número de subintervalos "m" deve ser múltiplo de 3.

Integração Numérica

Exemplo:

Calcule a integral abaixo, utilizando m=6 intervalos.

$$\int_1^4 \frac{1}{x}dx$$

Solução: Colocamos os dados em forma de tabela, para facilitar a interpretação:

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{4-1}{6} = 0{,}5$$

Integração Numérica

i	x	y	c	c.y
0	1	1	1	1
1	1,5	0,667	3	2,001
2	2,0	0,500	3	1,500
3	2,5	0,400	2	0,800
4	3,0	0,333	3	0,999
5	3,5	0,286	3	0,858
6	4,0	0,250	1	0,25

Integração Numérica

De acordo com a primeira regra de Simpson:

$$I_3 = \frac{3.h}{8}.\left(c_0.y_0 + c_1.y_1 + c_2.y_2 + c_3.y_3 + c_4.y_4 + c_5.y_5 + c_6.y_6\right)$$

$$I_3 = \frac{3.0,5}{8}.(1.1 + 3.0,667 + 3.0,5 + 2.0,4 + 3.0,333 + 3.0,286$$
$$+ 1.0,25)$$

$$I_3 = 0,1875.(1 + 2,001 + 1,5 + 0,8 + 0,999 + 0,858 + 0,25)$$

$$I_3 = 0,1875.(7,408) = 1,3890$$

Como pôde-se ver, este método aproxima ainda mais o valor real da integral.